CUADERNILLO Nº 8

Análisis y enfoques
Matemáticas I

Entrega límite **MIÉRCOLES, 27 de MAYO de 2026 (hora de inicio de clase)**

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

---

nstrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10 puntos.
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$Nota\ def. = \ Notal\ total/(Días\ de\ retraso + 1)$$

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

[Puntuación máxima. 3 puntos]

1. Una función real de variable real viene dada por la expresión analítica $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

a) Determine el dominio de la función $f(x)$. (0,25 puntos)

b) Determine algebraicamente los puntos de corte con los ejes de coordenadas. (0,5 puntos)

c) Analice la monotonía de la función $f(x)$ mediante la función derivada, determinando algebraicamente los intervalos/semirrectas de crecimiento y de decrecimiento. (0,75 puntos)

d) Calcule, si existen, los puntos de máximo y mínimo relativo de la función $f(x)$. (0,25 puntos)

e) Estudie algebraicamente, la curvatura de la función $f(x)$. (0,75 puntos)

f) Calcule, si existen, los puntos de inflexión de $f(x)$. (0,25 puntos)

g) Represente la función sobre unos ejes coordenados señalando los puntos de corte con los ejes de coordenadas, los puntos críticos, el punto de inflexión y las conclusiones del resto de apartados respecto al dominio y la monotonía de la función. (0,25 puntos)

[Puntuación máxima. 4 puntos]

2. Una función real de variable real viene dada por la expresión analítica $g(x) = \frac{x^4}{x^3-2}$.

a) Determine el dominio de la función $g(x)$. (0,25 puntos)

b) Determine algebraicamente los puntos de corte de $g(x)$ con los ejes de coordenadas. (0,25 puntos)

c) Calcule algebraicamente todas las asíntotas de la función $g(x)$, determinando su ecuación analítica. (0,75 puntos)

d) En cada valor donde hay asíntota vertical estudie los límites laterales aportando la tendencia en cada uno de ellos. (0,5 puntos)

e) Analice algebraicamente la monotonía de la función $g(x)$ determinando los intervalos/semirrectas de crecimiento/decrecimiento mediante la derivada. (0,75 puntos)

f) Calcule, si existen, los puntos de máximo y mínimo de la función $g(x)$. (0,25 puntos)

g) Estudie algebraicamente la curvatura de la función $f(x)$. (0,75 puntos)

h) Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$. (0,25 puntos)

i) Represente la función $g(x)$ sobre unos ejes coordenados señalando los puntos de corte con los ejes de coordenadas, los puntos críticos y las conclusiones del resto de apartados respecto al dominio y la monotonía de la función. (0,25 puntos)

[Puntuación máxima. 1,5 puntos]

3. Determine los valores de a y de b para que la función,

$$f(x) = \begin{cases} a^2x + b & si \quad x < -1 \\ bx^2 + a & si \quad -1 \leq x \leq 2 \\ (bx)^2 & si \quad 2 < x \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

[Puntuación máxima. 1,5 puntos]

4. Resuelva **algebraicamente** los siguientes dos problemas:

(a) La cantidad de bacterias en un cultivo, medida en millones, viene dada por la función:

$$B(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 10$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas desde el inicio del experimento y el estudio solo dura $5\ horas$ (es decir, $0 \leq t \leq 5$).

a1) Determina en qué instantes de tiempo se alcanzan la cantidad máxima y mínima de bacterias dentro de ese intervalo de 5 horas. (1 punto)

a2) ¿Cuál es la cantidad máxima y mínima de bacterias durante el experimento? (0,25 puntos)

(b) Se desea fabricar una caja abierta de base cuadrada, con un volumen total de $108\ cm^3$. Los laterales se fabrican con un material que cuesta $2\ €/cm^2$ y la base con un material que cuesta $4\ €/cm^2$. Calcula las dimensiones de la caja (lado de la base y altura) para que el coste de fabricación sea mínimo. ¿Cuál es ese coste mínimo?

[Puntuación máxima. 3 puntos]

1. Una función real de variable real viene dada por la expresión analítica $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

a) Determine el dominio de la función $f(x)$. (0,25 puntos)

b) Determine algebraicamente los puntos de corte con los ejes de coordenadas. (0,5 puntos)

c) Analice la monotonía de la función $f(x)$ mediante la función derivada, determinando algebraicamente los intervalos/semirrectas de crecimiento y de decrecimiento.(0,75 puntos)

d) Calcule, si existen, los puntos de máximo y mínimo relativo de la función $f(x)$. (0,25 puntos)

e) Estudie algebraicamente, la curvatura de la función $f(x)$. (0,75 puntos)

f) Calcule, si existen, los puntos de inflexión de $f(x)$. (0,25 puntos)

g) Represente la función sobre unos ejes coordenados señalando los puntos de corte con los ejes de coordenadas, los puntos críticos, el punto de inflexión y las conclusiones del resto de apartados respecto al dominio y la monotonía de la función. (0,25 puntos)

1. Dominio de la función.

La función es polinómica por lo que su dominio es,

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

2. Puntos de corte.

- **<u>Con el eje OX.</u>**

Hacemos $y = 0$ y resolvemos calculando las abcisas donde se producen los cortes.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 2x^2 + 1 = 0$$

Aplicamos el método de Ruffini obteniendo $x = 1$,

	$+1$	-2	0	$+1$
$+1$		$+1$	-1	-1
	$+1$	-1	-1	0

Resolvemos la ecuación resultante de igualar a cero el cociente anterior,

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto, los puntos de corte con el eje OX son,

$$\left(\frac{+1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \quad , \quad (1, 0) \quad , \quad \left(\frac{+1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

Es decir,

$$(-0'62, 0) \quad , \quad (1, 0) \quad , \quad (1'62, 0)$$

- **Con el eje OY.**

  Hacemos $x = 0$ y sustituimos en la función

$$f(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$$

  Por lo tanto, el punto de corte con el eje OY es,

$$(0, 1)$$

3. Asíntotas.

Al ser una función polinómica no tiene asíntotas verticales. Tampoco horizontal u oblicua ya que,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (x^3 - 2x^2 + 1) = \pm\infty$$

4. Extremos relativos y monotonía.

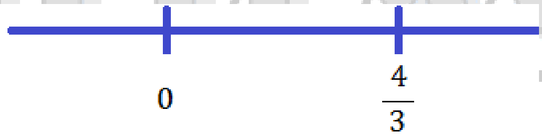
Calculamos la derivada de la función,

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f´(x) = 3x^2 - 4x$$

Igualamos a cero la derivada,

$$f´(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (3x - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la primera derivada en los intervalos y semirrectas en los que se divide la recta real a partir de los valores anteriores.



Intervalo/semirrecta	Valor de prueba	$x \cdot (3x - 4)$	$f(x)$ es Creciente/Decreciente
$(-\infty, 0)$	$x = -1$	$(-) \cdot (-) = (+)$	Creciente
$\left(0, \frac{4}{3}\right)$	$x = +1$	$(+) \cdot (-) = (-)$	Decreciente
$\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$	$x = 2$	$(+) \cdot (+) = (+)$	Creciente

Por lo tanto, $f(x)$ es,

- Creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$.
- Decreciente en $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

y $f(x)$ tiene

- Un máximo relativo en $(0, f(0)) = (0, 1)$.
- Un mínimo relativo en $\left(\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{27}\right) = (1´\hat{3}, -0´29)$.

5. Puntos de inflexión y curvatura.

Calculamos la segunda derivada de la función,

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 4x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6x - 4$$

Igualamos a cero la derivada,

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{6} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en los intervalos y semirrectas en los que se divide la recta real a partir de los valores anteriores.

$\frac{2}{3}$

Intervalo/semirrecta	Valor de prueba	$f''(x) = 2 \cdot (3x - 2)$	$f(x)$ es Cóncava (∪) /Convexa (∩)
$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$x = 0$	$(+) \cdot (-) = (-)$	Convexa (∩)
$\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$	$x = +1$	$(+) \cdot (+) = (+)$	Cóncava (∪)

Por lo tanto, $f(x)$ es,

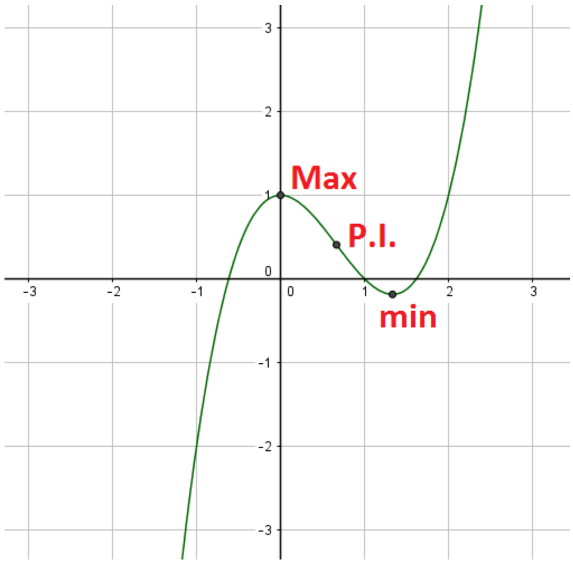
- Convexa en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$
- Cóncava en $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

y $f(x)$ tiene

- Un punto de inflexión en $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = (0'67, 0'41)$.

6. Gráfica.

x	$f(x)$	
-1	0	Máximo relativo
-0,62	0	Corte con eje OX
0	1	Corte con eje OY
0´67	0´41	Punto de Inflexión
1	0	Corte con eje OX
1,33	-0,29	Mínimo relativo
1,62	0	Corte con eje OX



[Puntuación máxima. 4 puntos]

2. Una función real de variable real viene dada por la expresión analítica $g(x) = \frac{x^4}{x^3-2}$.

a) Determine el dominio de la función $g(x)$. (0,25 puntos)

b) Determine algebraicamente los puntos de corte de $g(x)$ con los ejes de coordenadas. (0,25 puntos)

c) Calcule algebraicamente todas las asíntotas de la función $g(x)$, determinando su ecuación analítica. (0,75 puntos)

d) En cada valor donde hay asíntota vertical estudie los límites laterales aportando la tendencia en cada uno de ellos. (0,5 puntos)

e) Analice algebraicamente la monotonía de la función $g(x)$ determinando los intervalos/semirrectas de crecimiento/decrecimiento mediante la derivada. (0,75 puntos)

f) Calcule, si existen, los puntos de máximo y mínimo de la función $g(x)$. (0,25 puntos)

g) Estudie algebraicamente la curvatura de la función $f(x)$. (0,75 puntos)

h) Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$. (0,25 puntos)

i) Represente la función $g(x)$ sobre unos ejes coordenados señalando los puntos de corte con los ejes de coordenadas, los puntos críticos y las conclusiones del resto de apartados respecto al dominio y la monotonía de la función. (0,25 puntos)

1. Dominio de la función.

El dominio de la función es el conjunto de valores para los que el denominador no es cero. Calculamos los valores que no pertenecen al dominio,

$$x^3 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}$$

Por lo tanto, el dominio de la función $g(x)$ es,

$$Dom(g) = \mathbb{R} - \left\{\sqrt[3]{2}\right\} = \mathbb{R} - \{1{,}26\}$$

2. Puntos de corte.

- **<u>Con el eje OX.</u>**

  Hacemos $y = 0$ y resolvemos calculando las abcisas donde se producen los cortes.

$$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^4}{x^3-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

  Por lo tanto, el punto de corte con el eje OX es $(0, 0)$.

- **Con el eje OY.**

  Hacemos $x = 0$ y sustituimos en la función

$$g(0) = \frac{0^4}{0^3 - 2} = 0$$

  Por lo tanto, el punto de corte con el eje OY es $(0, 0)$.

3. Asíntotas.

- **Asíntotas verticales**

  Son aquellas rectas $x = a$ de tal modo que,

$$\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$$

  En nuestro caso, anulando el denominador, obtenemos el valor a de la recta asíntota vertical. Por tanto, la asíntota vertical es,

$$x^3 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{2}$$

  Por lo tanto, la asíntota vertical es

$$x = \sqrt[3]{2}$$

- **Asíntota horizontal.**

  La asíntota horizontal, si existe, es la recta de la forma $y = n$, $n \in \mathbb{R}$ con

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = n$$

  En nuestro caso,

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{x^3 - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

  Por tanto, no existe asíntota horizontal.

- **Asíntota oblicua.**

  Tiene asíntota oblicua porque el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, Calculamos la asíntota $y = mx + n$ a través de los límites,

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{x^4 - 2x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{x^4} = \lim_{x \to \infty} 1 = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (g(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^4}{x^3 - 2} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^4 - x^4 + 2x}{x^3 - 2} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x}{x^3 - 2} \right) \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

  Por lo tanto, **la asíntota oblicua es $y = x$.**

También se podría haber calculado dividiendo el numerador entre el denominador.

$$
\begin{array}{ll|l}
+x^4 & & x^3 \quad -2 \\ \cline{3-3}
-x^4 & +2x & x \\ \cline{1-2}
 & +2x &
\end{array}
$$

El cociente es la asíntota oblicua $\boldsymbol{y = x}$.

4. Extremos relativos y monotonía.

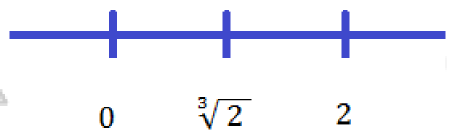
Calculamos la derivada de la función,

$$g(x) = \frac{x^4}{x^3 - 2} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{4x^3 \cdot (x^3 - 2) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3 - 2)^2} = \frac{4x^6 - 8x^3 - 3x^6}{(x^3 - 2)^2} = \frac{x^6 - 8x^3}{(x^3 - 2)^2}$$

Igualamos a cero la derivada,

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^6 - 8x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 \cdot (x^3 - 8) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la primera derivada en los intervalos y semirrectas en los que se divide la recta real a partir de los valores anteriores.



Intervalo/semirrecta	Valor de prueba	$g'(x) = \dfrac{x^3 \cdot (x^3 - 8)}{(x^3 - 2)^2}$	$f(x)$ es Creciente/Decreciente
$(-\infty, 0)$	$x = -1$	$\dfrac{(-)\cdot(-)}{(+)} = (+)$	Creciente
$(0, \sqrt[3]{2})$	$x = +1$	$\dfrac{(+)\cdot(-)}{(+)} = (-)$	Decreciente
$(\sqrt[3]{2}, 2)$	$x = +1{,}5$	$\dfrac{(+)\cdot(-)}{(+)} = (-)$	Decreciente
$(2, +\infty)$	$x = 3$	$\dfrac{(+)\cdot(+)}{(+)} = (+)$	Creciente

Por lo tanto, $g(x)$ es,

- Creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.
- Decreciente en $(0, \sqrt[3]{2}) \cup (\sqrt[3]{2}, 2)$.

y $g(x)$ tiene

- Un máximo relativo en $(0, g(0)) = (0, 0)$.
- Un mínimo relativo en $(2, f(2)) = \left(2, \frac{16}{6}\right) = (2, 2'67)$.

5. Puntos de inflexión y curvatura.

Calculamos la segunda derivada de la función,

$$g(x)=\frac{x^4}{x^3-2} \quad \Rightarrow \quad g'(x)=\frac{x^6-8x^3}{(x^3-2)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g''(x)=\frac{(6x^5-24x^2)\cdot(x^3-2)^2-(x^6-8x^3)\cdot 2\cdot(x^3-2)\cdot 3x^2}{(x^3-2)^4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g''(x)=\frac{(6x^5-24x^2)\cdot(x^3-2)-(x^6-8x^3)\cdot 6x^2}{(x^3-2)^3} \quad \Rightarrow$$

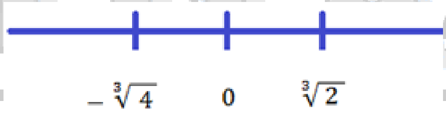
$$\Rightarrow \quad g''(x)=\frac{6x^8-24x^5-12x^5+48x^2-6x^8+48x^5}{(x^3-2)^3} \quad \Rightarrow \quad g''(x)=\frac{12x^5+48x^2}{(x^3-2)^3}$$

Igualamos a cero la segunda derivada,

$$g''(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{12x^5+48x^2}{(x^3-2)^3}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x^5+48x^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x^2\cdot(x^3+4)=0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \\ x^3+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en los intervalos y semirrectas en los que se divide la recta real a partir de los valores anteriores y del valor de no dominio $\sqrt[3]{2}$



Intervalo/semirrecta	Valor de prueba	$f''(x)=\dfrac{12x^2\cdot(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$	$f(x)$ es Cóncava (∪) /Convexa (∩)
$(-\infty,\ -\sqrt[3]{4})$	$x=-2$	$\dfrac{(+)\cdot(-)}{(-)}=(+)$	Cóncava (∪)
$(-\sqrt[3]{4},0)$	$x=-0{,}5$	$\dfrac{(+)\cdot(+)}{(-)}=(-)$	Convexa (∩)
$(0,\sqrt[3]{2})$	$x=+1$	$\dfrac{(+)\cdot(+)}{(-)}=(-)$	Convexa (∩)
$(\sqrt[3]{2},+\infty)$	$x=+2$	$\dfrac{(+)\cdot(+)}{(+)}=(+)$	Cóncava (∪)

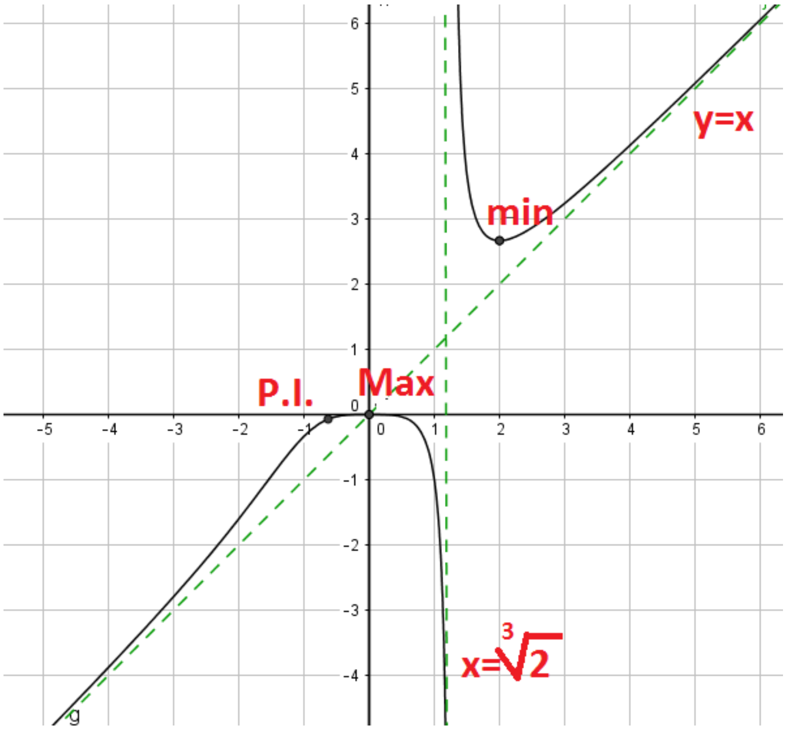
Por lo tanto, $g(x)$ es,

- Convexa en $(-\sqrt[3]{4},0)\cup(0,\sqrt[3]{2})$
- Cóncava en $(-\infty,\ -\sqrt[3]{4})\cup(\sqrt[3]{2},+\infty)$
- $g(x)$ tiene un punto de inflexión en $\left(-\sqrt[3]{4},f\left(-\sqrt[3]{4}\right)\right)=(-1'59,-1'06)$.

6. Gráfica.

x	$f(x)$	
-1	-0,33	
-1,59	-1,06	P.I.
0	0	Mínimo relativo
1	-1	
2	2,67	Máximo relativo
3	3,24	
4	4,13	

Asíntota oblicua	
x	$y = x$
-1	-1
+1	+1



[Puntuación máxima. 1,5 puntos]

3. Determine los valores de a y de b para que la función,

$$f(x)=\begin{cases} a^2x+b & si \quad x<-1 \\ bx^2+a & si \quad -1\le x\le 2 \\ (bx)^2 & si \quad 2<x \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$.

La función es continua para $x\in\mathbb{R}-\{-1,2\}$ por estar conformada por funciones polinómicas y , por lo tanto, todas ellas continuas.

Estudiamos la continuidad del valor $x=-1$. Para que una función $f(x)$ sea continua en $x=-1$ debe ocurrir que sus límites laterales coincidan con el valor de la función en el valor $x=-1$. Es decir,

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)$$

Calculamos los límites laterales y la imagen de la función en el valor de abcisa $x=-1$,

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}(a^2x+b)=-a^2+b$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}(bx^2+a)=b\cdot(-1)^2+a=b+a$$

$$f(-1)=b\cdot(-1)^2+a=b+a$$

Puesto que $f(x)$ debe ser continua en $x=-1$, entonces

$$-a^2+b=b+a \quad\Leftrightarrow\quad 0=a^2+a \quad\Leftrightarrow\quad 0=a\cdot(a+1) \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} a=0 \\ a+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=-1 \end{cases}$$

Por lo tanto, **la función es continua en $x=-1$ si $a=0$ o $a=-1$.**

Estudiamos ahora la continuidad del valor $x=2$. Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$ debe ocurrir que sus límites laterales coincidan con el valor de la función en el valor $x=2$. Es decir,

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^+} f(x)=f(2)$$

Calculamos los límites laterales y la imagen de la función en el valor de abcisa $x=-2$,

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}(bx^2+a)=4b+a$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}(bx)^2=4b^2$$

$$f(2)=b\cdot2^2+a=4b+a$$

Puesto que $f(x)$ debe ser continua en $x=2$, entonces

$$4b+a=4b^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0=4b^2-4b+a$$

- Si $a = 0$ entonces,

$$0 = 4b^2 - 4b \quad \Leftrightarrow \quad 4b \cdot (b-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4b = 0 & \Leftrightarrow \quad b = 0 \\ b - 1 = 0 & \Leftrightarrow \quad b = 1 \end{cases}$$

- Si $a = -1$ entonces,

$$0 = 4b^2 - 4b + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (2b-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2b - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, **la función es continua para $\boldsymbol{a = 0}$, $\boldsymbol{b = 0}$; para $\boldsymbol{a = 0}$, $\boldsymbol{b = 1}$; y para $\boldsymbol{a = -1}$, $\boldsymbol{b = \frac{1}{2}}$.**

[Puntuación máxima. 1,5 puntos]

4. Resuelva __algebraicamente__ los siguientes dos problemas:

(a) La cantidad de bacterias en un cultivo, medida en millones, viene dada por la función:

$$B(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 10$$

donde t es el tiempo transcurrido en horas desde el inicio del experimento y el estudio solo dura 5 $horas$ (es decir, $0 \leq t \leq 5$).

a1) Determina en qué instantes de tiempo se alcanzan la cantidad máxima y mínima de bacterias dentro de ese intervalo de 5 horas. (1 punto)

a2) ¿Cuál es la cantidad máxima y mínima de bacterias durante el experimento? (0,25 puntos)

(b) Se desea fabricar una caja abierta de base cuadrada, con un volumen total de $108\ cm^3$. Los laterales se fabrican con un material que cuesta $2\ €/cm^2$ y la base con un material que cuesta $4\ €/cm^2$. Calcula las dimensiones de la caja (lado de la base y altura) para que el coste de fabricación sea mínimo. ¿Cuál es ese coste mínimo?

a1) Determina en qué instantes de tiempo se alcanzan la cantidad máxima y mínima de bacterias dentro de ese intervalo de 5 horas.

Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función $B(t)$ a partir de su función derivada

$$B'(t) = 3t^2 - 18t^2 + 24$$

Igualamos a cero la derivada y resolvemos, obteniendo los posibles valores de extremo relativo,

$$B'(t) = 0 \iff 3t^2 - 18t^2 + 24 = 0 \iff t^2 - 6t^2 + 8 = 0 \iff$$

$$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{+6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{+6 \pm 2}{2} = \begin{cases} t = 4 \\ t = 2 \end{cases}$$

Estudiamos si son máximos o mínimos a partir del valor de cada uno en la segunda derivada. Como, $B''(t) = 6t - 18$ entonces tendremos que,

- $B''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = 12 - 18 = -6 < 0 \iff t = 2$ presenta un Máximo relativo.
- $B''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 24 - 18 = +6 > 0 \iff t = 4$ presenta un mínimo relativo.

Por lo tanto,

- $B(t)$ crece para $t \in (0,2) \cup (4,5)$ y decrece para $t \in (2,4)$
- $B(t)$ presenta un Máximo relativo en $t = 2$ y un mínimo relativo en $t = 4$.

Valoramos ahora el número de bacterias, no solo en $t = 2$ y $t = 4$ sino también en los extremos del intervalo, $t = 0$ y $t = 5$ para dar los instantes de máximo y de mínimo en el intervalo $[0,5]$.

- $B(0) = 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 + 10 = 10$ millones de bacterias
- $B(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 + 10 = 8 - 36 + 48 + 10 = 30$ millones de bacterias
- $B(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + 10 = 64 - 144 + 96 + 10 = 26$ millones de bacterias
- $B(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 24 \cdot 5 + 10 = 125 - 225 + 120 + 10 = 30$ millones de bacterias

En ese caso, el instante en que se registra el máximo número de bacterias es $t = 2$ y $t = 5$ y el instante en el que se registra el menor número de bacterias es $t = 0$.

a2) ¿Cuál es la cantidad máxima y mínima de bacterias durante el experimento?

La cantidad máxima es 30 millones de bacterias y la mínima es 10 millones de bacterias

(b) Se desea fabricar una caja abierta de base cuadrada, con un volumen total de $108\ cm^3$. Los laterales se fabrican con un material que cuesta $2\ €/cm^2$ y la base con un material que cuesta $4\ €/cm^2$. Calcula las dimensiones de la caja (lado de la base y altura) para que el coste de fabricación sea mínimo. ¿Cuál es ese coste mínimo?

Se trata de un problema de optimización donde la función objetivo es el coste de fabricación $C(x,y)$. Si consideramos que la arista de la base cuadrada mide $x\ cm$ y la altura de la caja mide $y\ cm$ entonces la función coste de fabricación viene dada por la expresión analítica

$$C(x,y) = 4 \cdot x^2 + 2 \cdot (4xy)$$

La relación entre las variables x e y viene dada por el volumen conocido según,

$$x^2 y = 108$$

Por tanto, $y = \frac{108}{x^2}$. Entonces la función a minimizar puede quedar descrita mediante una sola variable según,

$$C(x,y) = 4x^2 + 8xy \quad \Leftrightarrow \quad C(x) = 4x^2 + 8x \cdot \frac{108}{x^2} = 4x^2 + \frac{864}{x}$$

Estudiamos dónde la función $C(x)$ presenta un mínimo absoluto mediante la derivada,

$$C'(x) = 8x - \frac{864}{x^2}$$

Igualamos a cero la derivada y resolvemos,

$$C'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x - \frac{864}{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x^3 - 864 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x^3 = 864 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{864}{8}} = \sqrt[3]{108}$$

Para comprobar que es un máximo, y teniendo en cuenta que la segunda derivada del coste es,

$$C''(x) = 8 + \frac{1728}{x^3}$$

Sustituimos en $C''(x)$ el valor $x = \sqrt[3]{108}\ cm$ para asegurarnos que obtenemos un valor positivo y, por tanto, en $x = \sqrt[3]{108}\ cm$ hay un máximo relativo y absoluto de la función.

$$C''\left(3\sqrt[3]{2}\right) = 8 + \frac{1728}{\left(\sqrt[3]{108}\right)^3} = 8 + \frac{1728}{108} = 4 + 16 = 20 > 0$$

Concluimos que la caja es cúbica con medida de la arista de la base $\sqrt[3]{108}\ cm \approx 4{,}76\ cm$ y **para esas dimensiones tendremos el coste mínimo, que es** $C\left(\sqrt[3]{108}\right) \approx 272{,}14\ €$