lawebdelprofedemates.es

CONTROL 10

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Fecha: **LUNES, 11 de MAYO de 2026**

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.

  Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

1. Clasifica las indeterminaciones de los siguientes límites y calcúlalos algebraicamente,

$a)\quad \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} + x\right)$

$b)\quad \lim_{x \to 2} \left(\frac{4}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

2. Dada la función real de variable real

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & si\ x<1 \\ ax+b & si\ 1\leq x\leq 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & si\ 3<x \end{cases}$$

(a) Calcula algebraicamente los valores de los parámetros a y b para que la función $g(x)$ sea **<u>continua en $x=1$ y en $x=3$.</u>** (1,5 puntos)

Supongamos que has encontrado los valores de los parámetros a y b para que la función $g(x)$ sea continua en $x=1$ y en $x=3$. En ese caso,

(b) Determina $Dom(g)$. (0,5 puntos)

(c) Calcula algebraicamente las asíntotas de la función $g(x)$. (0,5 puntos)

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

3.Se considera el polinomio con coeficientes complejos:

$$p(z) = z^3 + (-6 + 5i)z^2 + (9 - 24i)z + 18 + 13i$$

a) Calcule $a, b, c \in \mathbb{C}$ para que $p(z) = (z + i) \cdot (az^2 + bz + c)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. (1 punto)

b) Resuelva la ecuación $p(z) = 0$. (1,5 puntos)

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

4. Dada la función $\mathrm{f(x)} = \frac{|\mathrm{x}^2-1|}{|\mathrm{x}|-1}$

(a) Determina el dominio de la función. (0,25 puntos)

(b) Estudia algebraicamente si la función es par o impar. (0,25 puntos)

(c) Teniendo en cuenta el dominio, reescribe la función $\mathrm{f(x)}$ como función a trozos lo más simplificada posible en cada uno de sus trozos. (0,75 puntos)

(d) Calcula algebraicamente los siguientes límites (0,5 puntos)

$d1)\ \lim_{x \to -1^-} f(x) \qquad d2)\ \lim_{x \to -1^+} f(x) \qquad d3)\ \lim_{x \to +1^-} f(x) \qquad d4)\ \lim_{x \to +1^+} f(x)$

(e) Justifica si la función $\mathrm{f(x)}$ presenta discontinuidad en $x = -1$ y en $x = +1$ determinando, de ser así, el tipo de discontinuidad. (0,25 puntos)

(f) Determina algebraicamente todas las asíntotas de la función. (0,5 puntos)

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº10 DE MATEMÁTICAS I /ANÁLISIS Y ENFOQUES

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

1. Clasifica las indeterminaciones de los siguientes límites y calcúlalos algebraicamente,

$a)\quad \lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$

$b)\quad \lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

$$\boldsymbol{a)}\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)}\overset{\infty/\infty}{=}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2}-x\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{(|x|-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{(-x-x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-2x}=-1$$

$$\boldsymbol{b)}\quad \lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-2}}\overset{1^\infty}{=}e^{\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)}\cdot\left(\frac{4}{x+2}-1\right)}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)}\cdot\left(\frac{4-x-2}{x+2}\right)}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)}\cdot\left(\frac{2-x}{x+2}\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)}}=e^{\lim_{x\to 2}\frac{-1}{x+2}}=e^{-1/4}$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

2. Dada la función real de variable real

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & si\ x<1\\ ax+b & si\ 1\le x\le 3\\ \dfrac{x^2-9}{x-3} & si\ 3<x\end{cases}$$

(a) Calcula algebraicamente los valores de los parámetros a y b para que la función $g(x)$ sea continua en $x=1$ y en $x=3$. (1,5 puntos)

Supongamos que has encontrado los valores de los parámetros a y b para que la función $g(x)$ sea continua en $x=1$ y en $x=3$. En ese caso,

(b) Determina $Dom(g)$. (0,5 puntos)

(c) Calcula algebraicamente las asíntotas de la función $g(x)$. (0,5 puntos)

(a) Calcula algebraicamente los valores de los parámetros a y b para que la función $g(x)$ sea continua en $x=1$ y en $x=3$.

- Para que la función sea continua en $x=1$ debe suceder que,

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^+} g(x)=g(1)$$

Forzamos a que esto ocurra. Calculamos los límites laterales y la imagen de la función en la abcisa.

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}^{0/0}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+3-4}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$$

$$g(1)=a\cdot 1+b=a+b$$

Para que $g(x)$ sea continua en $x=1$, igualamos los tres valores anteriores obteniendo la condición siguiente,

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^+} g(x)=g(1)\quad\Leftrightarrow\quad a+b=\frac{1}{4}$$

- Para que la función sea continua en $x = 3$ debe suceder que,

$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = \lim_{x \to 3^+} g(x) = g(1)$$

Forzamos a que esto ocurra. Calculamos los límites laterales y la imagen de la función en la abcisa.

$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = \lim_{x \to 3^-} (ax + b) = a \cdot 3 + b = 3a + b$$

$$\lim_{x \to 3^+} g(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x + 3) \cdot (x - 3)}{(x - 3)} = \lim_{x \to 3^+} (x + 3) = 6$$

$$g(3) = a \cdot 3 + b = 3a + b$$

Para que $g(x)$ sea continua en $x = 3$, igualamos los tres valores anteriores obteniendo la condición siguiente,

$$\lim_{x \to 3^-} g(x) = \lim_{x \to 3^+} g(x) = g(3) \quad \Leftrightarrow \quad 3a + b = 6$$

Resolvemos el sistema que hemos obtenido al juntar las dos condiciones,

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 1/4 \\ 3a + b = 6 \end{array}\right\}$$

Al restar ambas ecuaciones obtenemos,

$$2a = \frac{23}{4} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{23}{8} = 2.875$$

Como $a + b = 1/4$ entonces,

$$b = \frac{1}{4} - a = \frac{1}{4} - \frac{23}{8} = -\frac{21}{8} = -2.625$$

La función $g(x)$ es continua en $x = 1$ y $x = 3$ si y solo si $a = 23/8$ y $b = -21/8$.

(b) Para los valores de los parámetros encontrados en el apartado anterior, determina $Dom(g)$.

Si la función es continua en $x = 1$ y en $x = 3$ entonces el único problema que puede tener la función, en cuanto a dominio se refiere, se presenta en el trozo por debajo de 1 ya que, debe ocurrir que la raíz cuadrada exista y eso solo puede suceder si

$$x + 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -3$$

Por lo tanto,

$$Dom(g) = [-3, +\infty)$$

(c) Para los valores de los parámetros encontrados en el apartado (a), calcula algebraicamente las asíntotas de la función $g(x)$.

La función no puede tener asíntotas verticales ya que en los valores que anulan los denominadores hay continuidad.

Además, como el dominio de la función es

$$Dom(g) = [+3, +\infty)$$

De existir asíntotas horizontales u oblicuas, solo pueden ser en tendencia hacia $+\infty$. En ese caso,

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Además, como,

$$(x^2 - 9):(x - 3) = (x + 3)$$

Entonces, la función presenta asíntota horizontal en $y = x + 3$ en la tendencia hacia $+\infty$.

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

3.Se considera el polinomio con coeficientes complejos:

$$p(z) = z^3 + (-6+5i)z^2 + (9-24i)z + 18 + 13i$$

a) Calcule $a, b, c \in \mathbb{C}$ para que $p(z) = (z+i)\cdot(az^2+bz+c)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. (1 punto)

b) Resuelva la ecuación $p(z) = 0$. (1,5 puntos)

a) Calcule $\boldsymbol{a, b, c} \in \mathbb{C}$ para que $\boldsymbol{p(z) = (z+i)\cdot(az^2+bz+c)}$, para todo $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}$.

Puesto que $z = -i$ es raíz compleja del polinomio, procedemos a dividir el polinomio $p(z)$ entre $(z+i)$ para así obtener el polinomio az^2+bz+c.

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & -6+5i & 9-24i & 18+13i \\ -i & & -\ \ i & 4+\ \ 6i & -18-13i \\ \hline & 1 & -6+4i & 13-18i & 0 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$a = 1 \quad , \quad b = -6+4i \quad , \quad c = 13-18i$$

b) Resuelva la ecuación $\boldsymbol{p(z) = 0}$.

Sabemos que una de las soluciones de la ecuación es el complejo $z = -i$. Calculamos los otros dos resolviendo la ecuación,

$$z^2 + (-6+4i)\,z + (13-18i) = 0$$

Aplicando la fórmula de la ecuación de segundo grado,

$$z = \frac{-(-6+4i) \pm \sqrt{(-6+4i)^2 - 4\cdot 1\cdot(13-18i)}}{2\cdot 1} =$$

$$= \frac{6-4i \pm \sqrt{36-16-48i-52+72i}}{2\cdot 1} = \frac{6-4i \pm \sqrt{-32+24i}}{2} = 3-2i \pm \sqrt{-8+6i}$$

Calculamos las dos soluciones $a \pm bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ del radical complejo $\sqrt{-8+6i}$ según,

$$\sqrt{-8+6i} = a+bi \quad \Leftrightarrow \quad -8+6i = (a+bi)^2 \quad \Leftrightarrow \quad -8+6i = a^2-b^2+2abi$$

Por tanto,

$$\sqrt{-8+6i} = \sqrt{1-9+6i} = \sqrt{1^2+(3i)^2+6i} = \sqrt{(1+3i)^2} = \pm(1+3i)$$

Otro modo de resolver la raíz sería:

$$\left.\begin{array}{c} -8 = a^2-b^2 \\ 6i = 2abi \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 8 = -a^2+b^2 \\ 3 = ab \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 8 = -a^2+(3/a)^2 \\ b = 3/a \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 8a^2 = -a^4+9 \\ b = 3/a \end{array}\right\}$$

Resolvemos la ecuación bicuadrada con el cambio $t = a^2$

$$a^4+8a^2-9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2+8t-9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2} = \begin{cases} t = -9 \\ t = 1 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio,

- Si $t = -9$ entonces $a^2 = -9$, cosa que es imposible ya que $a \in \mathbb{R}$.
- Si $t = 1$ entonces $a^2 = 1$ y en ese caso, $a = \pm 1$

Y entonces,

- Si $a = 1$, entonces $b = 3$
- Si$a = -1$ entonces $b = -3$.

Por lo tanto, el radical tiene dos soluciones,

$$\sqrt{-8+6i} = \begin{cases} +1+3i \\ -1-3i \end{cases}$$

y, en ese caso,

$$z = 3 - 2i \pm \sqrt{-8+6i} = \begin{cases} 3-3i+1+3i = 4+\quad i \\ 3-2i-1-3i = 2-5i \end{cases}$$

En conclusión, las raíces del polinomio son

$$z_1 = -i \quad , \quad z_1 = 4 + i \quad , \quad z_1 = 2 - 5i$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

4. Dada la función $f(x) = \frac{|x^2-1|}{|x|-1}$

(a) Determina el dominio de la función. (0,25 puntos)

(b) Estudia algebraicamente si la función es par o impar. (0,25 puntos)

(c) Teniendo en cuenta el dominio, reescribe la función $f(x)$ como función a trozos lo más simplificada posible en cada uno de sus trozos. (0,75 puntos)

(d) Calcula algebraicamente los siguientes límites (0,5 puntos)

$$d1)\ \lim_{x \to -1^-} f(x) \qquad d2)\ \lim_{x \to -1^+} f(x) \qquad d3)\ \lim_{x \to +1^-} f(x) \qquad d4)\ \lim_{x \to +1^+} f(x)$$

(e) Justifica si la función $f(x)$ presenta discontinuidad en $x = -1$ y en $x = +1$ determinando, de ser así, el tipo de discontinuidad. (0,25 puntos)

(f) Determina algebraicamente todas las asíntotas de la función. (0,5 puntos)

(a) Determina el dominio de la función.

El dominio de la función serán todos los valores reales para los que no se anula el denominador. Procedemos a anular el denominador y resolvemos,

$$|x| - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{Si } x \geq 0 \ \text{ entonces} & x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \\ \text{Si } x < 0 \ \textit{ entonces} & -x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \end{cases}$$

Por tanto, el dominio de la función es,

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$$

(b) Estudia algebraicamente si la función es par o impar.

La función será par si

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$$

Sea $\forall\, x \in \mathbb{R}$ entonces,

$$f(-x) = \frac{|(-x)^2 - 1|}{|-x| - 1} = \frac{|x^2 - 1|}{|x| - 1} = f(x)$$

Por lo tanto, la función presenta simetría par.

(c) Teniendo en cuenta el dominio, reescribe la función $f(x)$ como función a trozos.

Si reescribimos a la función a trozos, tendremos que como,

$$|x^2 - 1| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

$$|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Teniendo en cuenta que $x=-1$ y $x=1$ no son valores de dominio, la función queda del siguiente modo, reescrita a trozos,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{x}^2-1}{-\mathrm{x}-1} & si\ \ x<-1\\ \dfrac{1-\mathrm{x}^2}{-\mathrm{x}-1} & si\ \ -1<x\leq 0\\ \dfrac{1-\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}-1} & si\ \ 0<x<1\\ \dfrac{\mathrm{x}^2-1}{\mathrm{x}-1} & si\ \ 1<x\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=\begin{cases}1-\mathrm{x} & si\ \ x<-1\\ \mathrm{x}-1 & si\ \ -1<x\leq 0\\ -\mathrm{x}-1 & si\ \ 0<x<1\\ \mathrm{x}+1 & si\ \ 1<x\end{cases}$$

(d) Calcula los siguientes límites,

$$\boldsymbol{d1})\ \lim_{x\to -1^-} f(x) \qquad \boldsymbol{d2})\ \lim_{x\to -1^+} f(x) \qquad \boldsymbol{d3})\ \lim_{x\to +1^-} f(x) \qquad \boldsymbol{d4})\ \lim_{x\to +1^+} f(x)$$

Calculamos dichos límites,

$$d1)\quad \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{\mathrm{x}^2-1}{-\mathrm{x}-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to -1^-}\frac{(\mathrm{x}+1)\cdot(\mathrm{x}-1)}{-(\mathrm{x}+1)}=\lim_{x\to -1^-}(1-\mathrm{x})=2$$

$$d2)\quad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1-\mathrm{x}^2}{-\mathrm{x}-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to -1^+}\frac{-(\mathrm{x}+1)\cdot(\mathrm{x}-1)}{-(\mathrm{x}+1)}=\lim_{x\to -1^+}(\mathrm{x}-1)=-2$$

$$d3)\quad \lim_{x\to +1^-} f(x)=\lim_{x\to +1^-}\frac{1-\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to +1^-}\frac{-(\mathrm{x}+1)\cdot(\mathrm{x}-1)}{\mathrm{x}-1}=\lim_{x\to +1^-}(-\mathrm{x}-1)=-2$$

$$d4)\quad \lim_{x\to +1^+} f(x)=\lim_{x\to +1^+}\frac{\mathrm{x}^2-1}{\mathrm{x}-1}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to +1^+}\frac{(\mathrm{x}+1)\cdot(\mathrm{x}-1)}{\mathrm{x}-1}=\lim_{x\to +1^+}(\mathrm{x}-1)=2$$

(e) Justifica si la función $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ presenta discontinuidad en $x=-1$ y en $x=+1$ determinando, de ser así, el tipo de discontinuidad.

En $x=-1$, por el apartado anterior, tendremos que los límites laterales existen pero no son iguales por lo que hay una discontinuidad de salto finito.

En $x=+1$, por el apartado anterior, tendremos que los límites laterales existen pero no son iguales por lo que hay una discontinuidad de salto finito.

(f) Determina algebraicamente todas las asíntotas de la función.

La función no tiene asíntotas verticales por lo visto anteriormente.

Como,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{-x - 1} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

No tiene asíntotas horizontales.

En cuanto a las asíntotas oblicuas tiene dos.

- **Para la tendencia hacia** $-\infty$ tenemos que como

$$(x^2 - 1) : [-(x - 1)] = -x - 1$$

entonces la función presenta una asíntota oblicua $y = -x - 1$.

- **Para la tendencia hacia** $+\infty$ tenemos que como

$$(x^2 - 1) : (x - 1) = x + 1$$

entonces la función presenta una asíntota oblicua $y = x + 1$.