lawebdelprofedemates.es

CUADERNO DE TRABAJO Nº 1

Análisis y enfoques NS
Matemáticas I y II

Entrega límite **JUEVES, 08 de OCTUBRE de 2026 (hora de inicio de clase)**

NOMBRE: _____

APELLIDOS:_____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 11 puntos.
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$Nota\ def. = \ Notal\ total/(Días\ de\ retraso + 1)$$

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.3)**

1. Pruebe que $(3n+2)^2-(3n-2)^2$ es múltiplo de 12 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ por inducción.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P2, Ej.9)**

2. La suma de los primeros términos de una progresión geométrica viene dada por,

$$S_n = \sum_{r=0}^{n-1} 5 \cdot (\log_2 c)^r$$

(a) (0,25 puntos) Sabiendo que S_n es convergente, halle el rango de valores posibles para c.

(b) (0,5 puntos) Para el caso en el que $c = 1{,}5$, halle el menor valor de n para el que se cumple que

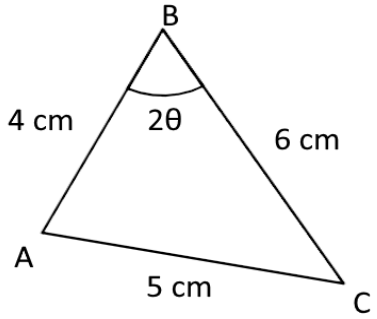
$$|S_\infty - S_n| < 0{,}1$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.4)**

3. La siguiente figura muestra el triángulo ABC, donde $\mathbf{AB = 4cm}$, $\mathbf{BC = 6\ cm}$, $\mathbf{AC = 5\ cm}$ y $\mathbf{\widehat{ABC} = 2\theta}$.



Halle el valor exacto de $\cos\theta$ dando la respuesta en la forma $\frac{p\sqrt{2}}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}^+$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 1,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P2, Ej.12)**

4. La curva C tiene por ecuación $y = \frac{2x^2+6x-3}{x+k}$, $x \in \mathbb{R}, x \neq -k$, donde k es una constante positiva.

(a) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+4kx+6k+3}{(x+k)^2}$

(b) (0,25 puntos) Halle el valor más pequeño de k para el cual existe un mínimo local o un máximo local.

Considere la curva C para el caso $k = 2$.

(c) (0,25 puntos) Escriba la ecuación de su asíntota vertical.

(d) (0,25 puntos) Halle la ecuación de la asíntota oblicua.

(e) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} > 2$, para $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$.

(f) (0,5 puntos) Dibuje aproximadamente la curva C, mostrando claramente las dos asíntotas y el comportamiento general de C cuando se va acercando a cada una de las asíntotas.

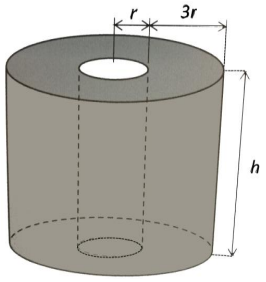
LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2,25 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.10)**

5. Considere un cilindro de radio $4r$ y de altura h. Se extrae del centro un cilindro más pequeño de radio r, para formar así un cilindro hueco. Toda esta información se representa en la siguiente figura en la que todas las longitudes están en centímetros y la figura no está dibujada a escala.



El área total de la superficie del cilindro hueco, en cm^2, viene dada por S.

El volumen del cilindro hueco, en cm^3, viene dada por V.

(a) (0,5 puntos) Muestre que $S = 30\pi r^2 + 10\pi rh$.

(b) (0,5 puntos) El área total de la superficie del cilindro hueco es igual a $240\pi\ cm^2$. Muestre que

$$V = 360\pi r - 45\pi r^3$$

(c) (0,25 puntos) Halle una expresión algebraica para $\frac{dV}{dr}$.

El cilindro hueco alcanza un volumen máximo cuando $r = p \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ donde $p \in \mathbb{Z}^+$.

(d) (0,5 puntos) Hallar el valor de p.

(e) (0,5 puntos) A partir de lo anterior, halle este volumen máximo. Dé su respuesta en la forma $q \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, donde $q \in \mathbb{Z}^+$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.11)**

6. Una curva viene dada por la ecuación $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) (0,25 puntos) Aplicando la regla de L´Hôpital, calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right)^x$$

(b) (i) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

(ii) (0,25 puntos) A partir de lo anterior, muestre que $1 - y^2 = \frac{dy}{dx}$.

(c) (i) ((0,25 puntos) Utilizando la derivación implícita sobre el resultado de (b) muestre que,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2y.$$

(ii) (0,25 puntos) A partir de lo anterior, halle una expresión para $\frac{d^3y}{dx^3}$ en función de y.

(d) (0,75 puntos) Utilizando los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c), halle la serie de MacLaurin para $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ llegando hasta (e incluyendo) el término x^3.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2 puntos]

7. Dada la función $f(x)$ definida a trozos por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\ln(x)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto) Determine los valores de los parámetros reales a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en todo su dominio $\mathbb{R}$.

b) (0,5 puntos) Para los valores $a = 1$ y $b = -1$, estudie la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función $f(x)$.

c) (0,5 puntos) Para $a = 1$ y $b = -1$, halle la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = e$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2 puntos]

8. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 4x + 2$ y $g(x) = e^x - 3$:

a) **(0,5 puntos)** Pruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución real positiva.

b) **(0,5 puntos)** Pruebe que la función $f(x)$ toma el valor $y = 5$ para algún valor positivo de x.

c) **(0,5 puntos)** Pruebe que las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en al menos un punto del intervalo $(0,2)$.

d) **(0,5 puntos)** Compruebe si se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle para la función $f(x)$ en el intervalo $[-2,2]$. En caso afirmativo, halle el valor o valores de $c \in (-2,2)$ tales que $f'(c) = 0$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CUADERNO Nº 1

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.3)**

1. Pruebe que $(3n+2)^2-(3n-2)^2$ es múltiplo de 12 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ por inducción.

Queremos probar que la proposición $P(n)$: $(3n+2)^2-(3n-2)^2$ es múltiplo de 12 es verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

- Evaluamos la expresión para $n=1$:

$$(3(1)+2)^2-(3(1)-2)^2=(5)^2-(1)^2=25-1=24=12\cdot 2$$

Dado que el resultado es múltiplo de 12. Por lo tanto, la base inductiva $P(1)$ se cumple.

- **Hipótesis de inducción** Asumimos que la proposición es cierta para un entero $k \geq 1$, es decir, existe un entero $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que:

$$(3k+2)^2-(3k-2)^2=12m$$

Queremos probar que la proposición se cumple para $n=k+1$, es decir, que la expresión para $n=k+1$ también es múltiplo de 12. En ese caso, queremos probar que existe un entero $m´ \in \mathbb{Z}^+$ tal que:

$$(3\cdot(k+1)+2)^2-(3\cdot(k+1)-2)^2=12m´$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Operando, tenemos que,

$$(3\cdot(k+1)+2)^2-(3\cdot(k+1)-2)^2=(3k+3+2)^2-(3k+3-2)^2=$$
$$=[(3k+2)+3]^2-[(3k-2)+3]^2=$$
$$=(3k+2)^2+6\cdot(3k+2)+9-\ (3k-2)^2-6\cdot(3k-2)-9=$$
$$=(3k+2)^2+18k+12-\ (3k-2)^2-18k+12=(3k+2)^2-\ (3k-2)^2+24=$$

Como, por la hipótesis de inducción,

$$\exists\, m \in \mathbb{Z}^+\ ,\ \ (3k+2)^2-(3k-2)^2=12m$$

Entonces,

$$=(3k+2)^2-\ (3k-2)^2+12\cdot 2=12m+12\cdot 2=12\cdot(m+2)$$

Por lo tanto, tomando

$$m´ \in \mathbb{Z}^+, m´=m+2$$

Queda demostrado el caso $n=k+1$, es decir, que

$$\exists\, m´ \in \mathbb{Z}^+\ ,\ \ (3\cdot(k+1)+2)^2-(3\cdot(k+1)-2)^2=12m´$$

Habiendo demostrado el caso base $P(1)$ y el paso inductivo $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$, por el **Principio de Inducción Matemática**, la expresión $(3n+2)^2-(3n-2)^2$ es múltiplo de 12 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P2, Ej.9)**

2. La suma de los primeros términos de una progresión geométrica viene dada por,

$$S_n = \sum_{r=0}^{n-1} 5 \cdot (\log_2 c)^r$$

(a) (0,25 puntos) Sabiendo que S_n es convergente, halle el rango de valores posibles para c.

(b) (0,5 puntos) Para el caso en el que $c = 1{,}5$, halle el menor valor de n para el que se cumple que

$$|S_\infty - S_n| < 0{,}1$$

(a) (0,25 puntos) Sabiendo que S_n es convergente, halle el rango de valores posibles para c.

Para que una serie geométrica de la forma $\sum a_1 k^r$ sea convergente cuando $n \to \infty$, la condición necesaria y suficiente es que el valor absoluto de la razón sea menor que 1:

$$|k| < 1$$

Sustituyendo la razón $k = \log_2 c$:

$$|\log_2 c| < 1$$

Esto equivale a la doble desigualdad:

$$-1 < \log_2 c < 1$$

Aplicando la función exponencial en base 2 en todos los miembros (ya que 2^x es una función estrictamente creciente):

$$2^{-1} < c < 2^1$$

$$\frac{1}{2} < c < 2$$

Por lo tanto, el rango de valores posibles para c es el intervalo $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ o bien $0{,}5 < c < 2$.

(b) (0,5 puntos) Para el caso en el que $c = 1{,}5$, halle el menor valor de n para el que se cumple que

$$|S_\infty - S_n| < 0{,}1$$

Para $c = 1{,}5$, la suma de la serie geométrica es,

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{5}{1-\log_2(1{,}5)}$$

Mientras que la suma parcial de n términos (S_n) es,

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{5(1-(\log_2(1{,}5))^n)}{1-\log_2(1{,}5)} = \frac{5-5\cdot(\log_2(1{,}5))^n}{1-\log_2(1{,}5)}$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Calculamos $|S_\infty - S_n|$:

$$|S_\infty - S_n| = \left| \frac{5}{1-\log_2(1{,}5)} - \frac{5-5\cdot(\log_2(1{,}5))^n}{1-\log_2(1{,}5)} \right| =$$

$$= \left| \frac{5\cdot(\log_2(1{,}5))^n}{1-\log_2(1{,}5)} \right| = \frac{5\cdot(\log_2(1{,}5))^n}{1-\log_2(1{,}5)}$$

Resolvemos la desigualdad $|S_\infty - S_n| < 0{,}1$ como sigue,

$$\frac{5\cdot(\log_2(1{,}5))^n}{1-\log_2(1{,}5)} < 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad (\log_2(1{,}5))^n < \frac{0{,}1\cdot(1-\log_2(1{,}5))}{5} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0{,}5849625)^n < 0{,}00830075$$

Tomando logaritmos neperianos, calculamos la acotación para el valor natural n según,

$$n\cdot\ln(0{,}5849625) < \ln(0{,}00830075) \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(0{,}00830075)}{\ln(0{,}5849625)} \quad \Leftrightarrow$$

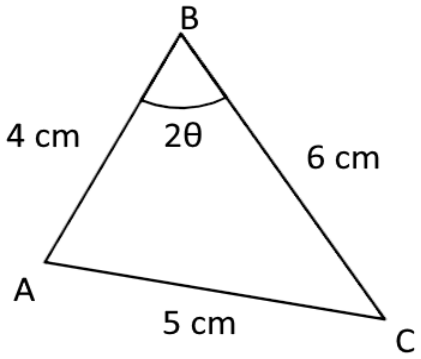
$$\Leftrightarrow \quad n > \frac{-4{,}79140}{-0{,}53618} \approx 8{,}936$$

Dado que n debe ser un entero positivo ($n \in \mathbb{Z}^+$), el menor entero que satisface $n > 8{,}936$ es $n = 9$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.4)**

3. La siguiente figura muestra el triángulo ABC, donde $\mathbf{AB = 4cm}$, $\mathbf{BC = 6\ cm}$, $\mathbf{AC = 5\ cm}$ y $\mathbf{\widehat{ABC} = 2\theta}$.



Halle el valor exacto de $\cos\theta$ dando la respuesta en la forma $\frac{p\sqrt{2}}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}^+$

Aplicamos el teorema del coseno con respecto al lado AC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(2\theta)$$

Sustituimos los valores dados:

$$5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos(2\theta) \quad \Leftrightarrow \quad 25 = 16 + 36 - 48\cos(2\theta) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 25 = 52 - 48\cos(2\theta)$$

Despejamos $\cos(2\theta)$:

$$48\cos(2\theta) = 52 - 25 \quad \Leftrightarrow \quad 48\cos(2\theta) = 27 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2\theta) = \frac{27}{48} \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2\theta) = \frac{9}{16}$$

En ese caso, aplicando la fórmula del coseno del ángulo doble obtenemos que,

$$\frac{9}{16} = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{16} = \cos^2(\theta) - (1 - \cos^2(\theta)) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{16} = 2 \cdot \cos^2(\theta) - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cos^2(\theta) = \frac{9}{16} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\cos^2(\theta) = \frac{25}{16} \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2(\theta) = \frac{25}{32}$$

Dado que θ es un ángulo agudo de un triángulo, $\cos(\theta) > 0$:

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{25}{32}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{32}} = \frac{5}{\sqrt{32}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{64}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{8}$$

Por lo tanto, $\mathbf{p = 5}$ y $\mathbf{q = 8}$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 1,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P2, Ej.12)**

4. La curva C tiene por ecuación $y = \frac{2x^2+6x-3}{x+k}$, $x \in \mathbb{R}, x \neq -k$, donde k es una constante positiva.

(a) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+4kx+6k+3}{(x+k)^2}$

(b) (0,25 puntos) Halle el valor más pequeño de k para el cual existe un mínimo local o un máximo local.

Considere la curva C para el caso $k = 2$.

(c) (0,25 puntos) Escriba la ecuación de su asíntota vertical.

(d) (0,25 puntos) Halle la ecuación de la asíntota oblicua.

(e) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} > 2$, para $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$.

(f) (0,5 puntos) Dibuje aproximadamente la curva C, mostrando claramente las dos asíntotas y el comportamiento general de C cuando se va acercando a cada una de las asíntotas.

(a) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+4kx+6k+3}{(x+k)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2x^2+6x-3}{x+k}\right)' = \frac{(4x+6)\cdot(x+k)-(2x^2+6x-3)\cdot 1}{(x+k)^2} =$$

$$= \frac{4x^2+6x+4kx+6k-2x^2-6x+3}{(x+k)^2} = \frac{2x^2+4kx+6k+3}{(x+k)^2}$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(b) (0,25 puntos) Halle el valor más pequeño de k para el cual existe un mínimo local o un máximo local.

Igualamos a cero a la derivada,

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2+4kx+6k+3}{(x+k)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2+4kx+6k+3 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-4k \pm \sqrt{(4k)^2 - 4\cdot 2\cdot(6k+3)}}{2\cdot 2} = \frac{-4k \pm \sqrt{16k^2-48k-24}}{4} =$$

$$= \frac{-4k \pm 2\cdot\sqrt{4k^2-12k-6}}{4} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2-12k-6}}{2}$$

Necesitamos que exista el máximo o mínimo por lo que debe existir la raíz cuadrada de la expresión anterior. Para ello, necesitamos que

$$4k^2-12k-6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2k^2-6k-3 \geq 0$$

Si resolvemos la ecuación $2k^2 - 6k - 3 = 0$ encontramos que,

$$2k^2 - 6k - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 + 24}}{4} =$$

$$= \frac{+6 \pm \sqrt{60}}{4} = \frac{6 \pm 2 \cdot \sqrt{15}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$$

Como la función cuadrática $f(x) = 2k^2 - 6k - 3$ es positiva para

$$k \in \left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{15}}{2} \right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{15}}{2}, +\infty \right)$$

Y se nos ha pedido el menor k positivo para el que hay máximo o mínimo, este se alcanza para

$$\boldsymbol{k = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}}$$

Considere la curva C para el caso $k = 2$.

(c) (0,25 puntos) Escriba la ecuación de su asíntota vertical.

Para $k = 2$ tendremos que la función es $y = \frac{2x^2+6x-3}{x+2}$. Por lo tanto, la asíntota vertical se calcula anulando al denominador. Así, dicha asíntota vertical es,

$$\boldsymbol{x = -2}$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(d) (0,25 puntos) Halle la ecuación de la asíntota oblicua.

La asíntota oblicua, al tratarse de una función racional, se puede calcular, determinando el cociente de la división del dividendo entre el divisor de dicha función racional,

	+2	+6	−3
−2		−4	−4
	+2	+2	−7

Por lo tanto, según la división por Ruffini, la asíntota oblicua es,

$$\boldsymbol{y = 2x + 2}$$

(e) (0,5 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} > 2$, para $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$.

Lo comprobamos,

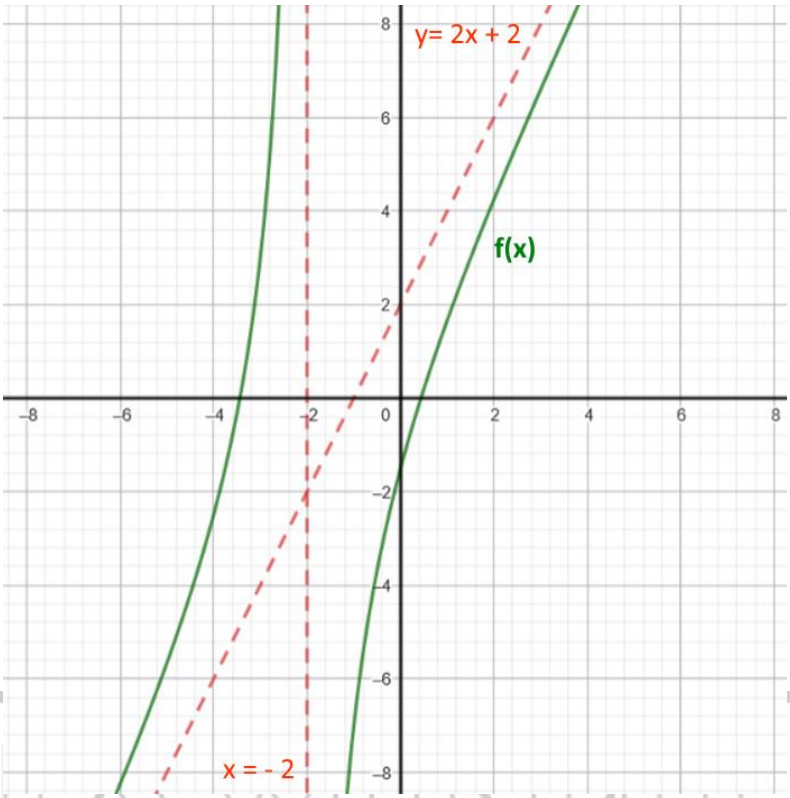
$$\frac{2x^2 + 8x + 15}{(x+2)^2} > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 8x + 15 > 2 \cdot (x+2)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 8x + 15 > 2 \cdot (x^2 + 4 + 4x) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 8x + 15 > 2x^2 + 8 + 8x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 15 > 8 \quad \Leftrightarrow \quad 7 > 0$$

Por lo tanto, es cierto que la derivada de la función se mantiene siempre, salvo el caso $x = -2$, mayor que 2.

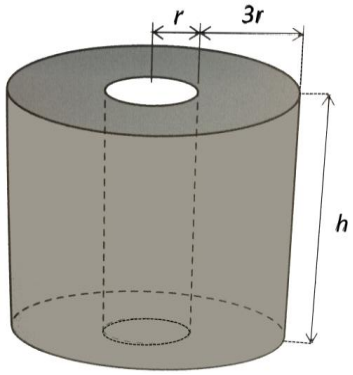
(f) (0,5 puntos) Dibuje aproximadamente la curva C, mostrando claramente las dos asíntotas y el comportamiento general de C cuando se va acercando a cada una de las asíntotas.



LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2,25 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.10)**

5. Considere un cilindro de radio $4r$ y de altura h. Se extrae del centro un cilindro más pequeño de radio r, para formar así un cilindro hueco. Toda esta información se representa en la siguiente figura en la que todas las longitudes están en centímetros y la figura no está dibujada a escala.



El área total de la superficie del cilindro hueco, en cm^2, viene dada por S.

El volumen del cilindro hueco, en cm^3, viene dada por V.

(a) (0,5 puntos) Muestre que $S = 30\pi r^2 + 10\pi rh$.

(b) (0,5 puntos) El área total de la superficie del cilindro hueco es igual a $240\pi\ cm^2$. Muestre que

$$V = 360\pi r - 45\pi r^3$$

(c) (0,25 puntos) Halle una expresión algebraica para $\frac{dV}{dr}$.

El cilindro hueco alcanza un volumen máximo cuando $r = p \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ donde $p \in \mathbb{Z}^+$.

(d) (0,5 puntos) Hallar el valor de p.

(e) (0,5 puntos) A partir de lo anterior, halle este volumen máximo. Dé su respuesta en la forma $q \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, donde $q \in \mathbb{Z}^+$.

(a) (0,5 puntos) Muestre que $S = 30\pi r^2 + 10\pi rh$.

La superficie de la figura viene dada por su superficie lateral exterior más la interior, que se puede calcular a partir de,

$$2 \cdot \pi \cdot (4r) \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 8\pi rh + 2\pi rh = 10\pi rh$$

Las dos bases, son coronas circulares cuyo área es,

$$2 \cdot (\pi \cdot (4r)^2 - \pi \cdot r^2) = 2 \cdot (16\pi^2 - \pi r^2) = 30\pi r^2$$

Concluimos que $\boldsymbol{S = 30\pi r^2 + 10\pi rh}$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(b) (0,5 puntos) El área total de la superficie del cilindro hueco es igual a $240\pi\ cm^2$. Muestre que

$$\boldsymbol{V = 360\pi r - 45\pi r^3}$$

Como $S = 30\pi r^2 + 10\pi rh$ y $240\pi\ cm^2$ entonces podemos calcular h según,

$$240\pi = 30\pi r^2 + 10\pi rh \quad \Leftrightarrow \quad 240 = 30r^2 + 10rh \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{240 - 30r^2}{10r}$$

El volumen del cilindro hueco, en cm^3, viene dada por el volumen del cilindro macizo de radio $4r$ y de altura h menos el volumen del cilindro macizo de radio r y de altura h. En ese caso,

$$V = \pi \cdot (4r^2) \cdot h - \pi \cdot r^2 \cdot h = 15\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Como $h = \frac{240-30r^2}{10r}$ entonces,

$$V = 15\pi r^2 \cdot h = \frac{15\pi r^2 \cdot (240 - 30r^2)}{10r} = \frac{3\pi r \cdot (240 - 30r^2)}{2} = 360\pi r - 45\pi r^3$$

(c) (0,25 puntos) Halle una expresión algebraica para $\frac{dV}{dr}$.

$$\frac{dV}{dr} = 360\pi - 135\pi r^2$$

El cilindro hueco alcanza un volumen máximo cuando $\boldsymbol{r = p \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}$ donde $\boldsymbol{p} \in \mathbb{Z}^+$.

(d) (0,5 puntos) Hallar el valor de $\boldsymbol{p}$.

Igualamos a cero la derivada $\frac{dV}{dr}$ y resolvemos para calcular los extremos relativos,

$$\frac{dV}{dr} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 360\pi - 135\pi r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\sqrt{\frac{360}{135}} = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Como el radio tiene que ser positivo y además, $\frac{d^2V}{dr^2} = -270\pi r$ con,

$$\frac{d^2V}{dr^2}\left(2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -270\pi \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} < 0$$

Concluimos que se alcanza un máximo para el valor $r = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ con $p = 2 \in \mathbb{Z}^+$

(e) (0,5 puntos) A partir de lo anterior, halle este volumen máximo. Dé su respuesta en la forma $\boldsymbol{q \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}$, donde $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Z}^+$.

El volumen máximo viene dado de la sustitución del valor $r = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ en la función volumen,

$$V = 360\pi \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - 45\pi\left(2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 = (720 - 240) \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 480 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (p = 480)$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.11)**

6. Una curva viene dada por la ecuación $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) (0,25 puntos) Aplicando la regla de L´Hôpital, calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right)^x$$

(b) (i) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

(ii) (0,25 puntos) A partir de lo anterior, muestre que $1 - y^2 = \frac{dy}{dx}$.

(c) (i) ((0,25 puntos) Utilizando la derivación implícita sobre el resultado de (b) muestre que,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2y.$$

(ii) (0,25 puntos) A partir de lo anterior, halle una expresión para $\frac{d^3y}{dx^3}$ en función de y.

(d) (0,75 puntos) Utilizando los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c), halle la serie de MacLaurin para $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ llegando hasta (e incluyendo) el término x^3.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(a) (0,25 puntos) Aplicando la regla de L´Hôpital, calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right)^x$$

Como,

$$\lim_{x \to \infty} + \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right) = \lim_{x \to + \infty} \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}} \right) = \lim_{x \to + \infty} 1 = 1 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Estamos ante una indeterminación 1^∞. Operamos según la indeterminación, aplicando que,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)^{g(x)} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x \to +\infty} g(x) \cdot [f(x)-1]}$$

En ese caso,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right)^x \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{x \to +\infty} x \cdot \left[\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} - 1 \right]} = e^{\lim_{x \to +\infty} x \cdot \left[\frac{e^{2x}-1-e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right]} =$$

$$= e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{e^{2x}+1}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{2 \cdot e^{2x}}} = e^0 = 1$$

(b) (i) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

Calculamos la derivada de la función $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot e^{2x} \cdot (e^{2x}+1) - (e^{2x}-1) \cdot 2 \cdot e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot e^{4x} + 2 \cdot e^{2x} - 2 \cdot e^{4x} + 2 \cdot e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

(ii) (0,25 puntos) A partir de lo anterior, muestre que $1 - y^2 = \frac{dy}{dx}$.

Calculamos $1 - y^2$ para comprobar que coincide con la derivada,

$$\mathbf{1 - y^2} = 1 - \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)^2 = 1 - \frac{(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} = 1 - \frac{e^{4x}+1-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} =$$

$$= \frac{(e^{2x}+1)^2 - (e^{4x}+1-2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^{4x}+1+2e^{2x}-e^{4x}-1+2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \mathbf{\frac{dy}{dx}}$$

(c) (i) (0,25 puntos) Utilizando la derivación implícita sobre el resultado de (b) muestre que,

$$\mathbf{\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2y.}$$

Derivamos sobre $\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$ respecto de x según,

$$\mathbf{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{d}{dx}(1-y^2) = 0 - 2y \cdot \frac{dy}{dx} = -2y \cdot (1-y^2) = \mathbf{-2y + 2y^3}$$

(ii) (0,25 puntos) A partir de lo anterior, halle una expresión para $\frac{d^3y}{dx^3}$ en función de y.

Derivamos sobre $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2y$ respecto de x según,

$$\mathbf{\frac{d^3y}{dx^3}} = \frac{d}{dx}(2y^3 - 2y) = \mathbf{6}y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - 2 \cdot \frac{dy}{dx} = 6y^2 \cdot (1-y^2) - 2 \cdot (1-y^2) =$$

$$= 6y^2 - 6y^4 - 2 + 2y^2 = \mathbf{-6y^4 + 8y^2 - 2}$$

(d) (0,75 puntos) Utilizando los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c), halle la serie de MacLaurin para $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ llegando hasta (e incluyendo) el término x^3.

La serie de MacLaurin hasta el término x^3 viene dada por,

$$S_3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{y^{k)}}{k!} \cdot x^k = \frac{y(0)}{0!} \cdot x^0 + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{y''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} \cdot x^3$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

- Calculamos el valor $y(0)$,

$$y(0) = \frac{e^{2\cdot 0} - 1}{e^{2\cdot 0} + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

- Calculamos el valor de $y'(0)$,

$$y'(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 1 - y(0)^2 = 1 - 0^2 = 1$$

- Calculamos el valor de $y''(0)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}(0) = 2y(0)^3 - 2y(0) = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

- Calculamos el valor de $y'''(0)$,

$$\frac{d^3y}{dx^3}(0) = -6y(0)^4 + 8y(0)^2 - 2 = -6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 - 2 = -2$$

Por lo tanto, la serie de MacLaurin hasta el término x^3 viene dada por,

$$S_3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{y^{k)}}{k!} \cdot x^k = 0 + \frac{1}{1!} \cdot x^1 + 0 - \frac{2}{3!} \cdot x^3 = x - \frac{2}{6} \cdot x^3 = x - \frac{1}{3} \cdot x^3$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2 puntos]

7. Dada la función $f(x)$ definida a trozos por:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x\leq 1 \\ \dfrac{x-1}{\ln(x)} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto) Determine los valores de los parámetros reales a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en todo su dominio $\mathbb{R}$.

b) (0,5 puntos) Para los valores $a=1$ y $b=-1$, estudie la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función $f(x)$.

c) (0,5 puntos) Para $a=1$ y $b=-1$, halle la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=e$.

a) (1 punto) Determine los valores de los parámetros reales a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en todo su dominio $\mathbb{R}$.

Para que $f(x)$ sea continua y derivable en todo su dominio $\mathbb{R}$, debemos analizar tanto los intervalos abiertos como el punto de ruptura $x=1$.

- Para $x<1$, la función $f(x)=ax^2+bx+1$ es una función polinómica, luego es continua y derivable en $(-\infty,1)$.
- Para $x>1$, la función $f(x)=\frac{x-1}{\ln(x)}$ es continua y derivable en $(1,+\infty)$ porque el denominador $\ln(x)$ se anula en $x=1$, punto que está fuera del intervalo $(1,+\infty)$.

Estudiamos ahora la continuidad en $x=1$:

Para que sea continua en $x=1$, debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

- Límite por la izquierda ($x<1$):

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-}(ax^2+bx+1)=a+b+1$$

- Límite por la derecha ($x>1$):

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\ln(x)}\overset{0/0}{\underset{L'Hôpital}{=}}\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1/x}=\lim_{x\to 1^+}x=1$$

- Cálculo de la imagen de la función para $x=1$,

$$f(1)=a(1)^2+b(1)+1=a+b+1$$

Por tanto, para que $f(x)$ sea continua en $x=1$ debe ocurrir que,

$$a+b+1=1 \iff a+b=0 \iff b=-a$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Estudiamos ahora la derivabilidad en $x = 1$, siempre considerando que $b = -a$. Calculamos la derivada en ambos trozos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{\ln(x) - 1 + \dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 1$ debe ocurrir que,

$$f'(1^-) = f'(1^+)$$

Calculamos ambos límites,

- Derivada por la izquierda ($x \to 1^-$):

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} (2ax + b) = 2a + b$$

- Derivada por la derecha ($x \to 1^+$):

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x) - 1 + \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} \overset{0/0}{\underset{L'Hôpital}{=}} \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{x-1}{x^2}}{\frac{2\ln(x)}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{2x\ln(x)} \overset{0/0}{\underset{L'Hôpital}{=}} \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2\ln(x) + 2x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2\ln(x) + 2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$ debe ocurrir que,

$$\left.\begin{matrix} 2a + b = \frac{1}{2} \\ b = -a \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2a - a = \frac{1}{2} \\ b = -a \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} a = \frac{1}{2} \\ b = -a \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$$

Por lo tanto, **para que $f(x)$ sea derivable debe ocurrir que $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$.**

b) (0,5 puntos) Para los valores $a = 1$ y $b = -1$, estudie la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función $f(x)$.

La función definida en este apartado tiene la expresión,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x - 1}{\ln(x)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En cuanto a las asíntotas verticales, en $x < 1$ no puede haberlas al tratarse de un polinomio.

En cuanto al resto de los valores reales, se observa que el único valor que anula a la función $\frac{x-1}{\ln(x)}$ es $x = 1$ y,

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x - 1}{\ln(x)} \overset{0/0}{\underset{L'Hôpital}{=}} \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1^+} x = 1$$

Por tanto, no es infinito y concluimos que no hay asíntotas verticales.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

En cuanto a las asíntotas horizontales, tenemos que,

$$\lim_{x\to -\infty}(x^2-x+1)=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-1}{\ln(x)}\overset{\infty/\infty}{\underset{L'Hôpital}{=}}\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +\infty}x=+\infty$$

Por tanto, no hay asíntotas horizontales,

c) (0,5 puntos) Para $a=1$ y $b=-1$, halle la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=e$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x=1$ viene dada por:

$$y-f(e)=f'(e)(x-e)$$

Calculamos el punto de tangencia $f(1)$:

$$f(e)=\frac{e-1}{\ln(e)}=\mathrm{e}-1$$

Derivamos la función $f(x)=\frac{x-1}{\ln(x)}$:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\ln(x)-(x-1)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente $f'(e)$ es,

$$f'^{(e)}=\frac{1\cdot\ln(e)-(e-1)\cdot\frac{1}{e}}{(\ln(e))^2}=1-1+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$$

En ese caso, la ecuación de la recta tangente en $x=e$ es,

$$y-(\mathrm{e}-1)=\frac{1}{e}(x-e)$$

O expresada de forma explícita:

$$y=\frac{1}{e}x-1+e-1\quad\Leftrightarrow\quad\boldsymbol{y=\frac{1}{e}x+e-2}$$

La ecuación de la recta normal a la gráfica de la función en $x=1$ viene dada por:

$$y-f(e)=-\frac{1}{f'(e)}\cdot(x-e)$$

En ese caso, la ecuación de la recta normal en $x=e$ es,

$$y-(\mathrm{e}-1)=-e\cdot(x-e)$$

O expresada de forma explícita:

$$\boldsymbol{y=-ex+e^2+e-1}$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2 puntos]

8. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 4x + 2$ y $g(x) = e^x - 3$:

a) **(0,5 puntos)** Pruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución real positiva.

b) **(0,5 puntos)** Pruebe que la función $f(x)$ toma el valor $y = 5$ para algún valor positivo de x.

c) **(0,5 puntos)** Pruebe que las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en al menos un punto del intervalo $(0,2)$.

d) **(0,5 puntos)** Compruebe si se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle para la función $f(x)$ en el intervalo $[-2,2]$. En caso afirmativo, halle el valor o valores de $c \in (-2,2)$ tales que $f'(c) = 0$.

a) (0,5 puntos) Pruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una solución real positiva.

El teorema de Bolzano dice que dada una función $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en su dominio con $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces,

$$\exists\, c \in (a,b)\ ,\ f(c) = 0$$

Aplicamos el Teorema de Bolzano a la función $f(x) = x^3 - 4x + 2$ en el intervalo $[0,1]$:

- Por una parte, $f(x)$ es una función polinómica, por lo que es continua en $\mathbb{R}$, entonces también es continua en el intervalo cerrado $[0,1]$.
- En cuanto al signo de las imágenes de los extremos del intervalo $[0,1]$:
  - $f(0) = 0^3 - 4(0) + 2 = 2 > 0$
  - $f(1) = 1^3 - 4(1) + 2 = -1 < 0$

Como $f(x)$ es continua en el intervalo $[0,1]$ y $f(0) \cdot f(1) < 0$, concluimos por el teorema de Bolzano que

$$\exists\, c \in (0,1)\ ,\ f(c) = 0$$

Es decir, el teorema de Bolzano concluye que existe al menos una solución real positiva para la ecuación $f(x) = 0$ y además, está en el intervalo $(0,1)$.

b) (0,5 puntos) Pruebe que la función $f(x)$ toma el valor $y = 5$ para algún valor positivo de x.

Sea la función auxiliar $h(x) = f(x) - 5$. Aplicamos el teorema de Bolzano sobre esta función en el intervalo $[0,3]$.

- Por una parte, $h(x)$ es una función polinómica, por lo que es continua en $\mathbb{R}$, entonces también es continua en el intervalo cerrado $[0,3]$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

- En cuanto al signo de las imágenes de los extremos del intervalo $[0,3]$:
  - $h(0) = 0^3 - 4 \cdot 0 + 2 - 5 = -3 < 0$
  - $h(3) = 3^3 - 4 \cdot 3 + 2 - 5 = 12 > 0$

Como $h(x)$ es continua en el intervalo $[0,3]$ y $h(0) \cdot h(3) < 0$, concluimos por el teorema de Bolzano que

$$\exists\, c \in (0,3)\,,\ h(c) = 0 \iff \exists\, c \in (0,3)\,,\ f(c) - 5 = 0 \iff \exists\, c \in (0,3)\,,\ f(c) = 5$$

Es decir, el teorema de Bolzano concluye que existe al menos un valor positivo que toma imagen $y = 5$ y además, está en el intervalo $(0,3)$.

c) (0,5 puntos) Pruebe que las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en al menos un punto del intervalo $(0, 2)$.

Sea la función auxiliar $H(x) = f(x) - g(x)$. Aplicamos el teorema de Bolzano sobre esta función en el intervalo $[0,2]$,

- Por una parte, $H(x)$ es una función polinómica, por lo que es continua en $\mathbb{R}$, entonces también es continua en el intervalo cerrado $[0,2]$.
- En cuanto al signo de las imágenes de los extremos del intervalo $[0,2]$:
  - $H(0) = 0^3 - 4 \cdot 0 + 2 - (e^0 - 3) = 5 > 0$
  - $H(2) = 2^3 - 4 \cdot 2 + 2 - (e^2 - 3) = 5 - e^2 < 0$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Como $H(x)$ es continua en el intervalo $[0,2]$ y $H(0) \cdot H(3) < 0$, concluimos por el teorema de Bolzano que

$$\exists\, c \in (0,2)\ ,\ H(c) = 0 \iff \exists\, c \in (0,2)\ ,\ f(c) - g(c) = 0 \iff$$

$$\iff \exists\, c \in (0,2)\ ,\ f(c) = g(c)$$

Es decir, el teorema de Bolzano concluye que existe al menos un valor positivo en el intervalo $(0,2)$ en que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan.

d) (0,5 puntos) Compruebe si se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle para la función $f(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$. En caso afirmativo, halle el valor o valores de $c \in (-2, 2)$ tales que $f'(c) = 0$.

El teorema de Rolle dice que dada una función $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$ entonces,

$$\exists\, c \in (a, b)\ ,\ f'(c) = 0$$

Aplicamos el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^3 - 4x + 2$ en el intervalo $[-2,2]$.

Por una parte la función $f(x)$ es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ al tratarse de una función polinómica. Por lo tanto, en el intervalo cerrado $[-2, +2]$ es continua y en el intervalo $(-2,2)$ es derivable.

Estudiamos ahora si se da la Igualdad de los valores en los extremos del intervalo $[-2, +2]$.

- Calculamos $f(-2)$:

$$f(-2) = (-2)^3 - 4 \cdot (-2) + 2 = -8 + 8 + 2 = +2$$

- Calculamos $f(+)$:

$$f(+2) = (+2)^3 - 4 \cdot (+2) + 2 = 8 - 8 + 2 = +2$$

Por tanto, se verifica que $f(-2) = f(+2) = +2$.

En ese caso, concluimos que se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle y, en tal caso,

$$\exists\, c \in (-2, +2)\ ,\ \ f'(c) = 0$$

Calculamos ahora el valor $c \in (-2, +2)$ tal que $f'(c) = 0$. Para ello, derivamos la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

Al igualar a cero a la derivada, obtenemos el valor $x = c$

$$3c^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow\ 3c^2 = 4\ \Leftrightarrow\ c^2 = \frac{4}{3}\ \Leftrightarrow\ c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3} = \pm 1{,}15$$

Como ambos valores pertenecen al intervalo $(-2, +2)$, ambos dos pueden ser considerados la solución a la que se refiere el Teorema de Rolle en el intervalo $(-2, +2)$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES