LA WEB DEL PROFE DE MATES lawebdelprofedemates.es	**PRUEBA SIMULACRO DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD** **Curso 2026-2027** **MATERIA: MATEMÁTICAS II – ANÁLISIS Y ENFOQUES NS**	

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a **cinco preguntas**, todas ellas obligatorias. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
CALIFICACION: 11 puntos. Cada pregunta es la suma de las puntuaciones de sus apartados **TIEMPO:** 90 minutos

Nombre y apellidos		**Curso:**	2º E BACH.
		Fecha:	V09/10/2026

Pregunta 1. (2 puntos) Se dispone de tres urnas, U_1, U_2 y U_3, con la siguiente composición de bolas: la urna U_1contiene 3 bolas blancas y 2 negras; la urna U_2 contiene 4 bolas blancas y 4 negras y la urna 3 bolas blancas y 3 negras. Se elige una urna al azar con probabilidades desiguales: la probabilidad de elegir la urna U_1 es 0.2, la de elegir la urna U_2 es 0.5 y la de elegir la urna U_3 el resto. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que se elija la urna U_3 y salga bola negra.

b) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que, al extraer una bola al azar esta sea blanca.

c) (0,75 puntos) Si se extrae una bola y resulta ser negra, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la urna U_2?

Pregunta 2. (2 puntos) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio de probabilidad tales que $P(A \cup B) = 0.7$, $P(\bar{A} \cap B) = 0.3$ y $P(A \mid \bar{B}) = 0.4$. Se pide:

a) (1 punto) Calcule las probabilidades de los sucesos A y B ($P(A)$ y $P(B)$).

b) (0,5 puntos) Determine si los sucesos A y B son independientes, justificando la respuesta matemáticamente.

c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad condicionada $P(\bar{B} \mid \bar{A})$.

Pregunta 3. (2,75 puntos) Dada la función $f(x) = \ln(1 + 3x)$, resuelva las siguientes cuestiones,

a) (0,25 puntos) Calcule el dominio de definición de la función.

b) (0,75 puntos) Utilizando la definición formal del polinomio de Maclaurin determine el polinomio de Maclaurin de grado 4 para $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Halle la expresión del término general de la serie infinita de Maclaurin para $f(x)$ y exprésela en la forma sumatorio.

d) (0,5 puntos) Mediante el uso del Criterio de la Razón o del cociente de D'Alembert, determine el intervalo abierto de convergencia.

e) (0,5 puntos) Utilice el polinomio de grado 4 obtenido en el apartado (a) para estimar el valor de $\ln(1.3)$. Determine la menor cota superior para el error cometido entre el valor real y el valor estimado.

SIGUE POR DETRÁS

Problema 4. (2 puntos) Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\ln(x+1)}{x} & \text{si } -1 < x < 0 \\ b + xe^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcule los valores de los parámetros reales a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en todo su dominio.

b) (1 punto) Estudia su crecimiento para $x > 0$.

Pregunta 5. (2,25 puntos) Considere la curva definida por la ecuación implícita:

$$x^3 + 3xy^2 - 2y^3 = 12$$

a) (0,5 puntos) Demuestre detalladamente que la primera derivada de la curva está dada por:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 + y^2}{2y^2 - 2xy}$$

b) (0,75 puntos) Dado que el punto $P(p, 1)$ pertenece a la curva, determine el valor de p y halle la ecuación de la recta tangente en dicho punto, expresándola en la forma $ax + by + c = 0$.

c) (0,5 puntos) Determine las coordenadas exactas de los puntos de la curva donde la recta tangente es vertical.

d) (0,5 puntos) Demuestre que no existen puntos en la curva donde la recta tangente sea horizontal.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Pregunta 1. (2 puntos) Se dispone de tres urnas, U_1, U_2 y U_3, con la siguiente composición de bolas: la urna U_1contiene 3 bolas blancas y 2 negras; la urna U_2 contiene 4 bolas blancas y 4 negras y la urna 3 bolas blancas y 3 negras. Se elige una urna al azar con probabilidades desiguales: la probabilidad de elegir la urna U_1 es 0.2, la de elegir la urna U_2 es 0.5 y la de elegir la urna U_3 el resto. Se pide:

a) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que se elija la urna U_3 y salga bola negra.

b) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que, al extraer una bola al azar esta sea blanca.

c) (0,75 puntos) Si se extrae una bola y resulta ser negra, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la urna U_2?

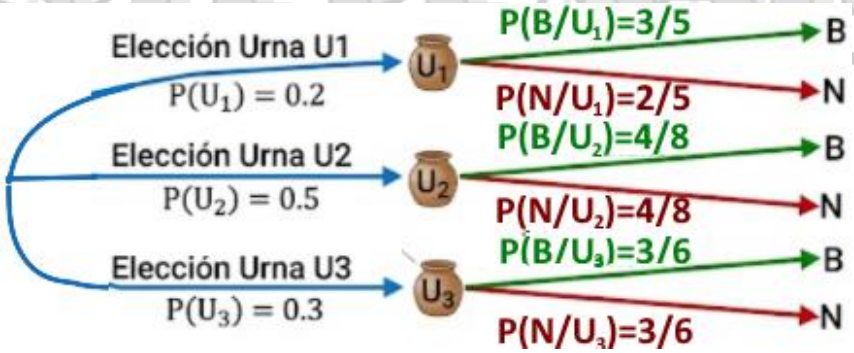
Solución

Consideramos los siguientes sucesos:

$$U_1 = "Se\ elige\ la\ urna\ 1" \ ; \quad U_2 = "Se\ elige\ la\ urna\ 2" \ ; \ U_3 = "Se\ elige\ la\ urna\ 3"$$

$$N = "Se\ escoge\ bola\ negra" \ ; \quad B = "Se\ escoge\ bola\ blanca"$$

En base a esos sucesos y los datos que se nos dan en el enunciado, podemos describir la situación mediante el siguiente diagrama de árbol:



a) (0,5 puntos) Si el resultado de la prueba ha sido positivo, calcule la probabilidad de que la persona esté realmente enferma.

Aplicamos la regla de la multiplicación para probabilidades compuestas:

$$P(U_3 \cap N) = P(U_3) \cdot P(N \mid U_3)$$

$$P(U_3 \cap N) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$$

b) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que, al extraer una bola al azar esta sea blanca.

Aplicamos el Teorema de la Probabilidad Total, sumando las trayectorias de las tres urnas que conducen a una bola blanca:

$$P(B) = P(U_1) \cdot P(B \mid U_1) + P(U_2) \cdot P(B \mid U_2) + P(U_3) \cdot P(B \mid U_3)$$

Sustituimos los valores numéricos:

$$P(B) = (0.2 \cdot 0.6) + (0.5 \cdot 0.5) + (0.3 \cdot 0.5) = 0.12 + 0.25 + 0.15 = 0.52$$

c) (0,75 puntos) Si se extrae una bola y resulta ser negra, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la urna U_2?

Calculamos la probabilidad total de que salga bola negra ($P(N)$):

$$P(N) = 1 - P(B) = 1 - 0.52 = 0.48$$

Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(U_2 \mid N) = \frac{P(U_2 \cap N)}{P(N)} = \frac{P(U_2) \cdot P(N \mid U_2)}{P(N)} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.48} = \frac{0.25}{0.48} = \frac{25}{48} \approx 0.5208$$

Pregunta 2. (2 puntos) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio de probabilidad tales que $P(A \cup B) = 0.7$, $P(\overline{A} \cap B) = 0.3$ y $P(A \mid \overline{B}) = 0.4$. Se pide:

a) (1 punto) Calcule las probabilidades de los sucesos A y B ($P(A)$ y $P(B)$).

b) (0,5 puntos) Determine si los sucesos A y B son independientes, justificando la respuesta matemáticamente.

c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad condicionada $P(\overline{B} \mid \overline{A})$.

Solución

a) (1 punto) Calcule las probabilidades de los sucesos A y B ($P(A)$ y $P(B)$).

Sabemos por la teoría de conjuntos que la unión $A \cup B$ se puede descomponer en la suma de A y el conjunto de los elementos de B que no están en A ($\bar{A} \cap B$):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$$

Sustituimos los valores conocidos:

$$0.7 = P(A) + 0.3 \quad \Leftrightarrow \quad P(A) = 0.7 - 0.3 = 0.4$$

Calculamos $P(B)$ usando la probabilidad condicionada $P(A \mid \bar{B})$:

Por definición de probabilidad condicionada:

$$P(A \mid \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

Como $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$ y el suceso $A \cap \bar{B}$ representa los elementos de A que no pertenecen a B, lo cual se puede expresar en función de la unión y B:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A \cup B) - P(B) = 0.7 - P(B)$$

Sustituimos esto en la fórmula de la condición:

$$0.4 = \frac{0.7 - P(B)}{1 - P(B)}$$

Resolvemos la ecuación de primer grado para hallar $P(B)$:

$$0.4 \cdot \big(1 - P(B)\big) = 0.7 - P(B)$$

$$0.4 - 0.4 \cdot P(B) = 0.7 - P(B)$$

$$P(B) - 0.4 \cdot P(B) = 0.7 - 0.4$$

$$0.6 \cdot P(B) = 0.3 \Longrightarrow P(B) = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$$

b) (0,5 puntos) Determine si los sucesos A y B son independientes, justificando la respuesta matemáticamente.

Para comprobar si dos sucesos son independientes, debemos verificar si se cumple la condición clásica:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Calculamos primero $P(A \cap B)$:

Sabemos que $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

Sustituyendo los valores obtenidos:

$$0.3 = 0.5 - P(A \cap B) \Longrightarrow P(A \cap B) = 0.5 - 0.3 = 0.2$$

Comprobamos la condición de independencia:

Por un lado, como $P(A \cap B) = 0.2$ y, por otro lado, el producto de las probabilidades marginales es:

$$P(A) \cdot P(B) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2$$

entonces,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.2,$$

Y concluimos que los sucesos A y B sí son independientes.

c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad condicionada $P(\bar{B} \mid \bar{A})$.

Aplicamos la definición formal de probabilidad condicionada:

$$P(\bar{B} \mid \bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

Por las Leyes de De Morgan, la intersección de los complementarios es el complementario de la unión:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3$$

Además,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$$

Concluimos entonces,

$$P(\bar{B} \mid \bar{A}) = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$$

Pregunta 3. Dada la función $f(x) = \ln(1 + 3x)$, resuelva las siguientes cuestiones,

a) (0,25 puntos) Calcule el dominio de definición de la función.

b) (0,75 puntos) Utilizando la definición formal del polinomio de Maclaurin determine el polinomio de Maclaurin de grado 4 para $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Halle la expresión del término general de la serie infinita de Maclaurin para $f(x)$ y exprésela en la forma sumatorio.

d) (0,5 puntos) Mediante el uso del Criterio de la Razón o del cociente de D'Alembert, determine el intervalo abierto de convergencia.

e) (0,5 puntos) Utilice el polinomio de grado 4 obtenido en el apartado (a) para estimar el valor de $\ln(1.3)$. Determine la menor cota superior para el error cometido entre el valor real y el valor estimado.

Solución

a) (0,25 puntos) Calcule el dominio de definición de la función.

Al tratarse de una función logarítmica, el dominio contendrá todos los números reales que verifiquen la inecuación

$$1 + 3x > 0$$

Resolvemos,

$$1 + 3x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{1}{3}$$

Por tanto, el dominio de definición es,

$$\boldsymbol{Dom(f) = \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)}$$

b) (0,75 puntos) Utilizando la definición formal del polinomio de Maclaurin determine el polinomio de Maclaurin de grado 4 para $f(x)$.

Para emplear la fórmula $P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$,

calculamos las primeras 4 derivadas evaluadas en $x = 0$:

- $f(x) = \ln(1 + 3x) \Longrightarrow f(0) = \ln(1) = 0$
- $f'(x) = \frac{3}{1+3x} \Longrightarrow f'(0) = 3$
- $f''(x) = -\frac{9}{(1+3x)^2} \Longrightarrow f''(0) = -9$
- $f'''(x) = \frac{54}{(1+3x)^3} \Longrightarrow f'''(0) = 54$
- $f^{(4)}(x) = -\frac{486}{(1+3x)^4} \Longrightarrow f^{(4)}(0) = -486$

Sustituyendo en la fórmula del polinomio:

$$P_4(x) = 0 + \frac{3}{1!}x + \frac{-9}{2!}x^2 + \frac{54}{3!}x^3 + \frac{-486}{4!}x^4$$

Simplificando los coeficientes:

$$\boldsymbol{P_4(x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 - \frac{81}{4}x^4}$$

c) (0,5 puntos) Halle la expresión del término general de la serie infinita de Maclaurin para $f(x)$ y exprésela en la forma sumatorio.

Analizando las derivadas sucesivas para $n \geq 1$:

- $f(x) = \ln(1 + 3x)$
- $f'(x) = \frac{3}{1+3x}$
- $f''(x) = -\frac{3^2 \cdot 1!}{(1+3x)^2}$
- $f'''(x) = \frac{3^3 \cdot 2!}{(1+3x)^3}$
- $f^{(4)}(x) = -\frac{3^4 \cdot 3!}{(1+3x)^4}$

Se observa entonces que,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot 3^n \cdot (n-1)! \cdot (1+3x)^{-n} \quad \forall\, n > 0,\ \ n \in \mathbb{N}$$

Evaluando en $x = 0$:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot 3^n \cdot (n-1)!$$

El coeficiente del término x^n en la serie es:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^n \cdot (n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^n}{n}$$

Por lo tanto, la serie en forma sumatoria es:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^n}{n} x^n$$

d) (0,5 puntos) Mediante el uso del Criterio de la Razón o del cociente de D'Alembert), determine el intervalo abierto de convergencia.

Considerando la serie en la forma,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n$$

Entonces

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^n}{n}$$

Aplicamos el Criterio del cociente, para calcular el radio de convergencia,

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1-1} 3^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n-1} 3^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^n \cdot 3^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n-1} \cdot 3^n}{n}\right|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n+1}}{\frac{3^{n-1}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$$

Por lo tanto, el radio de convergencia es,

$$\frac{1}{r} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} = r$$

Y el intervalo de convergencia es,

$$\left(-\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\right)$$

e) (0,5 puntos) Utilice el polinomio de grado 4 obtenido en el apartado (a) para estimar el valor de $\ln(1.3)$. Determine la menor cota superior para el error cometido entre el valor real y el valor estimado.

Si queremos estimar el valor 1.3 como nuestra función es,

$$f(x) = ln(1+3x)$$

Entonces buscaremos primero el valor x de tal modo que,

$$1+3x = 1.3$$

Resolvemos,

$$1+3x = 1.3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 0.3 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0.1$$

Calculamos

$$P_4(0.1) = 3(0.1) - \frac{9}{2}\cdot(0.1)^2 + 9\cdot(0.1)^3 - \frac{81}{4}\cdot(0.1)^4$$

$$P_4(0.1) = 0.3 - 0.045 + 0.009 - 0.002025 = \mathbf{0.261975}$$

Por otra parte,

$$f(1.3) = \ln(1.3) \approx 0.262364\ldots$$

La cota de error superior entre el valor exacto y el aproximado es,

$$\text{Error} = |P_4(0.1) - f(1.3)| = |0.261975 - 0.262364| = |0.0003896| \leq 0.0004$$

Problema 4. (2 puntos) Dada la función real de variable real definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\ln(x+1)}{x} & \text{si } -1 < x < 0 \\ b + xe^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

Se pide:

a) (1 punto) Calcule los valores de los parámetros reales a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en todo su dominio.

b) (1 punto) Estudia su crecimiento para $x > 0$.

Solución

a) (1 punto) Calcule los valores de los parámetros reales a y b para que la función $f(x)$ sea continua y derivable en todo su dominio.

Para el primer tramo $(-1, < x < 0)$: La función es un cociente donde interviene un logaritmo neperiano y un monomio.

- El logaritmo $\ln(x+1)$ exige que su argumento sea estrictamente positivo

$$x + 1 > 0 \Longrightarrow x > -1$$

- El denominador x solo se anula en $x = 0$, pero como este tramo solo abarca desde -1 hasta 0 sin incluir el cero (es un intervalo abierto), el denominador nunca se anula dentro de este tramo.
- Por tanto, al ser composición y división de funciones elementales continuas y derivables en su dominio, esta rama es continua y derivable por sí misma en todo $(-1,0)$.

Para el segundo tramo $(x \geq 0)$: La función es $b + xe^{-2x}$. Es una suma de una constante y el producto de un polinomio por una función exponencial. Las funciones polinómicas y exponenciales son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$.

Por tanto, **es continua y derivable por sí misma en todo** $[0, +\infty)$. El único punto donde la continuidad y la derivabilidad pueden fallar es en el punto de enlace $x = 0$.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, deben coincidir el límite por la izquierda, el límite por la derecha y el valor de la función en dicho punto:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

- Límite por la izquierda,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{a\ln(x+1)}{x} \underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0^-} \frac{a\cdot\frac{1}{x+1}}{1} = \frac{a\cdot\frac{1}{1}}{1} = a$$

- Límite por la derecha

$$\lim_{x\to 0^+} (b + xe^{-2x}) = b + 0\cdot e^0 = b$$

- $f(0) = b + 0\cdot e^0 = b$.

Igualando ambos límites laterales para garantizar la continuidad:

$$a = b$$

Estudiamos ahora la derivabilidad en $x = 0$. Para que sea derivable en $x = 0$ debe ocurrir que,

$$f'(0^-) = f'(0^+)$$

Calculamos la derivada de la función para cada tramo (válida para $x \neq 0$):

- Para $-1 < x < 0$: Derivamos el cociente:

$$f'(x) = \frac{a\cdot\left(\frac{1}{x+1}\right)x - a\cdot\ln(x+1)\cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{ax}{x+1} - a\cdot\ln(x+1)}{x^2} =$$

$$= \frac{ax - a\cdot(x+1)\cdot\ln(x+1)}{(x+1)\cdot x^2}$$

- Para $x > 0$: Derivamos la suma (con la regla del producto para el segundo término):

$$f'(x) = 0 + 1\cdot e^{-2x} + x\cdot(-2e^{-2x}) = e^{-2x}(1-2x)$$

En ese caso, podemos decir que,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax - a\cdot(x+1)\cdot\ln(x+1)}{(x+1)\cdot x^2} & \text{si } -1 < x < 0 \\ e^{-2x}(1-2x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ahora calculamos las derivadas laterales en $x = 0$:

- Derivada por la izquierda,

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{ax}{x+1} - a\ln(x+1)}{x^2} \underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{a\cdot(x+1)-ax}{(x+1)^2} - \dfrac{a}{x+1}}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{ax+a-ax}{(x+1)^2} - \dfrac{a}{x+1}}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{a}{(x+1)^2} - \dfrac{a}{x+1}}{2x} \underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\dfrac{-2a}{(x+1)^3} + \dfrac{a}{(x+1)^2}}{2} = -\frac{a}{2}$$

- Derivada por la derecha,

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} e^{-2x}(1-2x) = e^0\cdot(1-0) = 1\cdot 1 = 1$$

Igualando las derivadas laterales para que la función sea derivable:

$$-\frac{a}{2} = 1 \Longrightarrow a = -2$$

Como sabíamos por la continuidad que $a = b$, entonces:

$$\mathrm{a} = -2, \quad \mathrm{b} = -2$$

b) (1 punto) Estudia su crecimiento para $x > 0$.

Para $x > 0$, la función es $f(x) = -2 + xe^{-2x}$. Su derivada en este intervalo es:

$$f'(x) = e^{-2x}(1-2x)$$

Para estudiar el crecimiento, calculamos los puntos críticos igualando la derivada a cero

$$(f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2x}\cdot(1-2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

Estudiamos el signo de la primera derivada en el dominio de la función

Intervalo/semirrecta	$\boldsymbol{Signo}\left(e^{-2x}\cdot(1-2x)\right)$	$\mathbf{f(x)}$ **es …**
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$(+)\cdot(+) = (+)$	Creciente
$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$	$(+)\cdot(-) = (-)$	Decreciente

Conclusión del crecimiento:

- La función es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
- La función es decreciente en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
- Presenta un máximo relativo en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$.

Pregunta 5. (2,25 puntos) Considere la curva definida por la ecuación implícita:

$$\boldsymbol{x^3 + 3xy^2 - 2y^3 = 12}$$

a) (0,5 puntos) Demuestre detalladamente que la primera derivada de la curva está dada por:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2y^2 - 2xy}}$$

b) (0,75 puntos) Dado que el punto $P(p, 1)$ pertenece a la curva, determine el valor de a y halle la ecuación de la recta tangente en dicho punto, expresándola en la forma $ax + by + c = 0$.

c) (0,5 puntos) Determine las coordenadas exactas de los puntos de la curva donde la recta tangente es vertical.

d) (0,5 puntos) Demuestre que no existen puntos en la curva donde la recta tangente sea horizontal.

Solución

a) (0,5 puntos) Demuestre detalladamente que la primera derivada de la curva está dada por:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2y^2 - 2xy}}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{dy}{dx} = y'$ siendo $y = y(x)$ una función con variable independiente x, derivamos en la ecuación de la curva,

$$3x^2 + 3y^2 + 3x \cdot 2y \cdot y' - 2 \cdot 3y^2 \cdot y' = 0$$

Despejamos y',

$$3x \cdot 2y \cdot y' - 2 \cdot 3y^2 \cdot y' = -3x^2 - 3y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y' \cdot (6xy - 6y^2) = -3x^2 - 3y^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y' = \frac{-3x^2 - 3y^2}{6xy - 6y^2} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{-3 \cdot (x^2 + y^2)}{-3 \cdot (-2xy + 2y^2)} = \frac{x^2 + y^2}{2y^2 - 2xy}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2y^2 - 2xy}$$

b) (0,75 puntos) Dado que el punto $P(p, 1)$ pertenece a la curva, determine el valor de p y halle la ecuación de la recta tangente en dicho punto, expresándola en la forma $ax + by + c = 0$.

La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(p, 1)$ será de la forma,

$$(y - 1) = y'(p) \cdot (x - p)$$

Calculamos a sustituyendo el punto $(p, 1)$ en la ecuación de la curva,

$$p^3 + 3p - 2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad p^3 + 3p - 14 = 0$$

Aplicando Ruffini, solo obtenemos que $p = 2$.

Calculamos $y'(2)$

$$y'(2) = \frac{2^2 + 1^2}{2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{5}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente pedida en el punto $P(2,1)$ es,

$$(y - 1) = -\frac{5}{2} \cdot (x - 2) \quad \Leftrightarrow \quad 2y - 2 = -5x + 10 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{5x + 2y - 12 = 0}$$

c) (0,5 puntos) Determine las coordenadas exactas de los puntos de la curva donde la recta tangente es vertical.

Si la recta tangente es vertical es porque la pendiente tiende a infinito. En ese caso, el denominador de la derivada debe ser cero,

$$2y^2 - 2xy = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y \cdot (y - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ o \\ x = y \end{cases}$$

Por lo tanto, los puntos donde la recta tangente es vertical son aquellos de la forma,

- Si $y = 0$ entonces, como $x^3 + 3xy^2 - 2y^3 = 12$, entonces,

$$x^3 + 3x \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{12}$$

Por tanto, **en el punto $(\sqrt[3]{12}, 0)$ la tangente es vertical.**

- Si $x = y$ entonces, como $x^3 + 3xy^2 - 2y^3 = 12$, entonces,

$$x^3 + 3x \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 3x^3 - 2x^3 = 12 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^3 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{6}$$

Por tanto, **en el punto $(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6})$ la tangente es vertical.**

d) (0,5 puntos) Demuestre que no existen puntos en la curva donde la recta tangente sea horizontal.

Si la recta tangente es horizontal es porque la pendiente es nula. En ese caso,

$$\frac{x^2 + y^2}{2y^2 - 2xy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 0$$

El único punto que verifica esta situación es $(0, 0)$ pero no pertenece a la curva ya que,

$$0^3 + 3 \cdot 0 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0 \neq 2$$