lawebdelprofedemates.es

CONTROL 9

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Fecha: **LUNES, 20 de ABRIL de 2026**

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10,5 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.

  Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Matemáticas NS, Mayo 2019, P2, ej.8)**

1. (a) Halle las raíces de la ecuación $w^3 = 8i,\ w \in \mathbb{C}$. Dé las respuestas en forma cartesiana.(1 punto)

Una de las raíces anteriores, w_i, satisface la condición $Re(w_i) = 0$.

(b) Sabiendo que $w_i = \frac{z}{1-z}$ exprese z en la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{Q}$. (1 punto)

[Puntuación máxima: 2,5 puntos] **(Matemáticas NS, Mayo 2018, P1, ej.7)**

2. (a) Resuelva la siguiente ecuación bicuadrada aportando todas las soluciones complejas, (1,5 puntos)

$$z^4 + (4 - i)z^2 - 4i = 0$$

(b) Calcule en forma polar, dando después el resultado en forma binómica, (1 punto)

$$\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}} \cdot \left(\frac{3_{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{3}_{\frac{\pi}{3}}} \right)^2$$

[Puntuación máxima: 4,5 puntos]

3. La función f se define así: $f(x) = 4^x$ donde $x \in \mathbb{R}$.

(a) Halle $f^{-1}(32)$. Exprese la respuesta de la forma $\frac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$ (0,5 puntos)

La función g se define así: $g(x) = 1 + \log_2 x$ donde $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) Halle una expresión para $g^{-1}(x)$. (0,5 puntos)

(c) Calcule una expresión algebraica lo más simplificada posible para $g^\circ f(x)$. (0,5 puntos)

Las funciones h y j se definen así: $h(x) = \frac{4x^2}{4x+1}$ y $j(x) = \sqrt{x+1}$

(d) Calcule las asíntotas de la función $h(x)$. (0,5 puntos)

(e) Escriba la expresión analítica más simplificada posible de la función $j^\circ h(x)$ y calcule su dominio. (1,5 puntos)

(f) Calcula algebraicamente el dominio de la función $n(x) = \ln(\ln(ln(x)))$ (1 punto)

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

4. Dada la función real de variable real $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, calcula mediante inducción una fórmula para la composición n-ésima $f^n(x)$ de $f(x)$.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº9 DE ANÁLISIS Y ENFOQUES

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Matemáticas NS, Mayo 2019, P2, ej.8)**

1. (a) Halle las raíces de la ecuación $w^3 = 8i$, $w \in \mathbb{C}$. Dé las respuestas en forma cartesiana.(1 punto)

Una de las raíces, w_i, satisface la condición $Re(w_i) = 0$.

(b) Sabiendo que $w_i = \frac{z}{1-z}$ exprese z en la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{Q}$. (1 punto)

(a) Halle las raíces de la ecuación $w^3 = 8i$, $w \in \mathbb{C}$. Dé las respuestas en forma cartesiana.

Despejando w tendremos que,

$$w^3 = 8i \quad \Leftrightarrow \quad w = \sqrt[3]{8i}$$

Pasando a polares a $8i$,

$$8i = 8_{90°}$$

Aplicando la $fórmula\ de\ Moivre$,

$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90°}} = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 360° \cdot k}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{90° + 360° \cdot k}{3}\right)\right), \qquad k \in \{0,1,2\}$$

Por lo tanto,

- Si $k = 0$ entonces,

$$w_0 = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 360° \cdot 0}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{90° + 360° \cdot 0}{3}\right)\right) =$$

$$= 2 \cdot (\cos 30° + i \cdot sen\ 30°) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \cdot 1 = \sqrt{3} + i$$

- Si $k = 1$ entonces,

$$w_1 = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 360° \cdot 1}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{90° + 360° \cdot 1}{3}\right)\right) =$$

$$= 2 \cdot (\cos 150° + i \cdot sen\ 150°) = 2 \cdot (-\cos 30° + i \cdot sen\ 30°) =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i \cdot 1 = -\sqrt{3} + i$$

- Si $k = 2$ entonces,

$$w_2 = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 360° \cdot 2}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{90° + 360° \cdot 2}{3}\right)\right) =$$

$$= 2 \cdot (\cos 270° + i \cdot sen\ 270°) = 2 \cdot \big(0 + i \cdot (-1)\big) = -2i$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son,

$$w_0 = \sqrt{3} + i \quad , \quad w_1 = -\sqrt{3} + i \quad , \quad w_2 = -2i$$

Una de las raíces, $\boldsymbol{w_i}$, satisface la condición $\boldsymbol{Re(w_i) = 0}$.

(b) Sabiendo que $\boldsymbol{w_i = \frac{z}{1-z}}$ exprese $\boldsymbol{z}$ en la forma $\boldsymbol{a + bi}$ donde $\boldsymbol{a, b \in \mathbb{Q}}$.

El valor w_i para el que su parte real es cero es $w_2 = -2i$. En ese caso,

$$w_i = \frac{z}{1-z} \quad \Leftrightarrow \quad -2i = \frac{z}{1-z}$$

Resolvemos,

$$\Leftrightarrow \quad -2i = \frac{z}{1-z} \quad \Leftrightarrow \quad -2i \cdot (1-z) = z \quad \Leftrightarrow \quad -2i + 2zi = z \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2zi - z = 2i \quad \Leftrightarrow \quad z \cdot (2i - 1) = 2i \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2i}{2i-1}$$

Para expresarlo en forma binómica, multiplicamos en numerador y denominador por el complejo $2i + 1$,

$$z = \frac{2i}{2i-1} = \frac{2i \cdot (2i+1)}{(2i-1) \cdot (2i+1)} = \frac{2i \cdot (2i+1)}{(2i)^2 - 1^2} = \frac{(2i)^2 + 2i}{-4-1} = \frac{-4+2i}{-5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \cdot i$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos] **(Matemáticas NS, Mayo 2018, P1, ej.7)**

2. (a) Resuelva la siguiente ecuación bicuadrada aportando todas las soluciones complejas, (1,5 puntos)

$$z^4 + (4-i)z^2 - 4i = 0$$

(b) Calcule en forma polar, dando el resultado en forma binómica, (1 punto)

$$\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}} \cdot \left(\frac{3_{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{3}_{\frac{\pi}{3}}} \right)^2$$

(a) Resuelva la siguiente ecuación bicuadrada aportando todas las soluciones en el plano complejo,

$$\boldsymbol{z^4 + (4-i)z^2 - 4i = 0}$$

Se trata de una ecuación bicuadrada donde, si hacemos el cambio $w = z^2$, tendremos que,

$$z^4 + (4-i)z^2 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w^2 + (4-i)w - 4i = 0$$

Resolvemos mediante la fórmula de la ecuación polinómica de segundo grado,

$$w^2 + (4-i)w - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{-(4-i) \pm \sqrt{(4-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4i)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-(4-i) \pm \sqrt{4^2 + i^2 - 8i + 16i}}{2} = \frac{-(4-i) \pm \sqrt{4^2 + i^2 + 8i}}{2} =$$

$$\frac{-(4-i) \pm \sqrt{(4+i)^2}}{2} = \frac{-(4-i) \pm (4+i)}{2} = \begin{cases} w_1 = \dfrac{-(4-i) + (4+i)}{2} = i \\ w_2 = \dfrac{-(4-i) - (4+i)}{2} = -4 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio,

- Si $w = i$ entonces,

$$z^2 = i \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{i}$$

Por lo tanto, aplicando la $fórmula\ de\ Moivre$,

$$z = \sqrt{1_{90°}} = \sqrt{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 360° \cdot k}{2} \right) + \operatorname{sen}\left(\frac{90° + 360° \cdot k}{2} \right) \right) , \quad k \in \{0,1\}$$

  - Para $k = 0$, $z_0 = \cos 45° + i \cdot sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$

  - Para $k = 1$, $z_1 = \cos 225° + i \cdot sen\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$

- Si $w = -4$ entonces,

$$z^2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{-4} = \begin{cases} z_3 = +2 \\ z_4 = -2i \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones son $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i$, $z'=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i$, $z''=2i$ y $z'''=-2i$

(b) Calcule en forma polar, dando el resultado en forma binómica,

$$\boldsymbol{\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}}\cdot\left(\frac{3_{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{3}_{\frac{\pi}{3}}}\right)^{2}}$$

Solución,

$$\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}}\cdot\left(\frac{3_{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{3}_{\frac{\pi}{3}}}\right)^{2}=\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}}\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{3}}_{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}}\right)^{2}=\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}}\cdot\left(\sqrt{3}_{-\frac{\pi}{12}}\right)^{2}=$$

$$=\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}}\cdot 3_{-\frac{2\pi}{12}}=$$

$$=\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}}\cdot 3_{-\frac{\pi}{6}}=3\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}}=3\sqrt{12}_{-\frac{2\pi}{6}}=3\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{3}}=$$

$$=3\sqrt{12}\cdot\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$

$$3\sqrt{12}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)=3\cdot 2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)=$$

$$=6\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)=3\sqrt{3}-9i$$

[Puntuación máxima: 4,5 puntos]

3. La función f se define así: $f(x) = 4^x$ donde $x \in \mathbb{R}$.

(a) Halle $f^{-1}(32)$. Exprese la respuesta de la forma $\frac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$ (0,5 puntos)

La función g se define así: $g(x) = 1 + \log_2 x$ donde $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) Halle una expresión para $g^{-1}(x)$. (0,5 puntos)

(c) Calcule una expresión algebraica lo más simplificada posible para $g^\circ f(x)$. (0,5 puntos)

Las funciones h y j se definen así: $h(x) = \frac{4x^2}{4x+1}$ y $j(x) = \sqrt{x+1}$

(d) Calcule las asíntotas de la función $h(x)$. (0,5 puntos)

(e) Escriba la expresión analítica más simplificada posible de la función $j^\circ h(x)$ y calcule su dominio. (1,5 puntos)

(f) Calcula algebraicamente el dominio de la función $n(x) = \ln(\ln(ln(x)))$ (1 punto)

(a) Halle $f^{-1}(32)$. Exprese la respuesta de la forma $\frac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{Z}$

Calculamos la anti-imagen de $y = 32$

$$4^x = 32 \iff (2^2)^x = 2^5 \iff 2^{2x} = 2^5 \iff 2x = 5 \iff x = \frac{5}{2}$$

(b) Halle una expresión para $g^{-1}(x)$.

Cambiamos "x" por "y" y viceversa y despejamos "y"

$$x = 1 + \log_2 y \iff x - 1 = \log_2 y \iff 2^{x-1} = y$$

Por lo tanto,

$$g^{-1}(x) = 2^{x-1}$$

(c) Calcule una expresión algebraica lo más simplificada posible para $g^\circ f(x)$.

$$g^\circ f(x) = g(f(x)) = g(4^x) = 1 + \log_2(4^x) = 1 + x \cdot \log_2 4 = 1 + x \cdot \log_2 2^2 =$$

$$= 1 + 2x \cdot \log_2 2 = 1 + 2x$$

Por tanto, $g^\circ f(x) = 1 + 2x$.

(d) Calcule las asíntotas de la función $h(x)$.

La función $h(x)$ tiene asíntota vertical en,

$$4x + 1 = 0 \iff 4x = -1 \iff x = -\frac{1}{4}$$

La función $h(x)$ no tiene asíntota horizontal ya que,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{4x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{4x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

La función $h(x)$ tiene asíntota oblicua en $y=x-1/4$ ya que

$$\begin{array}{rrr|l}
+4x^2 & & & 4x+1 \\ \cline{4-4}
-4x^2 & -x & & x-1/4 \\ \cline{1-2}
 & -x & & \\
 & +x & 1/4 & \\ \cline{2-3}
 & & 1/4 &
\end{array}$$

Y por tanto,

$$\frac{4x^2}{4x+1}=\left(\boldsymbol{x-\frac{1}{4}}\right)+\frac{1/4}{4x+1}$$

(e) Determine el dominio de la función $j^\circ h(x)$.

La función $j^\circ h(x)$ tiene por expresión analítica,

$$j^\circ h(x)=j\big(h(x)\big)=\sqrt{\frac{4x^2}{4x+1}+1}=\sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{4x+1}}=\sqrt{\frac{(2x+1)^2}{4x+1}}=\frac{|2x+1|}{\sqrt{4x+1}}$$

En ese caso, el dominio de la función $j^\circ h(x)$ es el conjunto de valores que satisfacen,

$$4x+1>0 \;\Leftrightarrow\; 4x>-1 \;\Leftrightarrow\; x>-\frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; Dom(j^\circ h)=\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$$

(f) Calcula algebraicamente el dominio de la función $n(x)=\ln\big(\ln(ln(x)\big)$

$$Dom(n)=\{x\in\mathbb{R}\;,\ln\big(ln(x)\big)>0\}=\{x\in\mathbb{R}\;,ln(x)>1\}=$$

$$=\{x\in\mathbb{R}\;,x>e\}=(e,+\infty)$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

4. Dada la función real de variable real $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, calcula mediante inducción una fórmula para la composición n-ésima $f^n(x)$ de $f(x)$.

Aplicamos inducción.

Si hacemos la composición $f^2(x)$ tendremos que,

$$f^2(x)=f\big(f(x)\big)=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\frac{1+x^2+x^2}{1+x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\frac{1+2x^2}{1+x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

Si hacemos la composición $f^3(x)$ tendremos que,

$$f^3(x)=f\big(f^2(x)\big)=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+2x^2}}}=$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{\frac{1+2x^2+x^2}{1+2x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{\frac{1+3x^2}{1+2x^2}}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\frac{\sqrt{1+3x^2}}{\sqrt{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

Suponemos cierto el caso $n=k$, es decir,

$$f^k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$$

Y probamos el caso $n=k+1$, es decir,

$$f^{k+1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

Operando en $f^{k+1}(x)$ tendremos,

$$f^{k+1}(x)=f\Big(f^k(x)\Big)=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}}=$$

$$= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{\frac{1+kx^2+x^2}{1+kx^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{\frac{1+(k+1)x^2}{1+kx^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\frac{\sqrt{1+(k+1)x^2}}{\sqrt{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

Por lo tanto, se cumple la hipótesis inductiva y en ese caso,

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$