lawebdelprofedemates.es

CONTROL 2

Análisis y enfoques
Matemáticas II

Fecha: **Viernes, 30 de OCTUBRE de 2026**

NOMBRE: _____

APELLIDOS:_____

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 11 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.

  Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

1. El número de accidentes de autobús que ocurren en una determinada ciudad durante un período de tiempo sigue una distribución de Poisson con una media de 4.2 accidentes por semana (7 días).

(a) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que ocurran al menos dos accidentes en una semana al azar.

(b) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que no ocurra ningún accidente durante un período de cinco días elegido al azar.

(c) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que ocurran menos de diez accidentes durante un período al azar de dos semanas.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2 puntos]

2. Freddy fabrica un contenedor metálico abierto por la parte superior (sin tapa) con forma de ortoedro (prisma rectangular de base rectangular), de altura h cm, anchura x cm y longitud $2x$ cm. El volumen del contenedor es de 36 cm^3. Sea S cm^2 el área de la superficie exterior total del contenedor.

(a) (1 punto) Exprese el área de la superficie exterior S en función únicamente de la anchura x.

(b) (1 punto) Halle el valor de x y la altura h que hacen mínima la superficie exterior. Justifique que se trata de un mínimo y calcule el valor de dicha superficie.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2 puntos]

3. Dada la función $g(x) = 1 - 3x + \cos(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$.

a) (0,75 puntos) Demuestre que la ecuación $g(x) = 0$ tiene al menos una solución real positiva

b) (0,5 puntos) Calcule, si existen, los extremos relativos de función $g(x)$.

c) (0,75 puntos) Utilizando el teorema de Rolle y los resultados de los apartados anteriores, demuestre que $g(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ por el método de contradicción o reducción al absurdo, suponiendo que al menos hay dos soluciones en dicho intervalo.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

4. Resuelva algebraicamente las siguientes cuestiones,

(a) (1,25 puntos) Se consideran las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = x$. Calcule el área del recinto plano limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

(b) (1,25 puntos) Considere la función $f(x) = |x^2 - 4|$, calcule la suma de las áreas de los recintos limitados por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX (eje de abscisas) y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 3$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 3 puntos]

5. Se sabe que el 80% de los opositores que se presentan a una determinada prueba de selección obtienen una calificación superior a 5 puntos. Se elige una muestra aleatoria de 10 opositores. Sea la variable aleatoria X que cuenta el número de opositores que obtienen una calificación superior a 5 puntos. Responda justificadamente,

(a) (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos hayan obtenido una calificación superior a 5 puntos.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(b) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que menos de ocho hayan obtenido una calificación superior a 5 puntos.

(c) (0,5 puntos) Calcule el número esperado de ellos que obtienen una calificación superior a cinco puntos y la desviación típica que presentan ese número de opositores

Supongamos ahora que, de forma independiente al rendimiento en el examen, cada opositor de la muestra puede haber preparado la prueba en una Academia Presencial ($\mathrm{Y} = 1$), mediante un Curso Online ($\mathrm{Y} = 2$) o por Cuenta Propia ($\mathrm{Y} = 3$), con la siguiente distribución de probabilidad marginal para la variable discreta Y:

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$P(Y = k)$	p	0.3	0.5

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(d) (0,25 + 0,25 + 0,5 puntos) Calcula el valor de p, la esperanza y la desviación típica de la variable Y.

Suponga que seleccionamos un opositor de la muestra al azar. Sabiendo que las variables X (rendimiento) e Y (tipo de preparación) son independientes, responda a las cuestiones siguientes,

(e) (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que este opositor elegido haya preparado el examen en Academia Presencial y pertenezca a una muestra donde exactamente 8 opositores hayan aprobado.

(f) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que al menos 8 opositores hayan aprobado y el opositor elegido NO haya preparado el examen por Cuenta Propia.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CONTROL Nº 2 DE MATEMÁTICAS II

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

1. El número de accidentes de autobús que ocurren en una determinada ciudad durante un período de tiempo sigue una distribución de Poisson con una media de 4.2 accidentes por semana.

(a) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que ocurran al menos dos accidentes en una semana al azar.

(b) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que no ocurra ningún accidente durante un período de cinco días elegido al azar.

(c) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que ocurran menos de diez accidentes durante un período al azar de dos semanas.

(a) Hallar la probabilidad de que ocurran al menos dos accidentes en una semana al azar.

Definimos primero la variable aleatoria: Sea X el número de accidentes de autobús en un día.

$$X \sim \text{Po}(4.2)$$

La función de probabilidad de Poisson es:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad \text{donde } \lambda = 4.2$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Queremos calcular $P(X \geq 2)$ y para ello, usaremos el suceso contrario:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$$

$$= 1 - \frac{e^{-4.2} \cdot 4.2^0}{0!} - \frac{e^{-4.2} \cdot 4.2^1}{1!} = 1 - e^{-4.2} - 4.2 \cdot 3^{-4.2} \approx$$

$$\approx 1 - (0.014995 + 0.062981) = 1 - 0.077976 = 0.9220 \quad (\text{o } 92.20\%)$$

(b) Hallar la probabilidad de que no ocurra ningún accidente durante un período de cinco días elegido al azar.

Primero recalculamos el parámetro media (λ') para un periodo de 5 días (sabiendo que una semana tiene 7 días):

$$\lambda'_{\text{5 días}} = \frac{4.2}{7} \times 5 = 0.6 \times 5 = 3$$

Definimos X' = accidentes en 5 días $\Rightarrow$ $X' \sim \text{Po}(\lambda' = 3)$.

Queremos hallar $P(Y = 0)$:

$$P(X' = 0) = e^{-3} \approx 0.0498 \quad (\text{o } 4.98\%)$$

(c) (0,5 puntos) Hallar la probabilidad de que ocurran menos de diez accidentes durante un período al azar de dos semanas.

Recalculamos el parámetro media (λ'') para 2 semanas:

$$\lambda''_{\text{2 semanas}} = 4.2 \times 2 = 8.4$$

Definimos X'' = accidentes en 2 semanas $\Rightarrow$ $X'' \sim \text{Po}(8.4)$.

En este caso, la probabilidad de que haya menos de diez accidentes en el periodo de dos semanas significa estrictamente $X'' < 10$, lo cual equivale a $X'' \leq 9$:

$$P(X'' < 10) = P(X'' \leq 9) = \sum_{k=0}^{9} \frac{e^{-8.4} \cdot (8.4)^k}{k!}$$

Usando la función de distribución acumulada de Poisson obtenemos,

$$P(X'' \leq 9) = e^{-8.4} \cdot \left[1 + 8.4 + \frac{8.4^2}{2!} + \frac{8.4^3}{3!} + \cdots + \frac{8.4^9}{9!}\right] \approx \mathbf{0.6720} \quad (\text{o } 67.2\%)$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2 puntos]

2. Freddy fabrica un contenedor metálico abierto por la parte superior (sin tapa) con forma de ortoedro (prisma rectangular de base rectangular), de altura h cm, anchura x cm y longitud $2x$ cm. El volumen del contenedor es de 36 cm^3. Sea S cm^2 el área de la superficie exterior total del contenedor.

(a) (1 punto) Exprese el área de la superficie exterior S en función únicamente de la anchura x.

(b) (1 punto) Halle el valor de x y la altura h que hacen mínima la superficie exterior. Justifique que se trata de un mínimo y calcule el valor de dicha superficie.

(a) (1 punto) Exprese el área de la superficie exterior S en función únicamente de la anchura x.

Las dimensiones del ortoedro son,

Anchura = x Longitud = $2x$ Altura = h

La relación que asocia las dimensiones del ortoedro es el cálculo del volumen del ortoedro. Como el volumen es el producto de sus tres dimensiones entonces,

$$V = \text{anchura} \times \text{longitud} \times \text{altura} = x \cdot (2x) \cdot h = 2x^2 h$$

Como nos indican que $V = 36$ cm^3 tendremos que,

$$2x^2 h = 36$$

Despejamos la altura h en función de x:

$$h = \frac{36}{2x^2} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{18}{x^2}$$

Planteamos ahora la función superficie a minimizar. Al estar abierto por la parte superior (sin tapa), el área total consta de 5 caras:

- 1 base rectangular: área $= x \cdot (2x) = 2x^2$
- 2 caras laterales de anchura x y altura h: área $= 2 \cdot (x \cdot h) = 2xh$
- 2 caras frontales/posteriores de longitud $2x$ y altura h: área $= 2 \cdot (2x \cdot h) = 4xh$

Sumamos todas las áreas para obtener la superficie total S:

$$S = 2x^2 + 2xh + 4xh = 2x^2 + 6xh$$

Como $h = \frac{18}{x^2}$ concluimos que la expresión algebraica de S en función de la anchura x es,:

$$S(x) = 2x^2 + 6x \cdot \left(\frac{18}{x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad S(x) = 2x^2 + \frac{108}{x} \quad (\text{para } x > 0)$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(b) (1 punto) Halle el valor de x y la altura h que hacen mínima la superficie exterior. Justifique que se trata de un mínimo y calcule el valor de dicha superficie.

Calculamos la función derivada de $S(x)$

$$S'(x) = 4x - \frac{108}{x^2}$$

Buscamos ahora los puntos críticos:

$$S'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - \frac{108}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = \frac{108}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 = 108 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3 = 27 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ cm}$$

Calculamos la medida de altura h correspondiente sustituyendo $x = 3$ en la relación $h = \frac{18}{x^2}$:

$$h = \frac{18}{3^2} = \frac{18}{9} = 2 \text{ cm}$$

Comprobamos que, efectivamente, estos valores hacen a la función superficie mínima.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

- Método 1: Criterio de la segunda derivada

  Calculamos $S''(x)$:

  $$S''(x) = 4 + \frac{216}{x^3}$$

  Evaluamos en $x = 3$:

  $$S''(3) = 4 + \frac{216}{3^3} = 4 + \frac{216}{27} = 4 + 8 = 12 > 0$$

  Al ser $S''(3) > 0$, queda justificado que en $x = 3$ la función alcanza un mínimo relativo.

- Método 2: Estudio del signo de la primera derivada

  - Para $x \in (0,3)$, por ejemplo $x = 1 \Longrightarrow S'(1) = 4 - 108 = -104 < 0 \Longrightarrow S(x)$ es estrictamente decreciente.
  - Para $x \in (3, +\infty)$, por ejemplo $x = 4 \Longrightarrow S'(4) = 16 - \frac{108}{16} = 16 - 6.75 = 9.25 > 0 \Longrightarrow S(x)$ es estrictamente creciente.

Al cambiar la primera derivada de negativa a positiva en $x = 3$, se confirma que hay un mínimo.

La superficie mínima se calcula sustituyendo $x = 3$ en la función $S(x)$,

$$S(3) = 2 \cdot 3^2 + \frac{108}{3} \text{ cm}^2 = 18 + 36 \text{ cm}^2 = 54 \text{ cm}^2$$

[Puntuación máxima: 2 puntos]

3. Dada la función $g(x) = 1 - 3x + \cos(x)$, donde $x \in \mathbb{R}$.

a) (0,75 puntos) Demuestre que la ecuación $g(x) = 0$ tiene al menos una solución real positiva

b) (0,5 puntos) Calcule, si existen, los extremos relativos de función $g(x)$.

c) (0,75 puntos) Utilizando el teorema de Rolle y los resultados de los apartados anteriores, demuestre que $g(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ por el método de contradicción o reducción al absurdo, suponiendo que al menos hay dos soluciones en dicho intervalo.

a) (0,75 puntos) Demuestre que la ecuación $g(x) = 0$ tiene al menos una solución real positiva

Aplicamos el Teorema de Bolzano:

> *Si una función $g(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos ($g(a) \cdot g(b) < 0$), entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$.*

En nuestro caso, la función $g(x) = 1 - 3x + \cos(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser suma de un polinomio y una función trigonométrica continua. Por tanto, es continua en el intervalo cerrado $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Además,

- En $x = 0$ (extremo no negativo):

$$g(0) = 1 - 3 \cdot 0 + \cos(0) = 1 - 0 + 1 = 2 > 0$$

- En $x = \frac{\pi}{2}$ (valor positivo):

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 3\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{3\pi}{2} + 0 = 1 - \frac{3\pi}{2} \approx -3{,}7124 < 0$$

Dado que $g(0) > 0$ y $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$, por el Teorema de Bolzano existe al menos una raíz $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $g(c) = 0$. Al ser $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, queda demostrado que dicha solución es real y positiva.

b) (0,5 puntos) Calcule, si existen, los extremos relativos de función $g(x)$.

Calculamos la primera derivada,

$$g'(x) = -3 - \sin(x)$$

Calculamos los puntos críticos resolviendo la ecuación $g'(x) = 0$:

$$-3 - \sin(x) = 0 \Longrightarrow \sin(x) = -3$$

Como, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ entonces , la ecuación $\sin(x) = -3$ no tiene solución real y, en tal caso, la función $g(x)$ no tiene ningún extremo relativo.

c) (0,75 puntos) Utilizando el teorema de Rolle y los resultados de los apartados anteriores, demuestre que $g(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ por el método de contradicción o reducción al absurdo, suponiendo que al menos hay dos soluciones en dicho intervalo.

El teorema de Rolle dice que,

Si una función $g(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en su interior (a, b) $g(a) = g(b)$ entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c) = 0.$$

Demostramos la unicidad por reducción al absurdo utilizando el Teorema de Rolle. Para ello, suponemos lo contrario de lo que se trata de probar y lleguemos mediante un razonamiento lógico deductivo correcto a una contradicción.

Supongamos que la ecuación $g(x) = 0$ tiene dos soluciones distintas

$\mathrm{r}, s \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ con $\mathrm{r} < s$. Por tanto, $g(r) = 0$ y $g(s) = 0$.

Se dan las condiciones para aplicar el teorema de Rolle sobre la función $g(x)$ en el intervalo $[r, s]$ ya que,

- $g(x)$ es continua en $[\mathrm{r}, \mathrm{s}] \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $g(x)$ es derivable en (r, s).
- $g(\mathrm{r}) = g(\mathrm{s}) = 0$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Por el Teorema de Rolle, debería existir al menos un valor c$\in (r, s)$ tal que $g'(c) = 0$.

Pero esto es imposible ya que en el apartado (b) hemos demostrado que $g(x)$ no tiene extremos relativos para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que $g'(x)$ nunca se anula en ningún punto del dominio. Por tanto, la función no puede tener más de una solución en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

En conclusión, como por el apartado a) la ecuación $g(x) = 0$ tiene al menos una solución real positiva en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, y por lo visto en este apartado c), la ecuación no tiene más de dos soluciones en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$., concluimos que la ecuación $g(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

4. Resuelva algebraicamente las siguientes cuestiones,

(a) (1,25 puntos) Se consideran las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = x$. Calcule el área del recinto plano limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

(b) (1,25 puntos) Considere la función $f(x) = |x^2 - 4|$, calcule la suma de las áreas de los recintos limitados por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX (eje de abscisas) y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 3$.

(a) (1,25 puntos) Se consideran las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = x$. Calcule el área del recinto plano limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Para hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones, necesitamos calcular la abcisa de los puntos de intersección entre $f(x)$ y $g(x)$. Para ello, igualamos ambas expresiones:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow x^3 - 3x = x$$

Resolvemos la ecuación resultante según,

$$x^3 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x-2) \cdot (x+2) = 0$$

Obtenemos las tres soluciones (abscisas de corte):

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2$$

Como tenemos tres puntos de corte ($x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$), el recinto queda dividido en dos regiones distintas:

- Primera región: $I_1 = [-2,0]$
- Segunda región: $I_2 = [0,2]$

Si sustituimos $x = -1$ en cada función,

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \qquad ; \qquad g(-1) = -1$$

Observamos que $f(-1) > g(-1)$ cosa que va a ocurrir en todo el intervalo: $I_1 = [-2,0]$.

Si sustituimos $x = +1$ en cada función,

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = 2 \qquad ; \qquad g(1) = 1$$

Observamos que $g(1) > f(1)$ cosa que va a ocurrir en todo el intervalo: $I_1 = [0, +2]$.

Por lo tanto, el área pedida se calcula del siguiente modo mediante dos integrales, una en cada intervalo,

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\ dx + \int_{0}^{2} (4x - x^3) = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left(\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2 \cdot (-2)^2\right) + \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - \left(2 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{4}\right) =$$

$$= 0 - (-4) + 4 - 0 = 8\, u^2$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(b) (1,25 puntos) Considere la función $f(x) = |x^2 - 4|$, calcule la suma de las áreas de los recintos limitados por la gráfica de la función $f(x)$, el eje OX (eje de abscisas) y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 3$.

El intervalo de integración es $[-1,3]$. Observamos que en $x = 2$ la función cambia de rama a trozos, por lo que debemos dividir la región en dos recintos:

- El recinto 1 (con área A_1): en el intervalo $[-1,2]$, donde $f(x) = 4 - x^2$.
- El recinto 2 (con área A_2): en el intervalo $[2,3]$, donde $f(x) = x^2 - 4$.

Por lo tanto, el área pedida será,

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{+2} (4 - x^2)\ dx + \int_{2}^{3} (x^2 - 4)\ dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{3} =$$

Aplicamos la Regla de Barrow:

$$\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} = 8 - \frac{8}{3}\right) - \left(4 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) + \left(\frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 4 \cdot 2\right) =$$

$$= \frac{16}{3} - \left(-\frac{11}{3}\right) + (-3) - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{16 + 11 - 9 + 16}{3} = \frac{34}{3}\ u^2 \approx 11{,}33\ \text{u}^2$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 3 puntos]

5. Se sabe que el 80% de los opositores que se presentan a una determinada prueba de selección obtienen una calificación superior a 5 puntos. Se elige una muestra aleatoria de 10 opositores. Sea la variable aleatoria X que cuenta el número de opositores que obtienen una calificación superior a 5 puntos. Responda justificadamente,

(a) (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que exactamente 8 de ellos hayan obtenido una calificación superior a 5 puntos.

La variable X representa el número de opositores (de un total de $n = 10$) que obtienen una calificación superior a 5 puntos. La probabilidad de que un opositor obtenga más de 5 puntos es $p = 0{,}80$. Por tanto, X sigue una distribución binomial:

$$X \sim B(n = 10;\ p = 0{,}8)$$

Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la distribución Binomial:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

para $k = 8$, según:

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0.8^8 \cdot 0.^{10-8} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} \cdot 0.8^8 \cdot 0.2^2 =$$

$$= 45 \cdot 0{,}167772 \cdot 0{,}04 = \mathbf{0,302} = \mathbf{30,20\%}$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(b) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que menos de ocho hayan obtenido una calificación superior a 5 puntos.

Queremos hallar $P(X < 8)$, que en una variable discreta equivale a $P(X \leq 7)$.

Usamos la probabilidad del suceso contrario, opuesto o complementario:

$$P(X < 8) = 1 - P(X \geq 8) = 1 - [P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)]$$

Calculamos las probabilidades,

- $P(X = 8) \approx 0{,}302$ (calculado en el apartado (a))
- $P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot 0.8^9 \cdot 0.2^1 = 10 \cdot 0.8^9 \cdot 0{,}2 \approx 0{,}2684$
- $P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot 0.8^{10} \cdot 0.2^0 = 1 \cdot 0.8^{10} \cdot 1 \approx 0{,}1074$

Por lo tanto,

$$P(X < 8) = 1 - 0{,}302 - 0{,}2684 - 0{,}1074 = 1 - 0{,}6778 = \mathbf{0,3222} = \mathbf{32,22\%}$$

(c) (0,5 puntos) Calcule el número esperado de ellos que obtienen una calificación superior a cinco puntos y la desviación típica que presentan ese número de opositores

- Esperanza (Número esperado) $E[X]$:

$$E[X] = \mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}8 = \mathbf{8} \text{ opositores}$$

- Desviación típica σ_X:

$$\sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{10 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = \sqrt{1{,}6} \approx \mathbf{1{,}2649}$$

Supongamos ahora que, de forma independiente al rendimiento en el examen, cada opositor de la muestra puede haber preparado la prueba en una Academia Presencial ($\mathrm{Y} = 1$), mediante un Curso Online ($\mathrm{Y} = 2$) o por Cuenta Propia ($\mathrm{Y} = 3$), con la siguiente distribución de probabilidad marginal para la variable discreta Y:

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$P(Y = k)$	p	0.3	0.5

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(d) (0,25 + 0,25 + 0,5 puntos) Calcula el valor de p, la esperanza y la desviación típica de la variable Y.

- **Cálculo de p:** La suma de todas las probabilidades debe ser igual a 1:

$$\sum_{k=1}^{3} P(Y = k) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p + 0.3 + 0.5 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p + 0.8 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p = 0.2}$$

- **Cálculo de la esperanza $E[Y]$:**

$$E[Y] = \sum_{k=1}^{3} k \cdot P(Y = k) = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.5 = 0.2 + 0.6 + 1.5 = \mathbf{2.3}$$

- **Cálculo de la desviación típica σ_Y:** Primero hallamos $E[Y^2]$:

$$E[Y^2] = \sum_{k=1}^{3} k^2 \cdot P(Y = k) = 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.5 =$$

$$= 0{,}2 + 4 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.5 = 0.2 + 1.2 + 4.5 = 5{,}9$$

Calculamos la varianza $V[Y]$:

$$V[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 5.9 - 2.3^2 = 5.9 - 5.29 = 0.61$$

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma_Y = \sqrt{0.61} \approx \mathbf{0.7810}$$

Suponga que seleccionamos un opositor de la muestra al azar. Sabiendo que las variables X (rendimiento) e Y (tipo de preparación) son independientes, responda a las cuestiones siguientes,

(e) (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que este opositor elegido haya preparado el examen en Academia Presencial y pertenezca a una muestra donde exactamente 8 opositores hayan aprobado.

Como las variables X (rendimiento) e Y (tipo de preparación) son independientes, la probabilidad conjunta es el producto de sus probabilidades marginales:

$$P\big((Y=1)\cap(X=8)\big)=P(Y=1)\cdot P(X=8)$$

Sustituimos con los valores obtenidos previamente y obtenemos la solución,

$$P\big((Y=1)\cap(X=8)\big)=0{,}2\cdot 0{,}3020=0{,}0604 \quad (\text{o } 6{,}04\%)$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(f) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que al menos 8 opositores hayan aprobado y el opositor elegido NO haya preparado el examen por Cuenta Propia.

Queremos calcular la probabilidad del suceso conjunto $P\big((X\geq 8)\cap(Y\neq 3)\big)$. Dado que las variables X e Y son independientes, la probabilidad conjunta es el producto de sus probabilidades marginales:

$$P\big((X\geq 8)\cap(Y\neq 3)\big)=P(X\geq 8)\cdot P(Y\neq 3)$$

Para el cálculo de $P(X\geq 8)$ (al menos 8 aprobados), nos basamos en lo realizado en el apartado b). Según vimos en ese apartado,

$$P(X\geq 8)=0{,}3020+0{,}2684+0{,}1074=0{,}6778$$

Para el cálculo de $P(Y\neq 3)$ (NO preparar por cuenta propia):

$$P(Y\neq 3)=1-P(Y=3)=1-0{,}5=0{,}5$$

Por lo tanto, la probabilidad pedida es,

$$P\big((X\geq 8)\cap(Y\neq 3)\big)=0{,}6778\cdot 0{,}5=0{,}3389=33{,}89\,\%$$