

Nombre y apellidos:

1. Sea la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + e^{-1} & \text{si } x \leq 0 \\ ce^x + x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{4x-2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) (0,75 puntos) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en función de los parámetros a, b y c .**b) (0,75 puntos)** Calcúlense los valores de a, b y c para los que la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.**2.** Se considera la función $f(x) = x^2 \cdot (e^x - 1)^{-1}$.**a) (0,75 puntos)** Determine el dominio de definición de $f(x)$ y sus asíntotas.**b) (0,75 puntos)** Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.**c) (1 punto)** Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.**3. (2 puntos)** Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ y la función $g(x) = \ln(x)$ **a)** Pruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $(0,1)$.**b)** Pruebe que la función $f(x)$ tiene al menos un valor positivo donde toma altura $y = 3$ por Bolzano.**c)** Pruebe que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen al menos un punto de intersección.**d)** Compruebe si se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle para la función $f(x)$ en el intervalo $[-2,1]$ y, en caso afirmativo, halle el punto $c \in (-2,1)$ tal que $f'(c) = 0$.**4. a) (0,5 + 0,75 puntos)** Calcule los siguientes límites:

$$a1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} \quad a2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

b) (0,75 puntos) Determine el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-1} \right)^x = e^3$$

5. (2 puntos) Se considera la función real de variable real $f(x) = \ln(2x^3 - 9x^2 + 12x - 4)$.**a)** Determine el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como sus extremos relativos (máximos y mínimos).**b)** Calcule el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es nula. En ese punto calcule la ecuación de la recta normal a dicha función.

SOLUCIONES DESARROLLADAS A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS

1. Sea la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + e^{-1} & \text{si } x \leq 0 \\ ce^x + x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{4x-2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) (0,75 puntos) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en función de los parámetros a, b y c .
- b) (0,75 puntos) Calcúlense los valores de a, b y c para los que la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

Solución

a) Estudio de la continuidad de $f(x)$ en función de los parámetros a, b y c

Cada uno de los tres trozos está formado por funciones continuas y derivables en sus respectivos intervalos abiertos:

- Para $x < 0$, $ax^2 + bx + e^{-1}$ es un polinomio (continuo y derivable en todo $\mathbb{R}$).
- Para $0 < x < 1$, $ce^x + x$ es la suma de una función exponencial y una lineal (continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$).
- Para $x > 1$, $\frac{4x-2}{x}$ es una función racional con punto de discontinuidad en $x = 0$, pero como está definida para $x > 1$, es continua y derivable en todo su dominio.

Por tanto, los únicos puntos donde la continuidad depende de los parámetros son las fronteras $x = 0$ y $x = 1$.

Estudiamos ahora la continuidad en $x = 0$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, se debe cumplir que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$:

- Límite por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 + bx + e^{-1}) = e^{-1}$$

- Límite por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ce^x + x) = ce^0 + 0 = c$$

- Valor de la función:

$$f(0) = a(0)^2 + b(0) + e^{-1} = e^{-1}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, igualamos los tres valores y obtenemos que,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow c = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Estudiamos ahora la continuidad en $x = 1$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, se debe cumplir que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$:

- Límite por la izquierda y valor de la función:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ce^x + 1) = ce + 1$$

- Límite por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x - 2}{x} = \frac{4(1) - 2}{1} = 2$$

- Valor de la función:

$$f(1) = ce^1 + 1 = ce + 1$$

Igualando ambos límites:

$$ce + 1 = 2 \Rightarrow ce = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{e}$$

Por lo tanto, para que la función sea continua en $\mathbb{R}$ tendremos que $c = e^{-1}$.

b) (0,75 puntos) Calcúlense los valores de a, b y c para los que la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$.

Para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, primero debe ser continua en todo $\mathbb{R}$, por lo que fijamos:

$$c = e^{-1}$$

Ahora estudiamos la derivabilidad. La derivada de cada trozo es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 0 \\ ce^x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$,

- Derivada por la izquierda:

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2ax + b) = b$$

- Derivada por la derecha:

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ce^x + 1) = ce^0 + 1 = c + 1$$

Como $c = e^{-1}$:

$$b = e^{-1} + 1$$

Estudiamos ahora la derivabilidad en $x = 1$

- Derivada por la izquierda:

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ce^x + 1) = ce^1 + 1 = ce + 1$$

Sustituyendo $c = e^{-1}$:

$$f'(1^-) = e^{-1} \cdot e + 1 = 1 + 1 = 2$$

- Derivada por la derecha:

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{1^2} = 2$$

Como $f'(1^-) = f'(1^+) = 2$, la función siempre es derivable en $x = 1$ cuando $c = e^{-1}$.

Concluimos entonces que la función $f(x)$ será derivable, y por tanto, continua, en todo $\mathbb{R}$ para,

- $a \in \mathbb{R}$ (cualquier valor real)

- $b = e^{-1} + 1 = \frac{1}{e} + 1$

- $c = e^{-1} = \frac{1}{e}$

2. Se considera la función $f(x) = x^2 \cdot (e^x - 1)^{-1}$.

a) (0,75 puntos) Determine el dominio de definición de $f(x)$ y sus asíntotas.

b) (0,75 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

c) (1 punto) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Solución

a) (0,75 puntos) Determine el dominio de definición de $f(x)$ y sus asíntotas.

La función es un cociente de dos funciones continuas:

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$$

Estará definida para todos los números reales excepto aquellos que anulen el denominador:

$$e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Por tanto, el dominio es:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Estudiamos si en $x = 0$ hay o no una asíntota vertical,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{e^x} = 0$$

Como el límite existe y es un número finito (0), no hay asíntota vertical en $x = 0$ (existe una discontinuidad evitable). Por tanto, la función no tiene asíntotas verticales.

Estudiamos si existen asíntotas horizontales.

- Analizamos primero la tendencia a más infinito,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Por tanto, $y = 0$ es una asíntota horizontal por la derecha ($x \rightarrow +\infty$).

- Estudiamos la tendencia hacia $-\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-x)^2}{e^{-x} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{e^x} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\frac{1 - e^x}{e^x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot x^2}{1 - e^x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x}{-e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{-1} = -\infty \end{aligned}$$

Como el límite da $-\infty$, no hay asíntota horizontal por la izquierda ($x \rightarrow -\infty$).

Estudiamos ahora las asíntotas oblicuas. Una asíntota oblicua tiene la forma $y = mx + n$.

- Por la derecha ($x \rightarrow +\infty$): Ya existe una asíntota horizontal ($y = 0$), por lo que no hay asíntota oblicua.
- Por la izquierda ($x \rightarrow -\infty$): Calculamos la pendiente m :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\frac{1}{e^x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\frac{1 - e^x}{e^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x \cdot e^x}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^x - x \cdot e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + x}{1} = +\infty \end{aligned}$$

Como $m = +\infty$, tampoco hay asíntota oblicua por la izquierda.

- b) (0,75 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 1$ viene dada por:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

Calculamos el punto de tangencia $f(1)$:

$$f(1) = \frac{1^2}{e^1 - 1} = \frac{1}{e - 1}$$

Derivamos la función racional $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$:

$$f'(x) = \frac{2x(e^x - 1) - x^2(e^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{2xe^x - 2x - x^2e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x(2e^x - 2 - xe^x)}{(e^x - 1)^2}$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente $f'(1)$ es,

$$f'(1) = \frac{1(2e - 2 - 1 \cdot e)}{(e - 1)^2} = \frac{e - 2}{(e - 1)^2}$$

En ese caso, la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es,

$$y - \frac{1}{e - 1} = \frac{e - 2}{(e - 1)^2}(x - 1)$$

O expresada de forma explícita:

$$y = \frac{e - 2}{(e - 1)^2}x + \frac{1}{e - 1} - \frac{e - 2}{(e - 1)^2} \Leftrightarrow y = \frac{e - 2}{(e - 1)^2}x + \frac{e - 1 - (e - 2)}{(e - 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e - 2}{(e - 1)^2}x + \frac{1}{(e - 1)^2}$$

- c) (1 punto) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.**

Calculamos primero $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x} \stackrel{L'Hôpital}{=} 0$$

Calculamos ahora $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} \stackrel{L'Hôpital}{=} 0$$

3. (2 puntos) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ y la función $g(x) = \ln(x)$

- a) Pruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $(0, 1)$.
- b) Pruebe que la función $f(x)$ tiene al menos un valor positivo donde toma altura $y = 3$ por Bolzano.
- c) Pruebe que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen al menos un punto de intersección.
- d) Compruebe si se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle para la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 1]$ y, en caso afirmativo, halle el punto $c \in (-2, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

Solución

- a) Pruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $(0, 1)$.

El teorema de Bolzano enuncia que dada una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces,

$$\exists c \in (a, b), f(c) = 0$$

Para la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$, se trata de una función continua en $\mathbb{R}$ al tratarse de una función polinómica. Por lo tanto, en el intervalo cerrado $[0, +1]$ es continua. Además,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1 > 0 \\ f(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1 < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(0) \cdot f(1) < 0$$

En ese caso, la función $f(x)$ cumple con las condiciones del teorema de Bolzano y, en virtud del este, concluimos que existe al menos una solución real para la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $(0, 1)$.

$$\exists c \in (0, 1) \text{ tal que } f(c) = 0$$

- b) Pruebe que la función $f(x)$ tiene al menos un valor positivo donde toma altura $y = 3$ por Bolzano.

Consideramos la función auxiliar

$$h(x) = x^3 - 3x + 1 - 3 \Leftrightarrow h(x) = x^3 - 3x - 2$$

Se trata de una función continua en $\mathbb{R}$ al tratarse de una función polinómica. Por lo tanto, en el intervalo cerrado $[0, +3]$ es continua. Además,

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^3 - 3 \cdot 0 - 2 = -2 < 0 \\ f(3) &= 3^3 - 3 \cdot 1 - 2 = 9 - 3 - 2 = 4 > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(0) \cdot f(3) < 0$$

En ese caso, la función $h(x)$ cumple con las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, +3]$. Se trata de una función continua en $\mathbb{R}$ al tratarse de una función polinómica. Por lo tanto, en el intervalo cerrado $[0, +3]$ es continua. Además,

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 - 2 = -2 < 0 \quad y \quad f(3) = 3^3 - 3 \cdot 1 - 2 = 9 - 3 - 2 = 4 > 0$$

y, en virtud del este, concluimos que existe al menos una solución real para la ecuación $h(x) = 0$ en el intervalo $(0,3)$.

$$\exists c \in (0,3) \text{ tal que } h(c) = 0$$

Pero eso significa que existe al menos un valor donde $f(x)$ alcanza la altura $y = 3$ ya que,

$$\exists c \in (0,3) \text{ tal que } h(c) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in (0,3) \text{ tal que } f(c) - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists c \in (0,3) \text{ tal que } f(c) = 3$$

c) Pruebe que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen al menos un punto de intersección.

Un punto de intersección entre $f(x)$ y $g(x)$ es un valor x donde $f(x) = g(x)$, es decir,

$$x^3 - 3x + 1 = \ln(x).$$

Definimos la función auxiliar,

$$H(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 3x + 1 - \ln(x)$$

en el dominio de $g(x)$, que es $(0, +\infty)$.

En estas condiciones $H(x)$ es continua en $(0, +\infty)$ por ser la resta de un polinomio y la función logaritmo sobre un polinomio.

Evaluamos las imágenes de los valores extremos $x = 1$ y $x = e$:

- $H(1) = 1^3 - 3(1) + 1 - \ln(1) = -1 - 0 = -1 < 0$
- $H(e) = e^3 - 3e + 1 - \ln(e) = e^3 - 3e + 1 - 1 = e \cdot (e^2 - 3) > 0$

Por lo tanto, $H(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[1, e]$ y $H(1) \cdot H(e) < 0$. Al cumplir las condiciones del teorema de Bolzano podemos asegurar que existe al menos un punto $d \in (1, e)$ tal que $H(d) = 0$. En ese caso,

$$\exists d \in (1, e) \text{ tal que } f(d) - g(d) = 0 \Leftrightarrow \exists d \in (1, e) \text{ tal que } f(d) = g(d)$$

Por tanto, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen al menos un punto de intersección.

d) Compruebe si se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle para la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 1]$ y, en caso afirmativo, halle el punto $c \in (-2, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

El teorema de Rolle dice que dada una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$ entonces,

$$\exists c \in (a, b) , \quad f'(c) = 0$$

Para la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$, se trata de una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ al tratarse de una función polinómica. Por lo tanto, en el intervalo cerrado $[-2, +1]$ es continua y en el intervalo $(-2, +1)$ es derivable.

Estudiamos ahora si se da la Igualdad de los valores en los extremos del intervalo $[-2, +1]$.

- Calculamos $f(-2)$:

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -8 + 6 + 1 = -1$$

- Calculamos $f(1)$:

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$

Por tanto, se verifica que $f(-2) = f(1) = -1$.

En ese caso, concluimos que se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle y, en tal caso,

$$\exists c \in (-2, +1) , f'(c) = 0$$

Calculamos ahora el valor $c \in (-2, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Para ello, derivamos la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

Al igualar a cero a la derivada, obtenemos el valor $x = c$

$$3c^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3c^2 = 3 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

Como el valor debe pertenecer al intervalo $(-2, 1)$, el valor del Teorema de Rolle es $c = -1$.

4. a) (0,5 + 0,75 puntos) Calcule los siguientes límites:

$$a1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} \quad a2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

b) (0,75 puntos) Determine el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-1} \right)^x = e^3$$

Solución

a) (0,5 + 0,75 puntos) Calcule los siguientes límites:

$$a1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$$

Resolvemos clasificando la indeterminación y aplicando sucesivamente la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} =$$

$$\begin{aligned} & \frac{0}{0} \\ & \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = 2 \end{aligned}$$

$$a2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Como,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{1+\sin x} = 1 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Entonces, nos hallamos ante una indeterminación 1^∞ a la que le vamos a aplicar el resultado,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} \stackrel{1^\infty}{=} e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot (f(x)-1)}$$

En ese caso,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \stackrel{1^\infty}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{1+x}{1+\sin x} - 1 \right)} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{1+x-1-\sin x}{1+\sin x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x^2 \cdot (1+\sin x)}}$$

Calculamos el límite del exponente,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x^2 \cdot (1+\sin x)} & \stackrel{0/0}{=} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{2x \cdot (1+\sin x) + x^2 \cos x} \stackrel{0/0}{=} \stackrel{L'Hôpital}{=} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cdot (1+\sin x) + 2x \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - x^2 \sin x} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{x^2}} \stackrel{1^\infty}{=} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x^2 \cdot (1+\sin x)}} = e^0 = 1$$

b) (0,75 puntos) Determine el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-1} \right)^x = e^3$$

Como,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+a}{x-1} = 1 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$$

Entonces, nos hallamos ante una indeterminación 1^∞ a la que le vamos a aplicar el resultado,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} \stackrel{1^\infty}{=} e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot (f(x)-1)}$$

En ese caso,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x-1} \right)^x &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{x-a}{x-1} - 1 \right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{x-a-x+1}{x-1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\frac{a+1}{x-1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(a+1)}{x-1}}\end{aligned}$$

Calculamos el límite del exponente,

- Si $a = -1$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(a+1)}{x-1} = 0$$

Cosa que, por el resultado que debe dar el límite, no puede ser.

- Si $a \neq -1$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (a+1)}{x-1} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot (a+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a+1)}{1} = a+1$$

Por lo tanto, si el resultado del límite es e^3 entonces,

$$a+1 = 3 \Leftrightarrow a = 2$$

5. (2 puntos) Se considera la función real de variable real $f(x) = \ln(2x^3 - 9x^2 + 12x - 4)$.

- Determine el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como sus extremos relativos (máximos y mínimos).
- Calcule el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es nula. En ese punto calcule la ecuación de la recta normal a dicha función.

Solución

- Determine el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como sus extremos relativos (máximos y mínimos).

La función logaritmo neperiano solo está definida para argumentos estrictamente positivos:

$$2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 > 0$$

Factorizamos el polinomio $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$. Para ello, dividimos por Ruffini entre $(x - 2)$:

	+2	-9	+12	-4
+2		+4	-10	+4
	+2	-5	+2	0

Por tanto,

$$2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = (x - 2)(2x^2 - 5x + 2)$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado $2x^2 - 5x + 2 = 0$:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1/2 \end{cases}$$

Por tanto, la factorización es:

$$P(x) = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 2)^2$$

Estudiamos el signo de $P(x)$:

Intervalo/semirrecta	<i>Signo</i> $\left[2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 2)^2 \right]$	¿Es del dominio?
$\left(-\infty, \frac{1}{2} \right)$	$(+) \cdot (-) \cdot (+) = (-)$	No
$\left(\frac{1}{2}, 2 \right)$	$(+) \cdot (+) \cdot (+) = (+)$	Sí
$(2, +\infty)$	$(+) \cdot (-) \cdot (+) = (+)$	Sí

Por lo tanto, el dominio de la función es $Dom(f) = \left(\frac{1}{2}, 2 \right) \cup (2, +\infty)$

Estudiamos ahora las asíntotas de la función,

- **Asíntotas Verticales:** Estudiamos las fronteras del dominio ($x = 1/2$ y $x = 2$):

En $x = 1/2$:

$$\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} \ln(2x^3 - 9x^2 + 12x - 4) = \ln(0^+) = -\infty$$

Por lo tanto, $x = \frac{1}{2}$ es una asíntota vertical.

En $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \ln(2x^3 - 9x^2 + 12x - 4) = \ln(0^+) = -\infty$$

En ese caso, $x = 2$ es una asíntota vertical.

- **Asíntotas Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x^3 - 9x^2 + 12x - 4) = \ln(+\infty) = +\infty$$

Concluimos entonces que no hay asíntotas horizontales.

- **Asíntotas Oblicuas:** ($y = mx + n$)

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x^3 - 9x^2 + 12x - 4)}{x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 18x + 12}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 18x + 12}{1} = 0$$

Como $m = 0$, tampoco hay asíntotas oblicuas.

Estudiamos ahora la monotonía (crecimiento/decrecimiento) y extremos relativos

Calculamos la primera derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 18x + 12}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4} = \frac{6(x^2 - 3x + 2)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)^2} = \frac{6(x - 1)(x - 2)}{2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)^2}$$

Simplificando el factor $(x - 2)$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$:

$$f'(x) = \frac{3(x - 1)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)}$$

Buscamos los puntos críticos igualando $f'(x) = 0$:

$$3(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \in \text{Dom}(f)$$

Analizamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos del dominio:

Intervalo/semirrecta	Signo $\left[\frac{3(x - 1)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2)} \right]$	La función $f(x)$ es,
$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	$\frac{(+)(-)}{(+)(-)} = (+)$	Creciente
$(1, 2)$	$\frac{(+)(+)}{(+)(-)} = (-)$	Decreciente
$(2, +\infty)$	$\frac{(+)(+)}{(+)(+)} = (+)$	Creciente

Por lo tanto,

- La función $f(x)$ crece para $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, +\infty)$
- La función $f(x)$ decrece para $x \in (1, 2)$
- En $x = 1$, la función pasa de crecer a decrecer, luego hay un Máximo Relativo.

$$f(1) = \ln(2(1)^3 - 9(1)^2 + 12(1) - 4) = \ln(1) = 0$$

Hay un Máximo relativo en $(1, 0)$

- En $x = 2$, la función no está definida (hay una asíntota vertical), por lo que no hay mínimo relativo en esa frontera.

- b) Calcule el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es nula. En ese punto calcule la ecuación de la recta normal a dicha función.**

La pendiente de la recta tangente en un punto x viene dada por la función derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 18x + 12}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4}$$

Para hallar el mínimo de $f(x)$ en el intervalo donde alcanza un valor mínimo local (su concavidad/curvatura), buscamos los puntos críticos de $f(x)$ igualando su derivada a cero,

$$\frac{6x^2 - 18x + 12}{2x^3 - 9x^2 + 12x - 4} = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Sabemos que en $x = 1$ hay un máximo relativo. En ese caso, la recta tangente en ese punto $(1,0)$ es,

$$y - 0 = 0 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = 0$$

Y la recta normal en ese punto es,

$$x = 1$$