

Nombre y apellidos:

1. Considere las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Resuelva:

a) (1,5 puntos) Calcule algebraicamente la matriz X en la ecuación matricial $AXB = A + B$.

b) (1 punto) Calcule el determinante $|C \cdot 2B|$, siendo $C = 2(A^{-1})^t$.

2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Responda argumentando su razonamiento y calculando algebraicamente,

a) (1 punto) Calcule la matriz C tal que $(I + 2C^t)^{-1} = A$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

b) (1,5 puntos) Calcule, si es posible, la matriz D tal que $D^t = \frac{B^t B}{|BB^t|}$ y determina algebraicamente $Rg(D)$.

3. **(1,5 puntos)** Sea A una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es $\det(A) = 2$. Calcule, indicando las propiedades que se utilicen en cada caso, los valores de los siguientes determinantes:

a) $|3A|$

b) $\det(A^{-1} \cdot A^t)$

c) $\det(2A \cdot (3A)^{-1})$

4. **(1,5 puntos)** Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 4$, calcula, utilizando las propiedades de los determinantes y sin desarrollarlos directamente, el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} r & p & q \\ c-z & a-x & b-y \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2(b+2q) & 2p+a & c+2r \\ 6q & 3p & 3r \\ 2y & x & z \end{vmatrix}$

5. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro real k :

a) (1 punto) Estudia el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro k .

b) (1 punto) Para $k = 2$, calcula la matriz inversa A^{-1} y resuelve algebraicamente la ecuación matricial $A \cdot X + B = 2A$, siendo $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

SOLUCIONES DESARROLLADAS A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS

1. Considere las siguientes matrices $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

Resuelva:**a) (1,5 puntos) Calcule algebraicamente la matriz X en la ecuación matricial $AXB = A + B$.****b) (1 punto) Calcule el determinante $|C \cdot 2B|$, siendo $C = 2(A^{-1})^t$.****Solución****a) (1,5 puntos) Calcule algebraicamente la matriz X en la ecuación matricial $AXB = A + B$.**

Dadas las matrices A y B vemos primero si tienen matriz inversa, calculando su determinante y comprobando si es nulo o no. En caso de ser no nulo existirá su correspondiente matriz inversa.

En el caso de la matriz A su determinante es,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{9}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1 + 12 + 12 - 9 - 4 - 4}{8} = \frac{8}{8} = 1 \neq 0$$

Por lo tanto, la matriz A tiene matriz inversa A^{-1} .

En el caso de la matriz B su determinante es,

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \neq 0$$

Por lo tanto, la matriz B tiene matriz inversa B^{-1} .

En estas condiciones, dada la ecuación matricial:

$$A \cdot X \cdot B = A + B$$

Podemos despejar la matriz X , aplicando las matrices inversas de A y B . Multiplicamos por la izquierda por A^{-1} y por la derecha por B^{-1} en ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot (A \cdot X \cdot B) \cdot B^{-1} &= A^{-1} \cdot (A + B) \cdot B^{-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X \cdot (B \cdot B^{-1}) &= A^{-1} \cdot (A + B) \cdot B^{-1} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Como la matriz inversa Y^{-1} a una dada Y es la única matriz que cumple

$$Y \cdot Y^{-1} = Y^{-1} \cdot Y = I$$

Con I la matriz unidad del mismo orden que la matriz Y , entonces,

$$\Leftrightarrow I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot (A + B) \cdot B^{-1} \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot (A + B) \cdot B^{-1}$$

Observamos también, en la segunda parte de la igualdad que, por la propiedad distributiva de la multiplicación de matrices,

Procedemos calcular las matrices inversas de A y B ,

- **Comenzamos calculando la matriz B^{-1}** , según la fórmula,

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^t)}{|B|}$$

La matriz traspuesta de B es la propia matriz B , ya que es diagonal,

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = B$$

La matriz adjunta de la matriz traspuesta de B es,

$$\text{Adj}(B^t) = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Dividimos ahora por el determinante de la matriz B , obteniendo la matriz inversa B^{-1}

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{\text{Adj}(B^t)}{|B|} = \frac{1}{(1/8)} \cdot \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \\ &= 8 \cdot \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **Calculamos la matriz A^{-1}** , según la fórmula,

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|}$$

Para mejorar el cálculo, expresaremos a la matriz A según,

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot M$$

En ese caso,

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{2} \cdot M \right)^{-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} \cdot M^{-1} = 2 \cdot M^{-1}$$

La matriz traspuesta de M es ella misma porque es simétrica,

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de la matriz traspuesta de M es,

$$\text{Adj}(M^t) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de M es,

$$|M| = 1 + 12 + 12 - 9 - 4 - 4 = 8$$

Dividimos ahora por el determinante de la matriz M , obteniendo la matriz inversa A^{-1}

$$\begin{aligned} A^{-1} &= 2 \cdot \frac{\text{Adj}(M^t)}{|M|} = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 & 4/4 & 1/4 \\ 4/4 & -8/4 & 4/4 \\ 1/4 & 4/4 & -3/4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/4 & 1 & -3/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sumamos ahora $A + B$,

$$A + B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3/2 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X que nos han pedido,

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -3/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1/4 & 1 & -3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 3/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3/2 & 1 & 3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/16 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 13/16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1 & 13/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) (1 punto) Calcule el determinante $|C \cdot 2B|$, siendo $C = 2(A^{-1})^t$.

Como,

$$|C \cdot 2B| = |C| \cdot |2B|$$

Calculamos $|C|$:

$$|C| = |2(A^{-1})^t| = 2^3 \cdot |(A^{-1})^t| = 8 \cdot |A^{-1}| = 8 \cdot \frac{1}{|A|}$$

Entonces, como $|A| = 1$, tendremos que,

$$|C| = 8 \cdot \frac{1}{1} = 8$$

Calculamos ahora $|2B|$. Como, $|B| = \frac{1}{8}$, entonces,

$$|2B| = 2^3 \cdot |B| = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1$$

Y concluimos que,

$$|C \cdot 2B| = |C| \cdot |2B| = 8 \cdot 1 = 8$$

2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Responda argumentando su razonamiento y calculando algebraicamente,

a) (1 punto) Calcule la matriz C tal que $(I + 2C^t)^{-1} = A$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

b) (1,5 puntos) Calcule, si es posible, la matriz D tal que $D^t = \frac{B^t B}{|BB^t|}$ y determina algebraicamente $Rg(D)$.

Solución

a) (1 punto) Calcule la matriz C tal que $(I + 2C^t)^{-1} = A$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

Dada la ecuación matricial:

$$(I + 2C^t)^{-1} = A$$

La matriz A tiene matriz inversa ya que,

$$|A| = (-1) \cdot 5 - (-1) \cdot 4 = -5 + 4 = -1 \neq 0$$

En ese caso, si invertimos cada miembro de la igualdad, se sigue manteniendo la igualdad.

$$I + 2C^t = A^{-1}$$

Ahora, despejamos la matriz C del siguiente modo,

$$I + 2C^t = A^{-1} \Leftrightarrow 2C^t = A^{-1} - I \Leftrightarrow C^t = \frac{1}{2} \cdot (A^{-1} - I) \Leftrightarrow$$

Si trasponemos ambos lados de la igualdad, tendremos una expresión para la matriz C ,

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{2} \cdot (A^{-1} - I)^t$$

Para hacer estas operaciones y calcular la matriz C , procedemos ahora a calcular A^{-1} según la fórmula,

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|}$$

La matriz traspuesta de A es,

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de la matriz traspuesta es,

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Dividimos ahora por el determinante de la matriz A , obteniendo la matriz inversa A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la matriz C según,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \cdot (A^{-1} - I)^t = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^t = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) (1,5 puntos) Calcule, si es posible, la matriz D tal que $D^t = \frac{B^t B}{|BB^t|}$ y determina algebraicamente $Rg(D)$.**

Como

$$D^t = \frac{B^t B}{|BB^t|}$$

Comenzamos calculando $B^t B$,

$$B^t B = (1 \quad -1 \quad 1)^t \cdot (1 \quad -1 \quad 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad -1 \quad 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, el determinante de $B \cdot B^t$ es,

$$B \cdot B^t = (1 \quad -1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1) + (-1) \cdot (-1) + (1 \cdot 1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Por lo tanto, la matriz D^t es,

$$D^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Y en conclusión, la matriz D es,

$$D = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos el rango de D . Observamos que

$$F_2 = -1 \cdot F_1$$

$$F_3 = F_1$$

Con solo una de las anteriores condiciones que cumple la matriz D , podemos concluir que,

$$Rg(D) = 1$$

3. (1,5 puntos) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es $|A| = 2$. Calcule, indicando las propiedades que se utilicen en cada caso, los valores de los siguientes determinantes:

a) $|3A|$

b) $\det(A^{-1} \cdot A^t)$

c) $\det(2A \cdot (3A)^{-1})$

Solución

a) $|3A|$

Como la matriz $3A$ tiene todos los elementos multiplicados por 3 entonces, al extraer factor común de cada fila obtenemos que,

$$|3A| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot |A| = 27 \cdot |A|$$

Como $|A| = 2$ entonces,

$$|3A| = 27 \cdot |A| = 27 \cdot 2 = \mathbf{54}$$

b) $\det(A^{-1} \cdot A^t)$

Como el determinante de A^{-1} es,

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Entonces,

$$|A^{-1}| = \frac{1}{2}$$

Como el determinante de A^t cumple que,

$$|A^t| = |A|$$

Entonces,

$$|A^t| = 2$$

Por tanto,

$$\det(A^{-1} \cdot A^t) = |A^{-1} \cdot A^t| = \frac{1}{|A|} \cdot |A| = \frac{1}{2} \cdot 2 = \mathbf{1}$$

c) $\det(2A \cdot (3A)^{-1})$

Sabemos que,

$$\det(2A \cdot (3A)^{-1}) = |2A \cdot (3A)^{-1}| = |2A| \cdot |(3A)^{-1}|$$

Como la matriz $2A$ tiene todos los elementos multiplicados por 2 entonces, al extraer factor común de cada fila obtenemos que,

$$|2A| = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot |A| = 8 \cdot |A| = 8 \cdot 2 = 16$$

Como la matriz $3A$ tiene todos los elementos multiplicados por 2 entonces, al extraer factor común de cada fila obtenemos que,

$$|3A| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot |A| = 27 \cdot |A| = 27 \cdot 2 = 54$$

Como el determinante de $(3A)^{-1}$ es,

$$|(3A)^{-1}| = \frac{1}{|3A|}$$

Entonces,

$$|(3A)^{-1}| = \frac{1}{27 \cdot |A|} = \frac{1}{27 \cdot 2} = \frac{1}{54}$$

En tal caso,

$$\det(2A \cdot (3A)^{-1}) = |2A| \cdot |(3A)^{-1}| = 16 \cdot \frac{1}{54} = \frac{16}{54} = \frac{8}{27}$$

4. (1,5 puntos) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 4$, calcula, utilizando las propiedades de los determinantes y sin desarrollarlos directamente, el valor de los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} r & p & q \\ c-z & a-x & b-y \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2(b+2q) & 2p+a & c+2r \\ 6q & 3p & 3r \\ 2y & x & z \end{vmatrix}$

Solución

a) $\begin{vmatrix} r & p & q \\ c-z & a-x & b-y \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$

- Extraemos el factor común 3 en una tercera fila:

$$\begin{vmatrix} r & p & q \\ c-z & a-x & b-y \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} r & p & q \\ c-z & a-x & b-y \\ c & a & b \end{vmatrix} =$$

- Descomponemos por linealidad en la segunda fila el determinante en dos determinantes:

$$= 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} r & p & q \\ c & a & b \\ c & a & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r & p & q \\ z & x & y \\ c & a & b \end{vmatrix} \right) =$$

- Como el primer determinante tiene dos filas iguales, la segunda y la tercera, su determinante es cero,

$$= 3 \cdot \left(0 - \begin{vmatrix} r & p & q \\ z & x & y \\ c & a & b \end{vmatrix} \right) = -3 \cdot \begin{vmatrix} r & p & q \\ z & x & y \\ c & a & b \end{vmatrix} =$$

- Procedemos a reordenar las filas y columnas:

- Intercambiamos la fila 1 y la fila 3, cambiando el signo del determinante,

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} r & p & q \\ z & x & y \\ c & a & b \end{vmatrix} = +3 \cdot \begin{vmatrix} c & a & b \\ z & x & y \\ r & p & q \end{vmatrix} =$$

- Intercambiamos la columna 1 con la columna 2, cambiando el signo del determinante,

$$= +3 \cdot \begin{vmatrix} c & a & b \\ z & x & y \\ r & p & q \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} =$$

- Intercambiamos la columna 2 con la columna 3, cambiando el signo del determinante,

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} = +3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 4$ concluimos que,

$$\begin{vmatrix} r & p & q \\ c-z & a-x & b-y \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 = 12$$

b) $\begin{vmatrix} 2(b+2q) & 2p+a & c+2r \\ 6q & 3p & 3r \\ 2y & x & z \end{vmatrix}$

- Extraemos el factor común 3 en una segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 2b+4q & 2p+a & c+2r \\ 6q & 3p & 3r \\ 2y & x & z \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2b+4q & 2p+a & c+2r \\ 2q & p & r \\ 2y & x & z \end{vmatrix} =$$

- Descomponemos por linealidad en la primera fila el determinante en dos determinantes:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 2b+4q & 2p+a & c+2r \\ 2q & p & r \\ 2y & x & z \end{vmatrix} = 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} 2b & a & c \\ 2q & p & r \\ 2y & x & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4q & 2p & 2r \\ 2q & p & r \\ 2y & x & z \end{vmatrix} \right) =$$

- Como en el segundo determinante hay dos filas proporcionales, $F_1 = 2 \cdot F_2$, dicho determinante es cero,

$$= 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} 2b & a & c \\ 2q & p & r \\ 2y & x & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4q & 2p & 2r \\ 2q & p & r \\ 2y & x & z \end{vmatrix} \right) = 3 \cdot \left(\begin{vmatrix} 2b & a & c \\ 2q & p & r \\ 2y & x & z \end{vmatrix} + 0 \right) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2b & a & c \\ 2q & p & r \\ 2y & x & z \end{vmatrix} =$$

- Extraemos el factor común 2 en una primera columna:

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 2b & a & c \\ 2q & p & r \\ 2y & x & z \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ q & p & r \\ y & x & z \end{vmatrix}$$

- Procedemos a reordenar las filas y columnas:

- Intercambiamos la fila 2 y la fila 3,

$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ \textcolor{red}{q} & \textcolor{red}{p} & \textcolor{red}{r} \\ \textcolor{red}{y} & \textcolor{red}{x} & \textcolor{red}{z} \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} b & a & c \\ \textcolor{red}{y} & \textcolor{red}{x} & \textcolor{red}{z} \\ \textcolor{red}{q} & \textcolor{red}{p} & \textcolor{red}{r} \end{vmatrix} =$$

- Intercambiamos la columna 1 con la columna 2,

$$= -6 \cdot \begin{vmatrix} \textcolor{green}{b} & \textcolor{green}{a} & c \\ \textcolor{green}{y} & \textcolor{green}{x} & z \\ \textcolor{green}{q} & \textcolor{green}{p} & r \end{vmatrix} = +6 \cdot \begin{vmatrix} \textcolor{green}{a} & \textcolor{green}{b} & c \\ \textcolor{green}{x} & \textcolor{green}{y} & z \\ \textcolor{green}{p} & \textcolor{green}{q} & r \end{vmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 4$ concluimos que,

$$\begin{vmatrix} 2b + 6q & 2p + a & c + 2r \\ 6y & 3p & 3r \\ 2y & x & z \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 = 24$$

5. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro real k :

a) (1 punto) Estudia el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro k .

b) (1 punto) Para $k = 2$, calcula la matriz inversa A^{-1} y resuelve la ecuación matricial

$$A \cdot X + B = 2A, \text{ siendo } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución

a) (1 punto) Estudia el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro k .

Calculamos el determinante de la matriz A por Sarrus,

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2$$

Igualamos a cero el determinante y calculamos sus raíces,

$$|A| = 0 \Leftrightarrow k^3 - 3k + 2 = 0$$

Aplicamos Ruffini, probando con los divisores del término independiente (-2) y obtenemos que para $k = 1$ hay una raíz (resto cero).

$$\begin{array}{r|rrrr} & +1 & 0 & -3 & +2 \\ +1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & +1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Resolvemos ahora la ecuación que resulta de igualar a cero el resto de la división por Ruffini,

$$k^2 + k - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = \frac{-1+3}{2} = +1 \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Así pues, la expresión factorizada del determinante es:

$$|A| = (k - 1)^2(k + 2)$$

Estudiamos ahora $Rg(A)$ por casos,

- Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, entonces $|A| \neq 0$ por lo que la matriz tiene rango máximo. Así, $rango(A) = 3$.
- Si $k = 1$, Sustituimos $k = 1$ en la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como las tres filas son idénticas, $Rg(A) = 1$.

- Si $k = -2$: Sustituimos $k = -2$ en la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de A se anula, $|A| = 0$, el rango no puede ser 3. Buscamos un menor de orden 2 no nulo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

Al encontrar un menor de orden 2 con determinante distinto de cero, concluimos que $Rg(A) = 2$

En conclusión,

- Si $k \neq 1$ y $k \neq -2$, entonces $Rg(A) = 3$.
- Si $k = +1$, entonces $Rg(A) = 1$.
- Si $k = -2$, entonces $Rg(A) = 2$.

b) (1 punto) Para $k = 2$, calcula la matriz inversa A^{-1} y resuelve la ecuación matricial

$$A \cdot X + B = 2A, \text{ siendo } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sustituimos $k = 2$ en la matriz A :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante de la matriz A para saber si existe la matriz inversa,

$$|A| = 8 + 1 + 1 - 2 - 2 - 2 = 10 - 6 = 4 \neq 0$$

Como $|A| \neq 0$, entonces existe A^{-1} . Calculamos dicha matriz mediante la fórmula

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|}$$

La matriz traspuesta de A es igual a la propia matriz A

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

Calculamos ahora la matriz adjunta de la matriz traspuesta de la matriz A ,

$$\text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} (4-1) & -(2-1) & (1-2) \\ -(2-1) & (4-1) & -(2-1) \\ -(1-2) & -(2-1) & (4-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dividimos ahora a la matriz $\text{Adj}(A^t)$ entre el determinante de A , obteniendo la matriz inversa de A ,

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Ahora resolvemos la ecuación matricial $A \cdot X + B = 2A$:

- Despejamos el término que contiene a X :

$$A \cdot X = 2A - B$$

- Multiplicamos por la izquierda por A^{-1} :

$$X = A^{-1} \cdot (2A - B)$$

Operamos, según indica el despeje de la matriz X para hallar la propia matriz X :

- Calculamos primero la matriz $2A - B$:

$$2A - B = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Multiplicamos A^{-1} por esta matriz resultante y llegamos a la matriz X pedida:

$$X = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE