

## CONTROL 12

### Análisis y enfoques Matemáticas I y II

Fecha: **Miércoles, 03 de JUNIO de 2026**

---

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_

**APELLIDOS:** \_\_\_\_\_

---

#### INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10,5 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.

Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

---

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

### SECCIÓN ÚNICA

**[Puntuación máxima: 1,5 puntos]**

1. a) Sea la función  $f(x) = \sqrt{2+x}$  y  $g(x) = x - x^2$ . Calcular el dominio de la función composición  $f \circ g$ .
  
- b) Calcula algebraicamente la imagen de la función  $h(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$



LA WEB DEL

PROFESOR DE MATEMÁTICAS

[Puntuación máxima: 2 puntos]

2. La función  $h(z)$  se define así:  $h(z) = z^2 + 3z + c$  con  $c \in \mathbb{R}$ . Se sabe que el número complejo  $z = p + 3i$  con  $p \in \mathbb{R}$  satisface la ecuación  $h(z) = 0$ .

a) Calcule algebraicamente el valor de  $p$ . (0,5 puntos)

b) Calcule algebraicamente el valor de  $c$ . (0,5 puntos)

Ahora queremos resolver la ecuación  $z^3 - 1 = i$

c) Obtener sus tres raíces en el plano complejo **en forma POLAR**. (1 punto)

LA WEB DEL  
PROFESOR DE MATEMÁTICAS

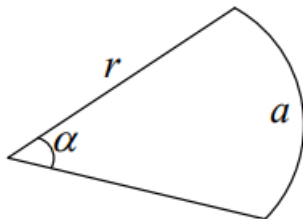
LA WEB DEL

**PROFE DE MATE**

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

3. Resolver correctamente.

- (a) Un jardinero quiere hacer un parterre en forma de sector circular y que tenga de perímetro 20 m. Calcula algebraicamente el radio  $r$  que debe tomar para lograr que el área del parterre sea máxima.



- (b) Calcular algebraicamente la ecuación general de recta tangente a la función  $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$ , que sea paralela a la recta  $4x - y = 1$



LA WEB DEL

PROFESOR DE MATEMÁTICAS

**[Puntuación máxima: 2, puntos]**

4. Dada la función  $f(x) = x^2 \cdot (x^3 - x - 1) + (x - 1)^2$

- a) Determine algebraicamente la monotonía y los extremos relativos de la función  $f(x)$ . (1 punto)
- b) Estudia la curvatura y puntos de inflexión de la función  $f(x)$ . (1 punto)



LA WEB DEL

PROFESOR DE MATEMÁTICAS

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

5. Dada la función  $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$

- (a) Determinar su dominio (0,5 puntos)
- (b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
- (c) Estudiar la continuidad de la función  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  en  $x = 0$  determinando si es continua o, en caso de no serlo, qué tipo de discontinuidad presenta. (1 punto)



LA WEB DEL

PROFESOR DE MATEMÁTICAS

**SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CONTROL 12 DE MATEMÁTICAS I**

**[Puntuación máxima: 1,5 puntos]**

1. a) Sea la función  $f(x) = \sqrt{2+x}$  y  $g(x) = x - x^2$ . Calcular el dominio de la función composición  $f \circ g$ . (0,75 puntos)

b) Calcula algebraicamente la imagen de la función  $h(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$  (0,75 puntos)

Comenzamos con  $f \circ g$  componiendo en el orden que se indica,

$$f \circ g(x) = f(x - x^2) = \sqrt{2 + x - x^2}$$

Calculamos el dominio de la función, resolviendo

$$2 + x - x^2 \geq 0$$

Calculamos las raíces del polinomio  $2 + x - x^2$

$$2 + x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} =$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-1-3}{-2} = +2 \end{cases}$$

Realizamos intervalos y semirrectas con los valores anteriores y estudiamos el signo del polinomio en dichas regiones,

Intervalos/semirrectas	Valor de prueba	$-(x+1) \cdot (x-2)$	Positiva/negativa
$(-\infty, -1]$	-2	$(-) \cdot (-) \cdot (-) = (-)$	Negativo
$[-1, +2]$	0	$(-) \cdot (+) \cdot (-) = (+)$	Positivo
$[+2, +\infty)$	+3	$(-) \cdot (+) \cdot (+) = (-)$	Negativo

Por lo tanto, el dominio de la función es,

$$Dom(f) = [-1, 2]$$

b) Calcula la imagen de la función  $h(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

Calculamos la función inversa  $h^{-1}(y)$ ,

$$x = \ln\left(\frac{2y}{y-1}\right) \Leftrightarrow e^x = \frac{2y}{y-1} \Leftrightarrow e^x y - e^x = 2y \Leftrightarrow y(e^x - 2) = e^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e^x}{e^x - 2}$$

Por lo tanto,

$$h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$$

Como la imagen de la función  $h(x)$  es el dominio de la función  $h^{-1}(x)$ , entonces, calculamos dicho dominio anulando el denominador,

$$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$$

En ese caso,

$$Im(h) = \mathbb{R} - \{\ln(2)\}$$



[Puntuación máxima: 2 puntos]

2. La función  $h(z)$  se define así:  $h(z) = z^2 + 3z + c$  con  $c \in \mathbb{R}$ . Se sabe que el número complejo  $z = p + 3i$  con  $p \in \mathbb{R}$  satisface la ecuación  $h(z) = 0$ .

a) Calcule algebraicamente el valor de  $p$ . (0,5 puntos)

b) Calcule algebraicamente el valor de  $c$ . (0,5 puntos)

Ahora queremos resolver la ecuación  $z^3 - 1 = i$

c) Obtener sus tres raíces en el plano complejo **en forma POLAR**. (1 punto)

**a) Calcule algebraicamente el valor de  $p$ . (0,5 puntos)**

Como la ecuación tiene coeficientes reales, si  $z = p + 3i$  es una raíz de la ecuación entonces

$$z' = p - 3i$$

También es una raíz del polinomio. Por tanto, la factorización del polinomio es,

$$h(z) = (z - (p - 3i)) \cdot (z - (p + 3i))$$

Operando en la factorización de  $h(z)$  tendremos que

$$h(z) = ((z - p) + 3i) \cdot ((z - p) - 3i) = (z - p)^2 - 9i^2 = z^2 - 2pz + p^2 + 9 \Leftrightarrow$$

Por lo tanto, como el coeficiente de grado 1 de  $h(z)$  tiene que ser el mismo tanto en la expresión de  $h(z)$  como en su factorización desarrollada tendremos que,

$$-2p = 3 \Leftrightarrow p = -\frac{3}{2} = -1,5$$

**b) Calcule algebraicamente el valor de  $c$ . (0,5 puntos)**

Utilizando el valor de  $p$  del apartado anterior obtenemos el valor de  $c$ ,

$$c = p^2 + 9 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 9 = \frac{9}{4} + 9 = \frac{45}{4} = 11,25$$

**c) Obtener las tres raíces de  $z^3 - 1 = i$  en el plano complejo en forma cartesiana. (1 punto)**

Despejamos  $z$  según,

$$z^3 - 1 = i \Leftrightarrow z^3 = 1 + i \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{1 + i}$$

Pasamos a forma polar al complejo  $w = 1 + i$ .

- Módulo:  $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- Argumento  $Arg(w) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ$

En tal caso,

$$z = \sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = (\sqrt{2}_{45^\circ+360^\circ \cdot k})^{1/3} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{\frac{45^\circ+360^\circ \cdot k}{3}}} = \sqrt[6]{2}_{\frac{45^\circ+360^\circ \cdot k}{3}}$$

Las soluciones en forma polar son,

- Si  $k = 0$ ,  $z_0 = \sqrt[6]{2}_{\frac{45^\circ+360^\circ \cdot 0}{3}} = \sqrt[6]{2}_{15^\circ}$
- Si  $k = 1$ ,  $z_1 = \sqrt[6]{2}_{\frac{45^\circ+360^\circ \cdot 1}{3}} = \sqrt[6]{2}_{135^\circ}$
- Si  $k = 2$ ,  $z_2 = \sqrt[6]{2}_{\frac{45^\circ+360^\circ \cdot 2}{3}} = \sqrt[6]{2}_{255^\circ}$

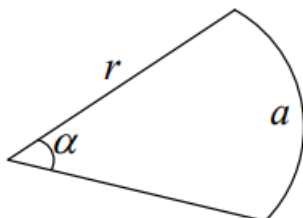
En forma binómica las soluciones quedarán de la forma,

- Si  $k = 0$ ,  $z_0 = \sqrt[6]{2}_{15^\circ} = \sqrt[6]{2} \cdot (\cos(15^\circ) + i \cdot \text{sen}(15^\circ)) = 1,084 + 0,2905i$
- Si  $k = 1$ ,  $z_1 = \sqrt[6]{2}_{135^\circ} = \sqrt[6]{2} \cdot (\cos(135^\circ) + i \cdot \text{sen}(135^\circ)) = -0,7937 + 0,7937i$
- Si  $k = 2$ ,  $z_2 = \sqrt[6]{2}_{255^\circ} = \sqrt[6]{2} \cdot (\cos(255^\circ) + i \cdot \text{sen}(255^\circ)) = -0,2905 - 1,0842i$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

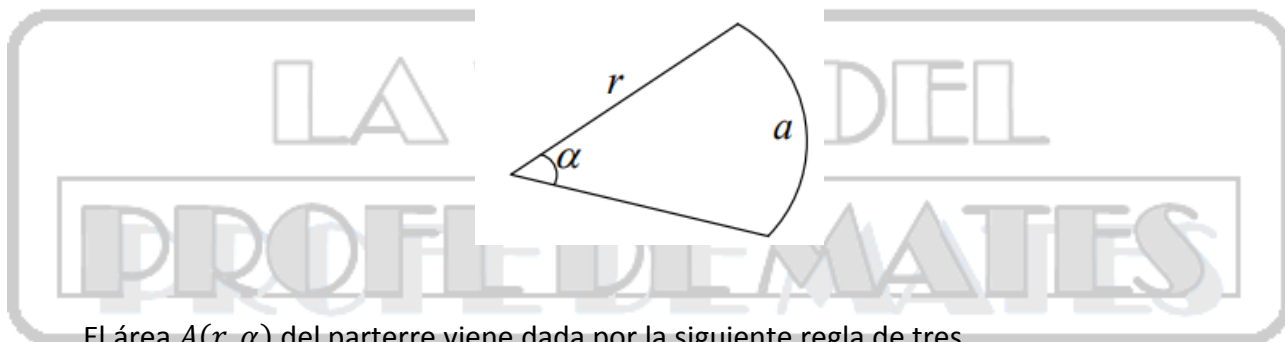
3. Resolver correctamente.

- (a) Un jardinero quiere hacer un parterre en forma de sector circular y que tenga de perímetro 20 m. Calcula algebraicamente el radio  $r$  que debe tomar para lograr que el área del parterre sea máxima.



- (b) Calcular algebraicamente la ecuación general de recta tangente a la función  $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$ , que sea paralela a la recta  $4x - y = 1$

- (a) Un jardinero quiere hacer un parterre en forma de sector circular y que tenga de perímetro 20 m. Calcula algebraicamente el radio  $r$  que debe tomar para lograr que el área del parterre sea máxima.



El área  $A(r, \alpha)$  del parterre viene dada por la siguiente regla de tres,

$$\begin{array}{l} \text{Ángulo} \quad \leftrightarrow \quad \text{Área} \\ 2\pi \text{ radianes} \quad \leftrightarrow \quad \pi r^2 \\ \alpha \quad \leftrightarrow \quad A(r, \alpha) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad A(r, \alpha) = \frac{\alpha \cdot \pi r^2}{2\pi} = \frac{\alpha \cdot r^2}{2}$$

La relación que existe entre el radio  $r$ , la longitud de arco  $a$  y el ángulo  $\alpha$  es,

$$\begin{array}{l} \text{Ángulo} \quad \leftrightarrow \quad \text{Longitud de arco} \\ 2\pi \text{ radianes} \quad \leftrightarrow \quad 2\pi r \\ \alpha \quad \leftrightarrow \quad a \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{2\pi r \alpha}{2\pi} = r\alpha$$

Como el perímetro del parterre mide 20 m entonces,

$$2r + a = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 2r + r\alpha = 20 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{20 - 2r}{r}$$

En ese caso, la función área a maximizar se puede reescribir como,

$$A(r, \alpha) = \frac{\alpha \cdot r^2}{2} \Leftrightarrow A(r) = \frac{\left(\frac{20 - 2r}{r}\right) \cdot r^2}{2} = 10r - r^2$$

Calculamos su derivada

$$A'(r) = 10 - 2r$$

Igualamos a cero y resolvemos la ecuación resultante, para calcular sus posibles extremos relativos,

$$A'(r) = 0 \Leftrightarrow 10 - 2r = 0 \Leftrightarrow r = 5 \text{ m}$$

Para comprobar que es un máximo, sustituimos el valor en la segunda derivada y vemos si es menor que cero,

$$A''(r) = -2 \Rightarrow A''(5) = -2 < 0$$

Por lo tanto, **el radio del parterre de máxima área mide  $r = 5 \text{ m}$**

**(b) Calcular algebraicamente la ecuación general de recta tangente a la función  $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2$ , que sea paralela a la recta  $4x - y = 1$**

La ecuación de la recta tangente a  $f(x)$  en  $x = a$  viene dada por,

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Como un vector director de la recta  $4x - y = 1$  es  $\vec{v}_r = (v_1, v_2) = (1, 4)$ , entonces su pendiente es

$$m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{1} = 4$$

Calculamos ahora la función derivada  $f'(x)$  para  $x \neq -1$ ,

$$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)^1 \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = 2 \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right) \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2x}{(x+1)^3}$$

En ese caso, la derivada debe coincidir con la pendiente de la recta. Por ello, resolvemos la ecuación que resulta de igualar la derivada con la pendiente:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(x+1)^3} = 4 &\Leftrightarrow 2x = 4 \cdot (x+1)^3 \Leftrightarrow x = 2 \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + 5x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación resultante,

	+2	+6	+5	+2
-2		-4	-4	-2
	+2	+2	+1	0

Por tanto, una solución es  $x = -2$  y la ecuación no tiene más soluciones ya que el discriminante de la ecuación

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

es negativo.

En tal caso, para  $x = -2$  tendremos que la recta tangente es paralela a la recta. Calculamos  $f(-2)$ .

$$f(-2) = \left(\frac{-2}{-2+1}\right)^2 = \left(\frac{-2}{-1}\right)^2 = 4$$

La ecuación de la recta tangente de la función  $f(x)$  paralela a la recta dada es,

$$y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2) \Leftrightarrow y - 4 = 4 \cdot (x + 2) \Leftrightarrow y = 4x + 12$$

LA WEB DEL

PROFESOR DE MATEMÁTICAS

[Puntuación máxima: 2, puntos]

4. Dada la función  $f(x) = x^2 \cdot (x^3 - x - 1) + (x - 1)^2$

a) Determine algebraicamente la monotonía y los extremos relativos de la función  $f(x)$ . (1 punto)

b) Estudia la curvatura y puntos de inflexión de la función  $f(x)$ . (1 punto)

a) Estudiar la monotonía y los extremos relativos de la función  $f(x)$ .

Como

$$f(x) = x^2 \cdot (x^3 - x - 1) + (x - 1)^2 = x^5 - x^3 - x^2 + x^2 - 2x + 1 = x^5 - x^3 - 2x + 1$$

Calculamos los extremos relativos de la función simplificada, igualando a cero la primera derivada y resolviendo. La función derivada de la función es,

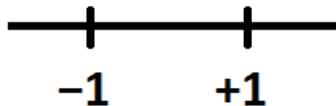
$$f(x) = x^5 - x^3 - 2x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$$

En ese caso

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{+3 \pm \sqrt{9 + 40}}{10} \Leftrightarrow x^2 = \frac{+3 \pm \sqrt{49}}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{+3 \pm 7}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ x^2 = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$$

En tal caso, creando las semirrectas e intervalos a partir de los valores anteriores al que unimos el valor de no dominio,



Estudiamos el signo de la primera derivada

Intervalo/semirrecta	Valor de prueba	$f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$	¿ $f(x)$ es creciente o decreciente?
$(-\infty, -1)$	$x = -2$	$f'(-2) = 80 - 12 - 2 > 0$	Creciente
$(-1, +1)$	$x = 0$	$f'(0) = -2 < 0$	Decreciente
$(+1, +\infty)$	$x = 3$	$f'(3) = 405 - 27 - 2 > 0$	Creciente

Por lo tanto,  $f(x)$  es creciente en  $(-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$ , es decreciente en  $(-1, +1)$ , tiene un máximo relativo en  $(-1, 3)$  y un mínimo relativo en  $(1, -1)$ .

**b) Estudia la curvatura y puntos de inflexión de la función  $f(x)$ .**

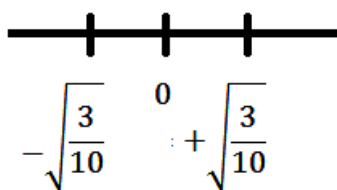
Calculamos los puntos de inflexión de la función igualando a cero la segunda derivada y resolviendo. La función derivada segunda de la función es,

$$f(x) = x^5 - x^3 - 2x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2 \Leftrightarrow f''(x) = 20x^3 - 6x$$

En ese caso

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 20x^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(10x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{3}{10} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{10}}$$

En tal caso, creando las semirrectas e intervalos a partir de los valores anteriores al que unimos el valor de no dominio,



Estudiamos el signo de la segunda derivada

Intervalo/semirrecta	Valor de prueba	$f''(x) = 2x(10x^2 - 3)$	¿ $f(x)$ es cóncava(U) o convexa (∩)?
$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$	$x = -100$	$(-) \cdot (+) = (-) < 0$	Cóncava con ramas hacia abajo (∩)
$\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right)$	$x = -0,1$	$(-) \cdot (-) = (+) > 0$	Cóncava con ramas hacia arriba (U)
$\left(0, +\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$	$x = +0,1$	$(+) \cdot (-) = (-) < 0$	Cóncava con ramas hacia abajo (∩)
$\left(+\sqrt{\frac{3}{10}}, +\infty\right)$	$x = 100$	$(+) \cdot (+) = (+) > 0$	Cóncava con ramas hacia arriba (U)

Por lo tanto,  $f(x)$  es cóncava con ramas hacia arriba en  $\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right) \cup \left(+\sqrt{\frac{3}{10}}, +\infty\right)$ , es cóncava con ramas hacia abajo en  $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right) \cup \left(0, +\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$ , tiene puntos de inflexión en  $\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}, 2,2105\right)$ ,  $(0,1)$  y  $\left(\sqrt{\frac{3}{10}}, -0,21047\right)$ ,

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

5. Dada la función  $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$

- (a) Determinar su dominio (0,5 puntos)
- (b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
- (c) Estudiar la continuidad de la función  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  en  $x = 0$  determinando si es continua o, en caso de no serlo, qué tipo de discontinuidad presenta. (1 punto)

**(a) Determinar su dominio.**

El dominio de la función es el conjunto de valores reales que verifican que,

$$4x^2 - x^4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (4 - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, +2]$$

**(b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

Calculamos los extremos relativos de la función simplificada, igualando a cero la primera derivada y resolviendo. La función derivada de la función es,

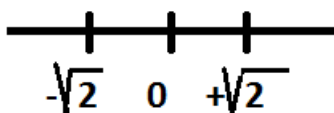
$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x^2 - x^4)^{-1/2} \cdot (8x - 4x^3) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{4x - 2x^3}{\sqrt{4x^2 - x^4}}$$

En ese caso

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x - 2x^3}{\sqrt{4x^2 - x^4}} = 0 \Leftrightarrow 4x - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$

En tal caso, creando las semirrectas e intervalos a partir de los valores anteriores al que unimos el valor de no dominio,



Estudiamos el signo de la primera derivada

Intervalo/semirrecta	$f'(x) = \frac{2x \cdot (2 - x^2)}{\sqrt{4x^2 - x^4}}$	¿ $f(x)$ es creciente o decreciente?
$[-2, -\sqrt{2})$	$\frac{(-) \cdot (-)}{(+)} = (+)$	Creciente
$(-\sqrt{2}, 0)$	$\frac{(-) \cdot (+)}{(+)} = (-)$	Decreciente
$(0, \sqrt{2})$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(+)} = (-)$	Creciente
$(+\sqrt{2}, +2]$	$\frac{(+)\cdot(-)}{(+)} = (+)$	Decreciente

Por lo tanto,  $f(x)$  es creciente en  $[-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$ , es decreciente en  $(-\sqrt{2}, 0) \cup (+\sqrt{2}, +2]$ , tiene máximos relativos en  $(-\sqrt{2}, 2)$  y  $(+\sqrt{2}, 2)$ . Tiene un mínimo relativo en  $(0, 0)$ .

**(c) Estudiar la continuidad de la función  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  en  $x = 0$  determinando si es continua o, en caso de no serlo, qué tipo de discontinuidad presenta.**

Calculamos los límites laterales de  $f(x)$  en  $x = 0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \cdot (4 - x^2)}}{-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \sqrt{(4 - x^2)}}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\sqrt{(4 - x^2)} \right) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \cdot (4 - x^2)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \sqrt{(4 - x^2)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \sqrt{(4 - x^2)} \right) = +2 \end{aligned}$$

Como existen los límites laterales pero

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$$

entonces la función presenta discontinuidad de salto finito.