

CUADERNILLO 6

Análisis y enfoques Matemáticas I y II

Entrega límite **VIERNES, 10 de ABRIL de 2026 (hora de inicio de clase)**

NOMBRE: _____

APELLIDOS: _____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 12,5 puntos.
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$\text{Nota def.} = \text{Nota total} / (\text{Días de retraso} + 1)$$

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 0,75 puntos]

(Análisis y Enfoques NS Mayo 2025, P1 Ej.9)

1. Pruebe **por contradicción** que $\frac{1}{x \cdot (1-x)} \geq 4$ para $x \in \mathbb{R}$ $0 < x < 1$.



[Puntuación máxima: 5 puntos]

(Análisis y Enfoques NS Mayo 2025, P1, Ej.12)

2. (a) Resuelva $z^2 = -1 - \sqrt{3}i$ dando las respuestas en la forma $z = r \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

(1 punto)

Sean z_1 y z_2 las raíces cuadradas de $-1 - \sqrt{3}i$ donde $\operatorname{Re}(z_1) > 0$.

Sean z_3 y z_4 las raíces cuadradas de $-1 + \sqrt{3}i$ donde $\operatorname{Re}(z_3) > 0$.

(b) Expresando las respuestas en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, (1 punto)

(i) Halle z_1 y z_2

(ii) Deduzca z_3 y z_4 .

Las cuatro raíces z_1, z_2, z_3 y z_4 están representadas en un diagrama de Argand por los puntos A, B, C y D , respectivamente.

(c) (i) Sitúe los puntos A, B, C y D en el diagrama de Argand. (1 punto)

(ii) Halle el área del polígono que forman estos cuatro puntos.

Las cuatro raíces z_1, z_2, z_3 y z_4 satisfacen la ecuación $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

Las cuatro raíces $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}$ y $\frac{1}{z_4}$ satisfacen la ecuación $pw^4 + qw^2 + r = 0$ donde $p, q, r \in \mathbb{R}$.

(d) Halle el valor de p, q y r . (1 punto)

Las cuatro raíces $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}$ y $\frac{1}{z_4}$ están representadas por los puntos E, F, G y H respectivamente en un diagrama de Argand.

(e) (i) Halle $\frac{1}{z_1}$ y expréselo en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. (1 punto)

(ii) A partir de lo anterior, deduzca el área del polígono formado por estos cuatro puntos.

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 4 puntos]

(Análisis y Enfoques NS Mayo 2024, P1, Ej.10)

3. Considere la progresión aritmética a, p, q, \dots , donde $a, p, q \neq 0$.

(a) Muestre que $2p - q = a$. (0,5 puntos)

Considere la progresión geométrica a, s, t, \dots , donde $a, s, t \neq 0$.

(b) Muestre que $s^2 = at$. (0,5 puntos)

El primer término de las dos progresiones es a . Se sabe que $q = t = 1$.

(c) Muestre que $p > \frac{1}{2}$. (0,5 puntos)

Considere el caso en el que $a = 9, s > 0$ y $q = t = 1$.

(d) Escriba los cuatro primeros términos de: (1 punto)

(i) La progresión aritmética.

(ii) La progresión geométrica

La progresión aritmética y la geométrica se utilizan para formar una nueva progresión aritmética u_n .

Los tres primeros términos de u_n son $u_1 = 9 + \ln 9$, $u_2 = 5 + \ln 3$ y $u_3 = 1 + \ln 1$

(e) (i) Halle la diferencia común de la nueva progresión,, dándola en función de $\ln 3$.

(0,75 puntos)

(ii) Muestre que

$$\sum_{i=1}^{10} u_i = -90 - 25 \cdot \ln 3$$

(0,75 puntos)

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 1 punto]

4. Resolver algebraicamente la ecuación $z^3 - 64i = 0$ en el plano complejo dando las soluciones en notación cartesiana y exponencial.

LA WEB DEL
PROFE DE MATEMÁTICAS

[Puntuación máxima: 1,75 puntos]

(Análisis y Enfoques NS Mayo 2024, P2, Ej.8)

5. Sea $z = 1 + \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta$ donde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(a) Muestre que:

(1 punto)

(i) $\arg(z) = \theta$

(ii) $|z| = 2 \cos \theta$

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de θ para el que se cumple que $\arg(z^3) = |z^3|$. (0,75 puntos)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CUADERNILLO 6

ANÁLISIS Y ENFOQUES – MATEMÁTICAS I

[Puntuación máxima: 0,75 puntos]

(Análisis y Enfoques NS Mayo 2025, P1 Ej.9)

1. Pruebe por contradicción que $\frac{1}{x \cdot (1-x)} \geq 4$ para $x \in \mathbb{R}$ $0 < x < 1$.

Supongamos que

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 1 \quad \text{con} \quad \frac{1}{a \cdot (1-a)} < 4$$

En ese caso,

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 1 \quad \text{con} \quad 1 < 4a \cdot (1-a)$$

Es decir,

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 1 \quad \text{con} \quad 1 < 4a - 4a^2$$

Por tanto,

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 1 \quad \text{con} \quad 1 - 4a + 4a^2 < 0$$

Como los tres términos no nulos de la inecuación pueden reformularse como un cuadrado de resta, tendremos que,

Es decir,

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad 0 < a < 1 \quad \text{con} \quad (1 - 4a)^2 < 0$$

Pero eso es imposible ya que , el cuadrado de un número no nulo es mayor que cero.

Concluimos entonces que

$$\frac{1}{x \cdot (1-x)} \geq 4 \quad \text{para} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < x < 1$$

[Puntuación máxima: 5 puntos]

(Análisis y Enfoques NS Mayo 2025, P1, Ej.12)

2. (a) Resuelva $z^2 = -1 - \sqrt{3}i$ dando las respuestas en la forma $z = r \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

(1 punto)

Sean z_1 y z_2 las raíces cuadradas de $-1 - \sqrt{3}i$ donde $\operatorname{Re}(z_1) > 0$.

Sean z_3 y z_4 las raíces cuadradas de $-1 + \sqrt{3}i$ donde $\operatorname{Re}(z_3) > 0$.

(b) Expresando las respuestas en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$,

(1 punto)

(i) Halle z_1 y z_2

(ii) Deduzca z_3 y z_4 .

Las cuatro raíces z_1, z_2, z_3 y z_4 están representadas en un diagrama de Argand por los puntos A, B, C y D , respectivamente.

(c) (i) Sitúe los puntos A, B, C y D en el diagrama de Argand.

(1 punto)

(ii) Halle el área del polígono que forman estos cuatro puntos.

Las cuatro raíces z_1, z_2, z_3 y z_4 satisfacen la ecuación $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

Las cuatro raíces $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}$ y $\frac{1}{z_4}$ satisfacen la ecuación $pw^4 + qw^2 + r = 0$ donde $p, q, r \in \mathbb{R}$.

(d) Halle el valor de p, q y r .

(1 punto)

Las cuatro raíces $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}$ y $\frac{1}{z_4}$ están representadas por los puntos E, F, G y H respectivamente en un diagrama de Argand.

(e) (i) Halle $\frac{1}{z_1}$ y expréselo en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

(1 punto)

(ii) A partir de lo anterior, deduzca el área del polígono formado por estos cuatro puntos.

(a) Resuelva $z^2 = -1 - \sqrt{3}i$ dando las respuestas en la forma $z = r \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

$$x^2 = -1 - \sqrt{3}i \Leftrightarrow x = \sqrt{-1 - \sqrt{3}i}$$

Pasando a forma polar y aplicando la fórmula de Moivre tendremos que,

$$x = \sqrt{2 \frac{4\pi}{3}} = \left(2 \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)^{1/2} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} + k\pi\right)\right), k \in \{0,1\}$$

Por tanto,

$$x_0 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$x_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

Sean z_1 y z_2 las raíces cuadradas de $-1 - \sqrt{3}i$ donde $Re(z_1) > 0$.

Sean z_3 y z_4 las raíces cuadradas de $-1 + \sqrt{3}i$ donde $Re(z_3) > 0$.

(b) Expresando las respuestas en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$,

(i) Halle z_1 y z_2

$$z_1 = x_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$z_2 = x_0 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(ii) Deduzca z_3 y z_4 .

Dado $z = a + bi$ entonces $\overline{z^2} = (\bar{z})^2$ ya que,

$$\overline{z^2} = \overline{(a + bi)^2} = \overline{a^2 - b^2 + 2abi} = a^2 - b^2 - 2abi$$

$$(\bar{z})^2 = (\overline{a + bi})^2 = (a - bi)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$$

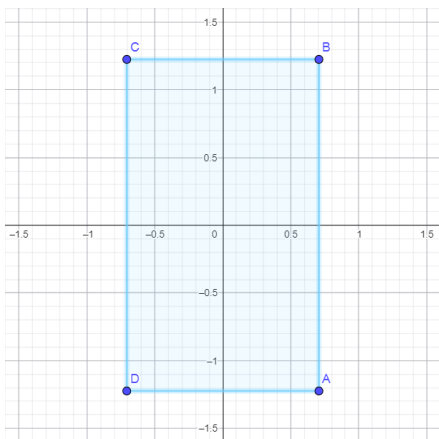
En ese caso,

Y por tanto, $\sqrt{z^2} = \bar{z}$

$$\sqrt{-1 + \sqrt{3}i} = \sqrt{-1 - \sqrt{3}i} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = z_3 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = z_4 \end{cases}$$

Las cuatro raíces z_1, z_2, z_3 y z_4 están representadas en un diagrama de Argand por los puntos A, B, C y D , respectivamente.

(c) (i) Sitúe los puntos A, B, C y D en el diagrama de Argand.



(ii) Halle el área del polígono que forman estos cuatro puntos.

El área vendrá dada por,

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{12} u^2 = 2\sqrt{3} u^2$$

Las cuatro raíces z_1, z_2, z_3 y z_4 satisfacen la ecuación $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

Las cuatro raíces $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}$ y $\frac{1}{z_4}$ satisfacen la ecuación $pw^4 + qw^2 + r = 0$ donde $p, q, r \in \mathbb{R}$.

(d) Halle el valor de p, q y r .

Sea una de las raíces $\frac{1}{z_1}$ del polinomio $pw^4 + qw^2 + r$. En ese caso,

$$p\left(\frac{1}{z_1}\right)^4 + q\left(\frac{1}{z_1}\right)^2 + r = 0 \Leftrightarrow \frac{p}{z_1^4} + \frac{q}{z_1^2} + r = 0 \Leftrightarrow p + qz_1^2 + rz_1^4 = 0$$

Por lo tanto,

$$p = 4, \quad q = 2 \quad r = 1$$

(e) (i) Halle $\frac{1}{z_1}$ y expréselo en la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} = z_1^{-1} &= \left(\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right) \right)^{-1} = \\ &= \sqrt{2}^{-1} \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{3} \cdot (-1)\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3} \cdot (-1)\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

(ii) A partir de lo anterior, deduzca el área del polígono formado por estos cuatro puntos.

Como $\frac{1}{z_1} = \frac{z_3}{2}$ también ocurrirá que

$$\frac{1}{z_2} = \frac{z_4}{2}, \quad \frac{1}{z_3} = \frac{z_1}{2}, \quad \frac{1}{z_4} = \frac{z_2}{2}$$

Por lo tanto, los afijos tienen la mitad de valor en cada una de sus coordenadas,

En ese caso, el área del polígono formado será,

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} u^2$$

[Puntuación máxima: 4 puntos]

(Análisis y Enfoques NS Mayo 2024, P1, Ej.10)

3. Considere la progresión aritmética a, p, q, \dots , donde $a, p, q \neq 0$.

(a) Muestre que $2p - q = a$. (0,5 puntos)

Considere la progresión geométrica a, s, t, \dots , donde $a, s, t \neq 0$.

(b) Muestre que $s^2 = at$. (0,5 puntos)

El primer término de las dos progresiones es a . Se sabe que $q = t = 1$.

(c) Muestre que $p > \frac{1}{2}$. (0,5 puntos)

Considere el caso en el que $a = 9, s > 0$ y $q = t = 1$.

(d) Escriba los cuatro primeros términos de: (1 punto)

(i) La progresión aritmética.

(ii) La progresión geométrica

La progresión aritmética y la geométrica se utilizan para formar una nueva progresión aritmética u_n .

Los tres primeros términos de u_n son $u_1 = 9 + \ln 9$, $u_2 = 5 + \ln 3$ y $u_3 = 1 + \ln 1$

(e) (i) Halle la diferencia común de la nueva progresión,, dándola en función de $\ln 3$.

(0,75 puntos)

(ii) Muestre que

$$\sum_{i=1}^{10} u_i = -90 - 25 \cdot \ln 3 \quad (0,75 \text{ puntos})$$

Considere la progresión aritmética a, p, q, \dots , donde $a, p, q \neq 0$.

(a) Muestre que $2p - q = a$.

Como están en progresión aritmética entonces la diferencia d de la progresión cumple que,

$$d = p - a \quad , \quad d = q - p$$

Por tanto,

$$p - a = q - p \Leftrightarrow 2p - q = a$$

Considere la progresión geométrica a, s, t, \dots , donde $a, s, t \neq 0$.

(b) Muestre que $s^2 = at$.

Como están en progresión geométrica entonces la razón r de la progresión cumple que,

$$\frac{s}{a} = r \quad , \quad \frac{t}{s} = r$$

Por tanto, $\frac{s}{a} = \frac{t}{s} \Leftrightarrow s^2 = at$

El primer término de las dos progresiones es a . Se sabe que $q = t = 1$.

(c) Muestre que $p > \frac{1}{2}$.

Como

$$2p - q = a$$

Si $q = 1$ entonces,

$$p = \frac{a + 1}{2}$$

Como $s^2 = at$ y $t = 1$ entonces,

$$a = s^2 > 0$$

Por lo tanto,

$$p = \frac{a + 1}{2} = \frac{s^2 + 1}{2} > \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$$

Considere el caso en el que $a = 9, s > 0$ y $q = t = 1$.

(d) Escriba los cuatro primeros términos de:

(i) La progresión aritmética.

Como $a = 9, q = 1$ entonces,

$$2p - 1 = 9 \Leftrightarrow 2p = 10 \Leftrightarrow p = 5$$

Los cuatro primeros términos de la progresión aritmética son,

| 1º | 2º | 3º | 4º |
|-----|-----|-----|----|
| a | p | q | |
| 9 | 5 | 1 | -3 |

(ii) La progresión geométrica

Como $a = 9$, $q = 1$ con $s > 0$ entonces,

$$s^2 = at \Leftrightarrow s^2 = 9 \Leftrightarrow s = 3$$

Los cuatro primeros términos de la progresión aritmética son,

| 1º | 2º | 3º | 4º |
|-----|-----|-----|-----|
| a | s | t | |
| 9 | 3 | 1 | 1/3 |

La progresión aritmética y la geométrica se utilizan para formar una nueva progresión aritmética u_n .

Los tres primeros términos de u_n son $u_1 = 9 + \ln 9$, $u_2 = 5 + \ln 3$ y $u_3 = 1 + \ln 1$

(e) (i) Halle la diferencia común de la nueva progresión,, dándola en función de $\ln 3$.

$$d = u_2 - u_1 = 5 + \ln 3 - (9 + \ln 9) = 5 + \ln 3 - 9 - \ln 9 = -4 - \ln 3$$

(ii) Muestre que

$$\sum_{i=1}^{10} u_i = -90 - 25 \cdot \ln 3$$

Como,

$$\begin{aligned} u_{10} &= u_1 + (10 - 1) \cdot d = 9 + \ln 9 + 9 \cdot (-4 - \ln 3) = 9 + \ln 9 - 36 - 9 \ln 3 = \\ &= 9 + \ln 3^2 - 36 - 9 \ln 3 = 9 + 2 \cdot \ln 3 - 36 - 9 \ln 3 = -27 - 7 \ln 3 \end{aligned}$$

En es caso,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10} u_i &= \frac{(u_1 + u_{10}) \cdot 10}{2} = (9 + \ln 9 - 27 - 7 \ln 3) \cdot 5 = \\ &= (9 + \ln 3^2 - 27 - 7 \ln 3) \cdot 5 = (9 + 2 \cdot \ln 3 - 27 - 7 \ln 3) \cdot 5 = \\ &= (-18 - 5 \ln 3) \cdot 5 = -90 - 25 \cdot \ln 3 \end{aligned}$$

[Puntuación máxima: 1 punto]

4. Resolver algebraicamente la ecuación $z^3 - 64i = 0$ en el plano complejo dando las soluciones en notación cartesiana y exponencial.

Despejamos la variable compleja,

$$z^3 - 64i = 0 \Leftrightarrow z^3 = 64i \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{64i} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{64_{90^\circ}}$$

En tal caso,

$$z_k = (64_{90^\circ+360^\circ \cdot k})^{1/3} = (64)_{\frac{90^\circ+360^\circ \cdot k}{3}}^{1/3} = \sqrt[3]{64}_{15^\circ+60^\circ \cdot k}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

Es decir,

$$z_k = 4_{30^\circ+120^\circ \cdot k}, \quad k \in \{0, 1, 2\}$$

Por tanto,

$$z_0 = 4 \cdot (\cos(30^\circ + 120^\circ \cdot 0) + i \cdot \operatorname{sen}(30^\circ + 120^\circ \cdot 0)) = 4 \cdot (\cos(30^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(30^\circ))$$

$$z_1 = 4 \cdot (\cos(30^\circ + 120^\circ \cdot 1) + i \cdot \operatorname{sen}(30^\circ + 120^\circ \cdot 1)) = 4 \cdot (\cos(150^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(150^\circ))$$

$$z_2 = 4 \cdot (\cos(30^\circ + 120^\circ \cdot 2) + i \cdot \operatorname{sen}(30^\circ + 120^\circ \cdot 2)) = 4 \cdot (\cos(270^\circ) + i \cdot \operatorname{sen}(270^\circ))$$

Los valores complejos que se obtienen son,

$$z_0 = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{3} + 2i = 4 \cdot e^{\frac{\pi i}{6}}$$

$$z_1 = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right) = -2\sqrt{3} + 2i = 4 \cdot e^{\frac{5\pi i}{6}}$$

$$z_2 = 4 \cdot (0 + i \cdot (-1)) = -4i = 4 \cdot e^{\frac{3\pi i}{2}}$$

5. Sea $z = 1 + \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta$ donde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

(a) Muestre que:

(1 punto)

(i) $\arg(z) = \theta$

(ii) $|z| = 2 \cos \theta$

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de θ para el que se cumple que $\arg(z^3) = |z^3|$. (0,75 puntos)

(a) Muestre que

(i) $\arg(z) = \theta$

El argumento α del complejo z es tal que,

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{1 + \cos \theta} = \frac{2\operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta}{1 + \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{2\operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta}{\cos^2 \theta + \cos^2 \theta} = \frac{2\operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta}{2 \cos^2 \theta} =$$

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

Por tanto,

$$\tan \alpha = \tan \theta \Leftrightarrow \alpha = \theta \Leftrightarrow \arg(z) = \theta$$

(ii) $|z| = 2 \cos \theta$

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(1 + \cos 2\theta)^2 + \operatorname{sen}^2 2\theta} = \sqrt{1 + \cos^2 2\theta + 2 \cos 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta} = \\ &= \sqrt{2 + 2 \cos 2\theta} = \sqrt{2 + 2 \cos^2 \theta - 2 \operatorname{sen}^2 \theta} = \sqrt{2 \cos^2 \theta + 2 \cos^2 \theta} = \\ &= \sqrt{4 \cos^2 \theta} = 2 \cos \theta \end{aligned}$$

(*) Un segundo modo de comprobar las dos cosas conjuntamente es el siguiente:

$$\begin{aligned} z &= 1 + \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta = 1 + \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + i \cdot 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \\ &= 2 \cos^2 \theta + i \cdot 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \end{aligned}$$

entonces, sacando factor común $2 \cos \theta$ obtenemos la fórmula trigonométrica de z

$$z = 2 \cos \theta \cdot (2 \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Por tanto, $|z| = 2 \cos \theta$, $\arg(z) = \theta$

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de θ para el que se cumple que $\arg(z^3) = |z^3|$.

Como $z = 2\cos \theta$ entonces,

$$z^3 = (2\cos \theta)^3_{3\theta}$$

En ese caso,

$$\arg(z^3) = |z^3| \Leftrightarrow 3\theta = (2\cos \theta)^3$$

Utilizando la calculadora gráfica y teniendo en cuenta que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, obtenemos,

$$\theta \approx 0,83$$

