

## CUADERNILLO 6

### Análisis y enfoques Matemáticas I y II

Entrega límite **VIERNES, 10 de ABRIL de 2026 (hora de inicio de clase)**

---

NOMBRE: \_\_\_\_\_

APELLIDOS: \_\_\_\_\_

---

#### Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 12,5 puntos.
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$\text{Nota def.} = \text{Nota total} / (\text{Días de retraso} + 1)$$

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

### SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 0,75 puntos]

(Análisis y Enfoques NS Mayo 2025, P1 Ej.9)

1. Pruebe **por contradicción** que  $\frac{1}{x \cdot (1-x)} \geq 4$  para  $x \in \mathbb{R}$   $0 < x < 1$ .



[Puntuación máxima: 5 puntos]

(Análisis y Enfoques NS Mayo 2025, P1, Ej.12)

2. (a) Resuelva  $z^2 = -1 - \sqrt{3}i$  dando las respuestas en la forma  $z = r \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ .

(1 punto)

Sean  $z_1$  y  $z_2$  las raíces cuadradas de  $-1 - \sqrt{3}i$  donde  $\operatorname{Re}(z_1) > 0$ .

Sean  $z_3$  y  $z_4$  las raíces cuadradas de  $-1 + \sqrt{3}i$  donde  $\operatorname{Re}(z_3) > 0$ .

(b) Expresando las respuestas en la forma  $z = a + bi$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ , (1 punto)

(i) Halle  $z_1$  y  $z_2$

(ii) Deduzca  $z_3$  y  $z_4$ .

Las cuatro raíces  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  están representadas en un diagrama de Argand por los puntos  $A, B, C$  y  $D$ , respectivamente.

(c) (i) Sitúe los puntos  $A, B, C$  y  $D$  en el diagrama de Argand. (1 punto)

(ii) Halle el área del polígono que forman estos cuatro puntos.

Las cuatro raíces  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  satisfacen la ecuación  $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$ .

Las cuatro raíces  $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}$  y  $\frac{1}{z_4}$  satisfacen la ecuación  $pw^4 + qw^2 + r = 0$  donde  $p, q, r \in \mathbb{R}$ .

(d) Halle el valor de  $p, q$  y  $r$ . (1 punto)

Las cuatro raíces  $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}$  y  $\frac{1}{z_4}$  están representadas por los puntos  $E, F, G$  y  $H$  respectivamente en un diagrama de Argand.

(e) (i) Halle  $\frac{1}{z_1}$  y expréselo en la forma  $z = a + bi$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ . (1 punto)

(ii) A partir de lo anterior, deduzca el área del polígono formado por estos cuatro puntos.

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

LA WEB DEL

**PROFE DE MATHS**

[Puntuación máxima: 4 puntos]

(Análisis y Enfoques NS Mayo 2024, P1, Ej.10)

3. Considere la progresión aritmética  $a, p, q, \dots$ , donde  $a, p, q \neq 0$ .

(a) Muestre que  $2p - q = a$ . (0,5 puntos)

Considere la progresión geométrica  $a, s, t, \dots$ , donde  $a, s, t \neq 0$ .

(b) Muestre que  $s^2 = at$ . (0,5 puntos)

El primer término de las dos progresiones es  $a$ . Se sabe que  $q = t = 1$ .

(c) Muestre que  $p > \frac{1}{2}$ . (0,5 puntos)

Considere el caso en el que  $a = 9, s > 0$  y  $q = t = 1$ .

(d) Escriba los cuatro primeros términos de: (1 punto)

(i) La progresión aritmética.

(ii) La progresión geométrica

La progresión aritmética y la geométrica se utilizan para formar una nueva progresión aritmética  $u_n$ .

Los tres primeros términos de  $u_n$  son  $u_1 = 9 + \ln 9$ ,  $u_2 = 5 + \ln 3$  y  $u_3 = 1 + \ln 1$

(e) (i) Halle la diferencia común de la nueva progresión,, dándola en función de  $\ln 3$ .

(0,75 puntos)

(ii) Muestre que

$$\sum_{i=1}^{10} u_i = -90 - 25 \cdot \ln 3$$

(0,75 puntos)

LA WEB DEL

**PROFE DE MATHS**

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 1 punto]

4. Resolver algebraicamente la ecuación  $z^3 - 64i = 0$  en el plano complejo dando las soluciones en notación cartesiana y exponencial.

LA WEB DEL  
PROFE DE MATE

[Puntuación máxima: 1,75 puntos]

(Análisis y Enfoques NS Mayo 2024, P2, Ej.8)

5. Sea  $z = 1 + \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta$  donde  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

(a) Muestre que:

(1 punto)

(i)  $\arg(z) = \theta$

(ii)  $|z| = 2 \cos \theta$

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de  $\theta$  para el que se cumple que  $\arg(z^3) = |z^3|$ . (0,75 puntos)

LA WEB DEL  
PROFE DE MATE