

LA WEB DEL PROFE DE MATES lawebdelprofedemates.es	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II		
Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, todas ellas obligatorias. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas. CALIFICACION: Las preguntas valen 2 puntos salvo la quinta que vale 2,75 puntos. TIEMPO: 90 minutos			
Nombre y apellidos		Curso:	2º BD BACH.
		Fecha:	X07/10/2026

Pregunta 1. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \sin(ax) + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.
- b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

Pregunta 2. (0,25 + 0,75 + 0,75 + 0,25 puntos) Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

Halle el dominio, asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos con sus correspondientes imágenes.

Pregunta 3. Considere la ecuación $x + \sin(x) = 1$.

- a) (0,75 puntos) Demuestre que la ecuación tiene al menos una raíz real en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.
- b) (0,5 puntos) Calcule, si existen, los extremos relativos de la función $h(x) = x + \sin(x) - 1$
- c) (0,75 puntos) Suponga que existen dos raíces reales de la ecuación $r, s \in (0, \frac{\pi}{2})$. Justifique que si supone esto y aplica el teorema de Rolle a la función $h(x)$, se crea una contradicción y deduzca entonces que la ecuación tiene una sola solución.

Pregunta 4. (0,75 + 1,25 puntos) Resuelva algebraicamente de modo correcto los siguientes límites,

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} \qquad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/\tan x}$$

Pregunta 5. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x}}$

- a) (0,5 puntos) Calcula algebraicamente su dominio de definición.
- b) (0,5 puntos) Estudia y justifica la existencia o no de asíntotas verticales, si es que existiera alguna.
- c) (1 punto) Calcula algebraicamente la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

(Nota: utiliza la multiplicación por el conjugado si en algún límite con indeterminación que lo requiera)

- d) (0,75 puntos) Teniendo en cuenta el signo de x cuando $x \rightarrow -\infty$, calcula la asíntota oblicua en dicha rama. (Haz caso igualmente de la multiplicación por el conjugado como en el apartado c).

 lawebdelprofedemates.es	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Curso: 2º BD BACH. Fecha: X07/10/2026	
---	---	--	--

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Pregunta 1. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \text{sen}(ax) + b & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x}{1+x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.
- b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución

- a) (1 punto) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.

La función $f(x)$ es continua y derivable en $x \neq 0$ ya que

- Para $x < 0$, tenemos $f(x)$ que es la resta de una función polinómica, $3x^2 + b$, que es continua y derivable en $\mathbb{R}$, y una función trigonométrica, $\text{sen}(ax)$, que es una función trigonométrica obtenida por composición de la función seno con una función lineal, también es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Como la resta de funciones continuas y derivables es continua y derivable en $\mathbb{R}$ entonces tendremos que **$f(x)$ es continua y derivable en este tramo.**
- Para $x > 0$, tenemos $f(x)$ que es la división de una función exponencial e^x multiplicada por una constante, ambas son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$, dividida por un polinomio $1 + x^2$ que es una función polinómica continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Un cociente de funciones continuas y derivables es continuo y derivable en todos los puntos donde el denominador no se anula ($1 + x^2 \neq 0$). Dado que $1 + x^2 \geq 1 > 0$ para cualquier valor real de x , el denominador nunca vale cero. Por tanto, $f(x)$ es continua y derivable en el intervalo abierto $(0, +\infty)$.

Estudiamos ahora la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, se debe cumplir que los límites laterales en $x = 0$ existan y sean iguales entre sí e iguales al valor de la función $f(0)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

- Límite por la izquierda ($x < 0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - \text{sen}(ax) + b) = 3(0)^2 - \text{sen}(0) + b = b$$

- Límite por la derecha ($x \geq 0$) y valor de $f(0)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x}{1+x^2} = 2$$

- Valor de $f(0)$:

$$f(0) = \frac{2e^0}{1+0^2} = \frac{2(1)}{1} = 2$$

	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Curso:	2º BD BACH.
		Fecha:	X07/10/2026

Si $f(x)$ es continua en $x = 0$ entonces, debe ocurrir que

$$b = 2$$

Estudiamos ahora la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$, la función debe ser continua, por lo tanto $b = 2$, y además las derivadas laterales deben ser iguales en dicho punto:

$$f'(0^-) = f'(0^+)$$

Calculamos la derivada de cada tramo de la función,

$$f'(x) = \begin{cases} 6x - a \cdot \cos(ax) & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^x \cdot (1 + x^2) - 4xe^x}{(1 + x^2)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calculamos el límite de la derivada lateral por la derecha en $x = 0$,

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x \cdot (1 + x^2) - 4xe^x}{(1 + x^2)^2} = 2$$

Calculamos el límite de la derivada lateral por la izquierda en $x = 0$,

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (6x - a \cdot \cos(ax)) = -a$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$, igualamos las derivadas laterales:

$$-a = 2 \Rightarrow a = -2$$

Concluimos que para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$ debe ocurrir que,

$$a = -2, \quad b = 2$$

b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

Como $x = 2 > 0$, la recta tangente estará en la región correspondiente al segundo tramo de la función:

$$f(x) = \frac{2e^x}{1 + x^2}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ viene dada por la fórmula punto-pendiente:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

 lawebdelprofedemates.es	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Curso:	2º BD BACH.
		Fecha:	X07/10/2026

Hallamos $f(2)$,

$$f(2) = \frac{2e^2}{1+2^2} = \frac{2e^2}{1+4} = \frac{2e^2}{5}$$

Hallamos ahora la pendiente $m = f'(2)$. Para ello, calculamos la derivada de este tramo que ya calculamos anteriormente:

$$f'(x) = \frac{2e^x(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}$$

Sustituyendo $x = 2$, calculamos $f'(2)$,

$$f'(2) = \frac{2e^2(1+2^2-2(2))}{(1+2^2)^2} = \frac{2e^2(1+4-4)}{(5)^2} = \frac{2e^2(1)}{25} = \frac{2e^2}{25}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es,

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y - \frac{2e^2}{5} = \frac{2e^2}{25}(x - 2)$$

Podemos simplificarla a su forma explícita:

$$y = \frac{2e^2}{25}x - \frac{4e^2}{25} + \frac{2e^2}{5} \Leftrightarrow y = \frac{2e^2}{25}x - \frac{4e^2}{25} + \frac{10e^2}{25} \Leftrightarrow y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}$$

Pregunta 2. Sea la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

Halle el dominio, asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos con sus correspondientes valores.

Solución

Para determinar el dominio de $f(x)$, debemos tener en cuenta dos restricciones principales:

- La función $\ln(x)$, solo está definida para argumentos estrictamente positivos:

$$x > 0$$

- El denominador no puede ser cero:

$$\ln(x) \neq 0 \Rightarrow x \neq e^0 \Rightarrow x \neq 1$$

Por lo tanto, quitando el 1 del intervalo $(0, +\infty)$, el dominio es:

$$\text{Dom}(f) = (0,1) \cup (1, +\infty)$$

 lawebdelprofedemates.es	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Curso:	2º BD BACH.
		Fecha:	X07/10/2026

Las asíntotas verticales se buscan en los puntos donde la función no está definida dentro del entorno de su dominio, es decir, en los bordes del dominio $x = 0^+$ y $x = 1$.

Calculamos el límite lateral por la derecha cuando tendemos a 0,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0$$

No tiene asíntota vertical en $x = 0^+$.

Calculamos los límites laterales cuando $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln(x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$$

Dado que al menos uno de los límites laterales da $\pm\infty$, existe una **asíntota vertical en $x = 1$** .

Buscamos ahora si existe asíntota horizontal cuando tendemos a $+\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

L'Hôpital

Como el límite da $+\infty$, **no hay asíntota horizontal**.

Buscamos si existe asíntota oblicua tiene la forma $y = mx + n$ con

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad y \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

La posible pendiente es,

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$$

Como la pendiente $m = 0$, la función **no tiene asíntotas oblicuas** (una pendiente $m = 0$ correspondería a una asíntota horizontal, que ya comprobamos que no existe).

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculamos la primera derivada $f'(x)$ aplicando la regla del cociente,

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$$

Para encontrar los puntos críticos, igualamos la primera derivada a cero:

$$\frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

 lawebdelprofedemates.es	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Curso:	2º BD BACH.
		Fecha:	X07/10/2026

Analizamos el signo de $f'(x)$ en cada subintervalo del dominio:

Intervalo/semirrecta	$Signo\left(\frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}\right)$	$f(x)$ es ...
$(0,1)$	$\frac{(-)}{(+)} = (-)$	decreciente
$(1,e)$	$\frac{(-)}{(+)} = (-)$	decreciente
$(e, +\infty)$	$\frac{(+)}{(+)} = (+)$	Creciente

Por lo tanto,

- $f(x)$ es decreciente en: $(0,1) \cup (1,e)$
- $f(x)$ es Creciente en: $(e, +\infty)$

En cuanto a los extremos relativos y de acuerdo con el análisis de la primera derivada:

- La función tiene un mínimo relativo en $x = e$ ya que decrece a la izquierda de $x = e$ y crece a la derecha de $x = e$. Calculamos la ordenada sustituyendo $x = e$ en la función original:

$$f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = \frac{e}{1} = e$$

Es decir, hay un mínimo relativo en (e, e) .

- No tiene máximos relativos.

Pregunta 3. Considere la ecuación $x + \text{sen}(x) = 1$.

- (0,75 puntos) Demuestre que la ecuación tiene al menos una raíz real en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (0,5 puntos) Calcule, si existen los extremos relativos de la función $h(x) = x + \text{sen}(x) - 1$
- (0,75 puntos) Suponga que existen dos raíces reales de la ecuación $r, s \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Justifique que esta suposición es imposible mediante el teorema de Rolle y la función $h(x)$ y deduzca entonces que la ecuación tiene una sola solución.

Solución

- (0,75 puntos) Demuestre que la ecuación tiene al menos una raíz real en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

El teorema de Bolzano enuncia que dada una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ con $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces,

$$\exists c \in (a, b) , f(c) = 0$$

 lawebdelprofedemates.es	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Curso:	2º BD BACH.
		Fecha:	X07/10/2026

Definimos la función auxiliar $h(x) = x + \text{sen}(x) - 1$.

$h(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ al tratarse de la resta de un polinomio, $x - 1$, y una función seno sobre el monomio x . por tanto, $h(x)$ es continua en el intervalo cerrado $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Además,

- $h(0) = 0 + \text{sen}(0) - 1 = -1 < 0$
- $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = \frac{\pi}{2} + 1 - 1 = \frac{\pi}{2} > 0$

Por tanto, $h(0) \cdot h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

En ese caso, $h(x)$ cumple todas las condiciones del Teorema de Bolzano y concluimos que existe al menos un valor $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ donde $h(c) = 0$.

$$\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) , \quad h(c) = 0$$

Pero eso implica que,

$$\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) , \quad x + \text{sen}(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) , \quad x + \text{sen}(x) = 1$$

Por lo tanto, la ecuación $x + \text{sen}(x) = 1$ tiene al menos una raíz real en ese intervalo.

b) (0,5 puntos) Calcule, si existen, los extremos relativos de la función $h(x) = x + \text{sen}(x) - 1$

Calculamos los extremos relativos derivando la función e igualándola a cero,

$$h'(x) = 1 + \cos(x)$$

Los puntos críticos son aquellos valores cuya derivada es nula

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi , \forall k \in \mathbb{Z}$$

Sin embargo, al estudiar el signo de $h'(x)$, como $\cos(x) \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ entonces

$$h'(x) = 1 + \cos(x) \geq 1 - 1 = 0 , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Eso significa que la función es creciente, aunque no es estrictamente creciente, en $\mathbb{R}$, y no tiene extremos relativos (ni máximos ni mínimos) al no haber un cambio de creciente a decreciente o de decreciente a creciente.

 lawebdelprofedemates.es	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Curso:	2º BD BACH.
		Fecha:	X07/10/2026

c) (0,75 puntos) Suponga que existen dos raíces reales de la ecuación $r, s \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Justifique que si supone esto y aplica el teorema de Rolle a la función $h(x)$, se crea una contradicción y deduzca entonces que la ecuación tiene una sola solución.

Supongamos que existen dos raíces reales $r, s \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ de la ecuación

$$x + \operatorname{sen}(x) = 1$$

Consideramos de nuevo la función auxiliar $h(x) = x + \operatorname{sen}(x) - 1$, continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y derivable en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ por ser es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ al tratarse de la resta de un polinomio, $x - 1$, y una función seno sobre el monomio x .

El teorema de Rolle dice que dada una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$ entonces,

$$\exists c \in (a, b), \quad f'(c) = 0$$

En ese caso, si $r, s \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ son raíces de la ecuación

$$x + \operatorname{sen}(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} h(r) = 0 \\ h(s) = 0 \end{cases}$$

En ese caso, concluimos que se cumplen las condiciones del Teorema de Rolle y,

$$\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad h'(c) = 0$$

Pero, según el apartado b),

$$h'(x) = 0 \quad \forall x = \pi + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

y por lo tanto,

$$h'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Eso significa que $h(x)$ no tiene más de una raíz y, por tanto, la ecuación $x + \operatorname{sen}(x) = 1$ no tiene más de una raíz real. Como por el apartado a) hemos demostrado que la ecuación tiene al menos tiene una solución, concluimos que la ecuación $x + \operatorname{sen}(x) = 1$ tiene exclusivamente una solución real.

 lawebdelprofedemates.es	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Curso:	2º BD BACH.
		Fecha:	X07/10/2026

Pregunta 4. (0,75 + 1,25 puntos) Resuelva algebraicamente de modo correcto los siguientes límites,

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/\tan x}$$

Solución

a) (0,75 puntos) Calcule:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} \stackrel{0/0}{=} \underset{L'Hôpital}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{2x}} \stackrel{0/0}{=} \underset{L'Hôpital}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \cos x}{2}} = \frac{2}{2} = 1$$

b) (1,25 puntos) Calcule:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{1/\tan x} &\stackrel{1^\infty}{=} \underset{L'Hôpital}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\tan x} \cdot (1+x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\tan x} \stackrel{0/0}{=} \underset{L'Hôpital}{=} \\ &\stackrel{0/0}{=} \underset{L'Hôpital}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+\tan^2 x}} = e^1 = e \end{aligned}$$

 lawebdelprofedemates.es	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Curso:	2º BD BACH.
		Fecha:	X07/10/2026

Pregunta 5. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x}}$

- a) (0,5 puntos) Calcula algebraicamente su dominio de definición.
- b) (0,5 puntos) Estudia y justifica la existencia o no de asíntotas verticales, si es que existiera alguna.
- c) (1 punto) Calcula algebraicamente la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$. *(Nota: utiliza la multiplicación por el conjugado si en algún límite con indeterminación que lo requiera)*
- d) (0,75 puntos) Teniendo en cuenta el signo de x cuando $x \rightarrow -\infty$, calcula la asíntota oblicua en dicha rama. (Haz caso igualmente de la multiplicación por el conjugado como en el apartado c).

Solución

- a) (0,5 puntos) Calcula algebraicamente su dominio de definición.

Para que la función exista, la expresión dentro de la raíz radicando debe ser estrictamente positiva (mayor que cero, ya que está en el denominador y no puede anularse):

$$x^2 - x > 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 1) > 0$$

Hallamos las raíces de la ecuación $x(x - 1) = 0$, que son $x = 0$ y $x = 1$.

Como $y = x^2 - x$ tiene como representación gráfica una parábola con ramas hacia arriba,

Los valores de imagen para los que dicha parábola es positiva se encuentran en las semirrectas

$$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

Por lo tanto, el dominio de la función es,

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

- b) (0,5 puntos) Estudia y justifica la existencia o no de asíntotas verticales, si es que existiera alguna.

Los candidatos a asíntota vertical son los puntos donde la función no existe pero son extremos del dominio: $x = 0$ y $x = 1$.

 lawebdelprofedemates.es	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Curso: 2º BD BACH. Fecha: X07/10/2026	
---	---	--	--

- Estudio en $x = 0$:

Dado que la función solo existe a la izquierda de 0 ($x \rightarrow 0^-$):

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x}} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x \cdot 2\sqrt{x^2-x}}{2x-1} = 0$$

Como el límite da un valor finito (0), NO hay asíntota vertical en $x = 0$.

- Estudio en $x = 1$:

Dado que la función solo existe a la derecha de 1 ($x \rightarrow 1^+$):

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x}} = \frac{1^2}{\sqrt{0^+}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Por lo tanto, existe una Asíntota Vertical en $x = 1$ (por la derecha).

c) (1 punto) Calcula algebraicamente la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$.

(Nota: utiliza la multiplicación por el conjugado si en algún límite con indeterminación que lo requiera)

Una asíntota oblicua tiene la forma $y = mx + n$.

Calculamos la pendiente m :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}} \stackrel{\infty/\infty}{=} m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Calculamos la ordenada en el origen n :

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2-x}}$$

Obtenemos una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Siguiendo la nota del enunciado, multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador ($x^2 + x\sqrt{x^2-x}$):

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x\sqrt{x^2-x}) \cdot (x^2 + x\sqrt{x^2-x})}{(\sqrt{x^2-x}) \cdot (x^2 + x\sqrt{x^2-x})} =$$

 lawebdelprofedemates.es	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Curso:	2º BD BACH.
		Fecha:	X07/10/2026

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)^2 - (x \cdot \sqrt{x^2 - x})^2}{(\sqrt{x^2 - x}) \cdot (x^2 + x \cdot \sqrt{x^2 - x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^2(x^2 - x)}{(\sqrt{x^2 - x}) \cdot (x^2 + x \cdot \sqrt{x^2 - x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^4 + x^3}{\sqrt{x^2 - x} \cdot x^2 + (x^2 - x) \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - x} + x^3 - x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 \cdot \sqrt{x^2} + x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 + x^3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow +\infty$ es:

$$y = x + \frac{1}{2}$$

Teniendo en cuenta que cuando $x \rightarrow -\infty$, x es negativo, por lo que $\sqrt{x^2} = |x| = -x$.

d) (0,75 puntos) Teniendo en cuenta el signo de x cuando $x \rightarrow -\infty$, calcula la asíntota oblicua en dicha rama. (Haz caso igualmente de la multiplicación por el conjugado como en el apartado c).

Una asíntota oblicua tiene la forma $y = mx + n$.

Calculamos la pendiente m :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = -1$$

Calculamos la ordenada en el origen n :

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x \cdot \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x^2 - x}}$$

Obtenemos una indeterminación del tipo $\infty - \infty$.

Hagamos un cambio de variable para que el límite sea más sencillo. El cambio es,

$$x = -t$$

En ese caso,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x \cdot \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x^2 - x}} = \lim_{-t \rightarrow -\infty} \frac{(-t)^2 + (-t) \cdot \sqrt{(-t)^2 - (-t)}}{\sqrt{(-t)^2 - (-t)}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 - t \cdot \sqrt{t^2 + t}}{\sqrt{t^2 + t}}$$

 lawebdelprofedemates.es	PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2026-2027 MATERIA: MATEMÁTICAS II	Curso:	2º BD BACH.
		Fecha:	X07/10/2026

Siguiendo la nota del enunciado, multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador

$(t^2 + t \cdot \sqrt{t^2 + t})$:

$$\begin{aligned}
 n &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t^2 - t \cdot \sqrt{t^2 + t}) \cdot (t^2 + t \cdot \sqrt{t^2 + t})}{(\sqrt{t^2 + t}) \cdot (t^2 + t \cdot \sqrt{t^2 + t})} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t^2)^2 - (t \cdot \sqrt{t^2 + t})^2}{(\sqrt{t^2 + t}) \cdot (t^2 + t \cdot \sqrt{t^2 + t})} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^4 - t^2 \cdot (t^2 + t)}{(\sqrt{t^2 + t}) \cdot (t^2 + t \cdot \sqrt{t^2 + t})} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^4 - t^4 - t^3}{(\sqrt{t^2 + t}) \cdot t^2 + |t^2 + t| \cdot t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t^3}{t^2 \cdot \sqrt{t^2 + t} + t \cdot |t^2|} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t^3}{t^2 \cdot \sqrt{t^2 + t} + t \cdot |t^2|} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t^3}{t^3 + t^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t^3}{2t^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ es:

$$y = -x - \frac{1}{2}$$