lawebdelprofedemates.es

CONTROL 11

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Fecha: **Viernes, 29 de MAYO de 2026**

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 11 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.
  Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 3 puntos]

1. Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, se pide,

a) Determinar su dominio y estudiar su paridad. (0,5 + 0,25 puntos)

b) Calcular algebraicamente los siguientes límites, (1 punto)

$$b1) \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad b2) \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) + x)$$

c) Calcular algebraicamente las ecuaciones de las dos rectas tangentes a $f(x)$ que son perpendiculares a la recta $4x + 5y = 3$. (1,25 puntos)

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

2. Se sabe que la concentración de un fármaco en sangre, medida en miligramos por litro (mg/l), viene dada por la función:

$$g(t) = \frac{t}{t^2 + 4}$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas desde la administración del fármaco ($t \geq 0$).

a) Determina los intervalos de tiempo en los que la concentración está aumentando y en los que está disminuyendo. (1,5 puntos)

b) Determina en qué instante de tiempo la concentración es máxima. (0, 25 puntos)

c) ¿Cuál es el valor de dicha concentración máxima? (0,25 puntos)

d) ¿Qué ocurre con la concentración del fármaco en sangre en los pacientes que toman el fármaco cuando pasa mucho tiempo? Razona tu respuesta algebraicamente. (0,5 puntos)

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

3. Se Considera la función a trozos siguiente:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} & si\ x < 1 \\ ax^2+b & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-3}-1} & si\ 2 < x \end{cases}$$

(a) Calcula algebraicamente los valores de los parámetros a y b para que la función $h(x)$ sea continua en $x = 1$ y en $x = 2$. (1,5 puntos)

(b) Calcula algebraicamente las asíntotas de la función $h(x)$. (1 punto)

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

4. Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$$

Calcule sus puntos de inflexión y determine la curvatura de la función.

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

5. Se desea construir una caja de base rectangular de 9 litros de volumen de tal modo que una arista de la base sea el doble que la otra. Determinar las longitudes de las dimensiones de la caja para que el área total de sus seis caras sea mínima. ¿Cuál es esa superficie total mínima? Recuerda que en 1 dm^3 cabe 1 $litro$.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº11 DE MATEMÁTICAS I /ANÁLISIS Y ENFOQUES

[Puntuación máxima: 3 puntos]

1. Para la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, se pide,

a) Determinar su dominio y estudiar su paridad. (0,5 + 0,25 puntos)

b) Calcular algebraicamente los siguientes límites, (1 punto)

$$b1) \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad b2) \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) + x)$$

c) Calcular algebraicamente las ecuaciones de las dos rectas tangentes a $f(x)$ que son perpendiculares a la recta $4x + 5y = 3$. (1,25 puntos)

a) Determinar su dominio y estudiar su paridad.

El dominio estará formado por los valores $x \in \mathbb{R}$ tales que,

$$x^2 + 3x \geq 0$$

Como,

$$x^2 + 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3 \end{cases}$$

Si estudiamos el signo del polinomio en los intervalos/semirrectas en que se divide la recta real mediante los valores encontrados obtenemos,

Intervalo/semirrecta	$signo\ [x \cdot (x+3)]$	$¿\, x^2 + 3x > 0?$
$(-\infty, -3)$	$(-) \cdot (-) = (+)$	Sí
$(-3,0)$	$(-) \cdot (+) = (-)$	No
$(0, +\infty)$	$(+) \cdot (+) = (+)$	Sí

Por lo tanto, el dominio de la función es,

$$Dom(f) = (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$$

Comprobamos ahora si la función presenta simetría par probando si

$$f(-x) = f(x) \quad \forall\, x \in Dom(f)$$

En este caso,

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 3 \cdot (-x)} = \sqrt{x^2 - 3x} \neq f(x) \ , \quad \forall\, x \in Dom(f)$$

Por tanto, no presenta simetría par.

Comprobamos ahora si la función es impar probando si

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in Dom(f)$$

Como,

$$f(-x) = \sqrt{x^2 - 3x} \neq -f(x) \;\; , \;\; \forall\, x \in Dom(f)$$

tampoco presenta simetría impar.

b) Calcular algebraicamente los siguientes límites,

$$\boldsymbol{b1)} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{x}} \qquad\qquad \boldsymbol{b2)} \quad \lim_{x \to -\infty} (\boldsymbol{f(x) + x})$$

$$\boldsymbol{b1)} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{(-x)^2}}{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{-x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\boldsymbol{b2)} \quad \lim_{x \to -\infty} (\boldsymbol{f(x) + x}) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} + x\right) \overset{\infty - \infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{(-x)^2 + 3 \cdot (-x)} + (-x)\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 3x} - x\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 - 3x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 3x} + x\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 3x}\right)^2 - x^2}{\left(\sqrt{x^2 - 3x} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2}{\left(\sqrt{x^2 - 3x} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{\left(\sqrt{x^2 - 3x} + x\right)} \overset{\infty/\infty}{=}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{\left(\sqrt{x^2} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{(x + x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{2x} = -\frac{3}{2}$$

c) Calcular algebraicamente las ecuaciones de las dos rectas tangentes a $\boldsymbol{f(x)}$ que son perpendiculares a la recta $\boldsymbol{4x + 5y = 1}$

Un vector normal de la recta $4x + 5y = 3$ es $\vec{n} = (n_1, n_2) = (4{,}5)$. Dicho vector es director de cualquier recta perpendicular a la recta dada. Su pendiente vendrá dada por,

$$m = \frac{n_2}{n_1} = \frac{5}{4}$$

Igualaremos la pendiente de la recta tangente al valor anterior. Como la pendiente de la recta tangente viene dada por $f'(x)$, calcularemos la función derivada de la función $f(x)$ sobre su dominio,

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} = (x^2 + 3x)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 3x)^{1/2 - 1} \cdot (2x + 3) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 3x)^{-1/2} \cdot (2x + 3) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$$

Igualamos la función derivada con la pendiente de la recta perpendicular a la recta dada,

$$f'(x) = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 \cdot x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}} = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 \cdot x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x}} = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 6 = 5 \cdot \sqrt{x^2 + 3x}$$

Elevamos al cuadrado,

$$(4x + 6)^2 = \left(5 \cdot \sqrt{x^2 + 3x}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 16x^2 + 36 + 48x = 25x^2 + 75x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x^2 + 27x - 36 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$$= \begin{cases} x = +1 \\ x = -4 \end{cases}$$

En ese caso, la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$ es

$$y - 2 = \frac{5}{4} \cdot (x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{5x}{4} - \frac{5}{4} + 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{5x}{4} - \frac{3}{4}$$

Y la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -4$ es

$$y - 2 = \frac{5}{4} \cdot (x + 4) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{5x}{4} + 5 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{5x}{4} + 7$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

2. Se sabe que la concentración de un fármaco en sangre, medida en miligramos por litro (mg/l), viene dada por la función:

$$g(t) = \frac{t}{t^2 + 4}$$

donde$t$ es el tiempo transcurrido en horas desde la administración del fármaco ($t \geq 0$).

a) Determina los intervalos de tiempo en los que la concentración está aumentando y en los que está disminuyendo. (1,5 puntos)

b) Determina en qué instante de tiempo la concentración es máxima. (0, 25 puntos)

c) ¿Cuál es el valor de dicha concentración máxima? (0,25 puntos)

d) ¿Qué ocurre con la concentración del fármaco en sangre en los pacientes que toman el fármaco cuando pasa mucho tiempo? Razona tu respuesta algebraicamente. (0,5 puntos)

a) Determina los intervalos de tiempo en los que la concentración está aumentando y en los que está disminuyendo.

El dominio de la función racional es $\mathbb{R}$, toda vez que su denominador no se anula para ningún valor real.

La función es continua en su dominio. Calculamos el máximo absoluto de la función a partir de la función derivada,

$$g'(t) = \frac{1 \cdot (t^2 + 4) - t \cdot (2t)}{(t^2 + 4)^2} = \frac{t^2 + 4 - 2t^2}{(t^2 + 4)^2} = \frac{4 - t^2}{(t^2 + 4)^2}$$

Igualamos a cero la derivada y resolvemos,

$$g'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4 - t^2}{(t^2 + 4)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm 2$$

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos/semirrectas en que se divide el dominio en la recta real mediante los valores encontrados obtenemos,

Intervalo/semirrecta	$signo\left[\frac{(2+t)\cdot(2-t)}{(t^2+4)^2}\right]$	$g(t)$ es ,
$(0, +2)$	$\frac{(+)\cdot(+)}{(+)} = (+)$	creciente
$(+2, +\infty)$	$\frac{(+)\cdot(-)}{(+)} = (-)$	decreciente

Por tanto, la concentración del fármaco en sangre crece entre las 0 horas y las 2 horas y decrece de las 2 horas en adelante.

b) Determina en qué instante de tiempo la concentración es máxima.

Por lo tanto, la función presenta un máximo absoluto en $t = 2\ horas$.

c) ¿Cuál es el valor de dicha concentración máxima?

$$g(2) = \frac{2}{2^2+4} = \frac{2}{4+4} = \frac{2}{8} = 0{,}25\ mg/l$$

d) ¿Qué ocurre con la concentración del fármaco en sangre en los pacientes que toman el fármaco cuando pasa mucho tiempo? Razona tu respuesta algebraicamente.

Para responder a la pregunta, haremos el límite de la función cuando el tiempo aumenta indefinidamente,

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{t^2+4} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} = 0$$

En conclusión, la concentración del fármaco en sangre tiende a ser $0\ mg/l$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

3. Se Considera la función a trozos siguiente:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2} & si\ x < 1 \\ ax^2+b & si\ 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-3}-1} & si\ 2 < x \end{cases}$$

(a) Calcula algebraicamente los valores de los parámetros a y b para que la función $h(x)$ sea continua en $x = 1$ y en $x = 2$. (1,5 puntos)

(b) Calcula algebraicamente las asíntotas de la función $h(x)$. (1 punto)

(a) Calcula algebraicamente los valores de los parámetros $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ para que la función $\boldsymbol{h(x)}$sea continua en $\boldsymbol{x = 1}$ y en $\boldsymbol{x = 2}$.

- Para que la función sea continua en $x = 1$ debe suceder que,

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^+} h(x) = h(1)$$

Forzamos a que esto ocurra. Calculamos los límites laterales y la imagen de la función en la abcisa $x = 1$,

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1^-} h(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x^2+x-2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)\cdot\boldsymbol{(x-1)}}{(x+2)\cdot\boldsymbol{(x-1)}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)}{(x+2)} = \frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1^+} h(x)} = \lim_{x\to 1^+} (ax^2+b) = a+b$$

$$\boldsymbol{h(1)} = a\cdot 1^2 + b = a+b$$

Para que $h(x)$ sea continua en $x = 1$, igualamos los tres valores anteriores obteniendo la condición siguiente,

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^+} h(x) = h(1) \quad \Leftrightarrow \quad a+b = \frac{2}{3}$$

- Para que la función sea continua en $x = 2$ debe suceder que,

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^+} h(x) = h(1)$$

Forzamos a que esto ocurra.

Calculamos los límites laterales y la imagen de la función en la abcisa $x = 2$.

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 2^-} h(x)} = \lim_{x\to 2^-} (ax^2+b) = 4a+b$$

$$\lim_{x\to 2^+} \boldsymbol{h(x)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-3}-1} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{(x^2-2x)\cdot\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2-3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x^2-2x)\cdot\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2-1^2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x\cdot(x-2)\cdot\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{x\cdot\boldsymbol{(x-2)}\cdot\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{(x+2)\cdot\boldsymbol{(x-2)}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x\cdot\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{(x+2)} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\boldsymbol{h(2)} = a\cdot 2^2 + b = 4a + b$$

Para que $g(x)$ sea continua en $x = 2$, igualamos los tres valores anteriores obteniendo la condición siguiente,

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^+} h(x) = h(2) \quad \Leftrightarrow \quad 4a + b = 1$$

Resolvemos el sistema que hemos obtenido al juntar las dos condiciones,

$$\left.\begin{array}{r} a+b=2/3 \\ 4a+b=1 \end{array}\right\}$$

Al restar ambas ecuaciones obtenemos,

$$3a = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{9}$$

Como $a + b = 2/3$ entonces,

$$b = \frac{2}{3} - a = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

La función $\boldsymbol{h(x)}$ es continua en $\boldsymbol{x = 1}$ y $\boldsymbol{x = 2}$ si y solo si $\boldsymbol{a = 1/9}$ y $\boldsymbol{b = 5/9}$.

(b) Para los valores de los parámetros encontrados en el apartado (a), calcula algebraicamente las asíntotas de la función $\boldsymbol{g(x)}$.

Si la función es continua en $x = 1$ y en $x = 2$ entonces de tener asíntotas verticales, podrían presentarse, por una parte, para aquellos valores por debajo de 1en los que el denominador se anule,

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = +1 \end{cases}$$

Como $-2 \in (-\infty, 1)$ y $+1 \notin (-\infty, 1)$, **la función tiene una asíntota vertical en $x = -2$** donde,

$$\lim_{x \to -2^-} h(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \to -2^+} h(x) = \lim_{x \to -2^+} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} \right) = -\infty$$

Por otra parte, podrían presentarse asíntotas verticales para valores por encima de 2 en los que el denominador se anule,

$$\sqrt{x^2 - 3} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 - 3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2$$

Como $-2 \notin (2, +\infty)$ y $+2 \notin (2, +\infty)$ no hay asíntotas oblicuas en valores por encima de 2.

Estudiamos las asíntotas horizontal u oblicua, en su tendencia hacia $-\infty$. Como,

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Entonces la función tiene asíntota horizontal en $y = 1$ en su tendencia hacia $-\infty$.

Estudiamos las asíntotas horizontal u oblicua, en su tendencia hacia $+\infty$. Como,

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 3} - 1} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Entonces **no tiene asíntota horizontal.**

Estudiamos si existe una asíntota oblicua de la forma $y = mx + n$, en su tendencia hacia $+\infty$, con,

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} \quad , \quad n = \lim_{x \to +\infty} (h(x) - mx)$$

En ese caso,

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 3} - 1}}{x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x \cdot \left(\sqrt{x^2 - 3} - 1\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\boldsymbol{x} \cdot (x - 2)}{\boldsymbol{x} \cdot \left(\sqrt{x^2 - 3} - 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 3} - 1} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{\sqrt{x^2 - 3} - 1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x - x \cdot \sqrt{x^2 - 3} + x}{\sqrt{x^2 - 3} - 1} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - x - \sqrt{x^4 - 3x^2}}{\sqrt{x^2 - 3} - 1} \right) \overset{(\infty - \infty)/\infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x^2 - x - \sqrt{x^4 - 3x^2}\right) \cdot \left(x^2 - x + \sqrt{x^4 - 3x^2}\right)}{\left(\sqrt{x^2 - 3} - 1\right) \cdot \left(\left(x^2 - x + \sqrt{x^4 - 3x^2}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - x)^2 - \left(\sqrt{x^4 - 3x^2}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2 - 3} - 1\right) \cdot \left(\left(x^2 - x + \sqrt{x^4 - 3x^2}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + x^2 - 2x^3 - x^4 + 3x^2}{\left(\sqrt{x^2 - 3} - 1\right) \cdot \left(\left(x^2 - x + \sqrt{x^4 - 3x^2}\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^3 + 4x^2}{\left(\sqrt{x^2 - 3} - 1\right) \cdot \left(\left(x^2 - x + \sqrt{x^4 - 3x^2}\right)\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^3}{\left(\sqrt{x^2}\right) \cdot \left(\left(x^2 + \sqrt{x^4}\right)\right)} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^3}{x \cdot (2x^2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^3}{2x^3} = -1$$

Por lo tanto, **tiene una asíntota oblicua en $y = x - 1$ en su tendencia hacia $+\infty$.**

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

4. Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x}{x^2+3}$$

calcule sus puntos de inflexión y determine la curvatura de la función.

El dominio de la función es el conjunto de valores reales que no cumplen que,

$$x^2+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$$

Por tanto, el dominio de la función es,

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

Para calcular los puntos de inflexión y la curvatura de la función, estudiaremos el signo de $f''(x)$.

Calculamos $f'(x)$ sobre su dominio y simplificamos,

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+3) - x\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{x^2+3-2x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$$

Calculamos $f''(x)$ sobre su dominio y simplificamos,

$$f'(x) = \frac{-2x\cdot\mathbf{(x^2+3)^2} - (3-x^2)\cdot 2\cdot\mathbf{(x^2+3)}\cdot 2x}{\mathbf{(x^2+3)^4}} =$$

$$= \frac{-2x\cdot\mathbf{(x^2+3)} - (3-x^2)\cdot 2\cdot 2x}{\mathbf{(x^2+3)^3}} = \frac{-2x^3-6x-12x+4x^3}{(x^2+3)^3} = \frac{2x^3-18x}{(x^2+3)^3}$$

Igualamos a cero $f''(x)$ y resolvemos la ecuación obteniendo los posibles puntos de inflexión.

$$f''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^3-18x}{(x^2+3)^3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^3-18x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x\cdot(x^2-9)=0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=\ \ 0 \\ x=+3 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f''(x)$ a partir de los intervalos y semirrectas en que se divide el dominio de la función mediante los valores anteriores,

Intervalos/semirrectas	$Signo\left(f''(x)\right) = Signo\left(\frac{2x\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+3)^3}\right)$	La función $f(x)$ es …
$(-\infty,-3)$	$\frac{(-)\cdot(-)\cdot(-)}{(+)} = (-)$	Cóncava de ramas hacia abajo (∩) - Convexa
$(-3,0)$	$\frac{(-)\cdot(+)\cdot(-)}{(+)} = (+)$	Cóncava de ramas hacia arriba (∪) - Cóncava
$(0,+3)$	$\frac{(+)\cdot(+)\cdot(-)}{(+)} = (-)$	Cóncava de ramas hacia abajo (∩) - Convexa
$(+3,+\infty)$	$\frac{(+)\cdot(+)\cdot(+)}{(+)} = (+)$	Cóncava de ramas hacia arriba (∪) - Cóncava

En ese caso, concluimos que,

- $f(x)$ es cóncava con ramas hacia arriba(cóncava ∪) para $x \in (-3{,}0) \cup (+3, +\infty)$
- $f(x)$ es cóncava con ramas hacia abajo (convexa ∩) para $x \in (-\infty, -3) \cup (0, +3)$
- $f(x)$ tiene tres puntos de inflexión en

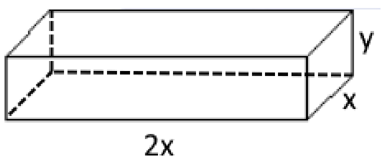
$$P_1 = (-3, f(-3)) = \left(-3, \frac{-3}{12}\right) = \left(-3, -\frac{1}{4}\right)$$

$$P_2 = (0, f(0)) = \left(0, \frac{0}{3}\right) = (0{,}0)$$

$$P_3 = (+3, f(+3)) = \left(+3, \frac{3}{12}\right) = \left(3, \frac{1}{4}\right)$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

5. Se desea construir una caja de base rectangular de 9 litros de volumen de tal modo que una arista de la base sea el doble que la otra. Determinar las longitudes de las dimensiones de la caja para que el área total de sus seis caras sea mínima. ¿Cuál es esa superficie total mínima? Recuerda que en 1 dm^3 cabe 1 $litro$.



Consideramos el paralelogramo con base el rectángulo de dimensiones $x\ dm$ de ancho y $2x\ dm$ de largo en el que la altura mide $y\ dm$.

La relación que existe entre la altura y el ancho viene determinada por su volumen

$$9 = 2x \cdot x \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad 9 = 2x^2 y$$

La función a minimizar es la superficie total de sus caras, que es,

$$S(x,y) = 2 \cdot (2xy) + 2 \cdot (2x^2) + 2 \cdot (xy) \quad \Leftrightarrow \quad S(x,y) = 4x^2 + 6xy$$

Por lo tanto, como

$$y = \frac{9}{2x^2}$$

la función objetivo se puede simplificar a,

$$S(x) = 4x^2 + 6x \cdot \frac{9}{2x^2} \quad \Leftrightarrow \quad S(x) = 4x^2 + \frac{27}{x}$$

Si derivamos para calcular el máximo,

$$S'(x) = 8x - \frac{27}{x^2}$$

Igualamos a cero la derivada y resolvemos la ecuación, obteniendo el posible máximo de la función,

$$S'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x - \frac{27}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8x^3 - 27}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x^3 - 27 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x^2 = 27 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} = 1{,}5\ dm$$

Comprobamos que ese valor es el que hace la superficie máxima. Como

$$S''(x) = 8 + \frac{54}{x^3}$$

Y si sustituimos $x = 1{,}5$ en $S''(x)$ obtenemos valor negativo,

$$S''(1{,}5) = 8 + \frac{54}{(1{,}5)^3} < 0$$

entonces $x = 1{,}5\ dm$ es un máximo de la función para el cuál, la longitud del largo de la base es

$$2 \cdot 1{,}5\ dm\ =\ 3\ dm$$

y la altura de la caja mide

$$y = \frac{9}{2x^2} = \frac{9}{2 \cdot 1{,}5^2} = \frac{9}{2 \cdot 2{,}25} = \frac{9}{4{,}5} = 2\ dm$$

La superficie total mínima medirá:

$$S(1{,}5) = 4 \cdot 1{,}5^2 + \frac{27}{1{,}5} = 9\ dm^2 + 18\ dm^2 = 27\ dm^2$$