

CUADERNO DE TRABAJO 5

Análisis y enfoques Matemáticas I y II

Entrega límite **MIÉRCOLES, 4 de MARZO de 2026** (hora de inicio de clase)

NOMBRE: _____

APELLIDOS: _____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10,25 puntos.
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$Nota\ def. = Notal\ total / (Días\ de\ retraso + 1)$$

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 2,25 puntos]

[Puntuación máxima: 1 punto]

(Noviembre 2024, Análisis y Enfoques NS, P1, ej.5)

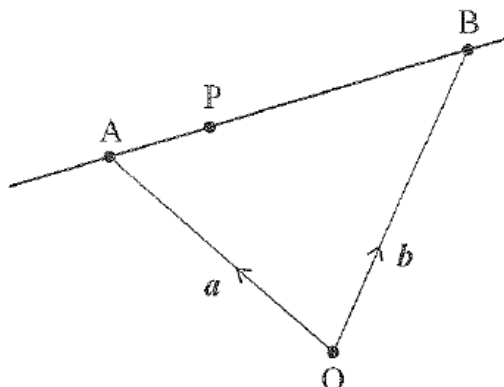
1. Sea una progresión aritmética donde $u_{10} = 16$ y $S_{25} = 100$. Halle el valor de k para el que $u_k = 0$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

[Puntuación máxima: 1 punto]

(Noviembre 2024, Análisis y Enfoques NS, P1, ej.8)

2. En la siguiente figura se muestran dos puntos A y B , tales que $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$,



El punto P pertenece a la recta que pasa por A y B , de tal modo que $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ con $0 < \lambda < 1$.

(a) Muestre que $\overrightarrow{OP} = (1 - \lambda) \cdot a + \lambda \cdot b$. (0,25 puntos)

Se sabe que $|a| = 1$, $|b| = 2$ y $a \cdot b = \frac{1}{4}$.

(b) Para el caso en que $\overrightarrow{OP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$, halle el valor de λ . (0,75 puntos)

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

(Noviembre 2024, Análisis y Enfoques NS, P1, ej.9)

3. (a) Pruebe que $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{sen} 2\theta - 1}{\cos 2\theta}$ donde $\theta \neq \frac{(2n+1)\pi}{4}$ $n \in \mathbb{Z}$. (1 punto)

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, resuelva $\frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x} = \sqrt{3}$ (0,5 puntos)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

4. La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica viene dada por,

$$S_n = \sum_{r=0}^{n-1} 5 \cdot (\log_2 c)^r$$

(a) Sabiendo que S_n converge, halle el rango de valores posibles de c . (0,5 puntos)

(b) Para el caso en el que $c = 1,5$, halle el menor valor de n para el que se cumple que

$$|S_\infty - S_n| < 0,1 \quad (0,75 \text{ puntos})$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

[Puntuación máxima: 1,75 puntos]

5. Sea el triángulo de vértices $A(2,5)$, $B(-3,-4)$ y $C(9,-2)$,

(a) Calcule algebraicamente, a partir de sus medianas, el baricentro G del triángulo ABC .

(1 punto)

(b) Compruebe que el baricentro del triángulo ABC se puede calcular a partir de la fórmula

$$\text{Baricentro} = G = \frac{A + B + C}{3} \quad (0,25 \text{ puntos})$$

(c) En el triángulo ABC , compruebe algebraicamente que la distancia entre el baricentro G y el vértice A es el doble que la distancia entre el baricentro G y el punto medio del lado opuesto al vértice A . (0,5 puntos)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 2 puntos]

6. Dado el punto $A(-2, 1)$ y la recta $r \equiv x - 2y = 5$, calcule algebraicamente,

- (a) La recta paralela a r que pasa por el punto A . (0,5 puntos)
- (b) El punto simétrico A' del punto A respecto de la recta r . (0,75 puntos)
- (c) Las coordenadas de los puntos de la recta r que distan 9 unidades del punto A . (0,75 puntos)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 1,75 puntos]

7. (a) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, calcule la ecuación general de la recta s paralela a la recta r que pasa por el punto $P(2,1)$. ¿Cuál es la pendiente y la inclinación de la recta s ? Exprese la inclinación en grados, minutos y segundos como un ángulo positivo. (0,75 puntos)

(b) Calcule la distancia entre la recta r y la recta s . (0,5 puntos)

(c) Calcule el ángulo agudo que forman las rectas secantes, (0,5 puntos)

$$p \equiv y = 5x + 3 \quad q \equiv x + 2y = -4$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CUADERNILLO 5

ANÁLISIS Y ENFOQUES – MATEMÁTICAS I

[Puntuación máxima: 1 punto]

(Noviembre 2024, Análisis y Enfoques NS, P1, ej.5)

1. Sea una progresión aritmética donde $u_{10} = 16$ y $S_{25} = 100$. Halle el valor de k para el que $u_k = 0$

Como $u_{10} = 16$, al tratarse de una progresión aritmética tendremos que,

$$u_{10} = u_1 + (10 - 1) \cdot d \Leftrightarrow 16 = u_1 + 9d \Leftrightarrow 16 - 9d = u_1$$

Como $S_{25} = 100$, y tenemos que,

$$S_{25} = \frac{(u_1 + u_{25}) \cdot 25}{2}$$

Entonces,

$$100 = \frac{(u_1 + u_{25}) \cdot 25}{2} \Leftrightarrow \frac{200}{25} = u_1 + u_{25} \Leftrightarrow 8 = u_1 + u_{25}$$

Además,

$$u_{25} = u_1 + (25 - 1) \cdot d \Leftrightarrow u_{25} = u_1 + 24 \cdot d$$

Por lo que,

$$8 = u_1 + u_{25} \Leftrightarrow 8 = u_1 + u_1 + 24 \cdot d \Leftrightarrow 8 = 2u_1 + 24 \cdot d$$

Como $16 - 9d = u_1$ entonces,

$$8 = 2u_1 + 24 \cdot d \Leftrightarrow 8 = 2 \cdot (16 - 9d) + 24 \cdot d \Leftrightarrow 8 = 32 - 18d + 24d \Leftrightarrow$$

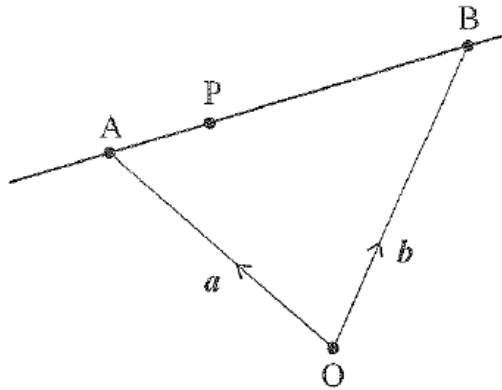
$$\Leftrightarrow -24 = 6d \Leftrightarrow d = -4 \Leftrightarrow u_1 = 16 - 9d = 16 - 9 \cdot (-4) = 16 + 36 = 52$$

En ese caso, si queremos calcular el valor de k para el que $u_k = 0$,

$$u_k = u_1 + (k - 1) \cdot d \Leftrightarrow 0 = 52 + (k - 1) \cdot (-4) \Leftrightarrow \frac{-52}{-4} = k - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 1 + \frac{52}{4} = \frac{56}{4} = 14$$

2. En la siguiente figura se muestran dos puntos A y B , tales que $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$,



El punto P pertenece a la recta que pasa por A y B , de tal modo que $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ con $0 < \lambda < 1$.

(a) Muestre que $\overrightarrow{OP} = (1 - \lambda) \cdot a + \lambda \cdot b$. (0,25 puntos)

Se sabe que $|a| = 1$, $|b| = 2$ y $a \cdot b = \frac{1}{4}$.

(b) Para el caso en que $\overrightarrow{OP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$, halle el valor de λ . (0,75 puntos)

(a) Muestre que $\overrightarrow{OP} = (1 - \lambda) \cdot a + \lambda \cdot b$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = a + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = a + \lambda \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = a + \lambda \cdot (b - a) = a + \lambda \cdot b - \lambda \cdot a = \\ &= (1 - \lambda) \cdot a + \lambda \cdot b \end{aligned}$$

(b) Para el caso en que $\overrightarrow{OP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$, halle el valor de λ .

Como $\overrightarrow{OP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ entonces $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. En ese caso, si

$$\overrightarrow{OP} = (1 - \lambda) \cdot a + \lambda \cdot b$$

Multiplicando por $\overrightarrow{AB}$, tendremos que,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = ((1 - \lambda) \cdot a + \lambda \cdot b) \cdot \overrightarrow{AB} = ((1 - \lambda) \cdot a + \lambda \cdot b) \cdot (b - a)$$

$$0 = (1 - \lambda) \cdot a \cdot b - (1 - \lambda) \cdot a^2 + \lambda \cdot b^2 - \lambda \cdot b \cdot a = (1 - 2\lambda) \cdot a \cdot b - (1 - \lambda) \cdot a^2 + \lambda \cdot b^2$$

Como $|a| = 1$, $|b| = 2$ y $a \cdot b = \frac{1}{4}$ entonces,

$$0 = (1 - 2\lambda) \cdot a \cdot b - (1 - \lambda) \cdot a^2 + \lambda \cdot b^2 \Leftrightarrow 0 = (1 - 2\lambda) \cdot \frac{1}{4} - (1 - \lambda) \cdot 1^2 + \lambda \cdot 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1 - 2\lambda}{4} - (1 - \lambda) + 4\lambda \Leftrightarrow 0 = 1 - 2\lambda - 4 + 4\lambda + 16\lambda \Leftrightarrow 3 = 18\lambda \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \lambda$$

3. (a) Pruebe que $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sen 2\theta - 1}{\cos 2\theta}$ donde $\theta \neq \frac{(2n+1)\pi}{4}$ $n \in \mathbb{Z}$. (1 punto)

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, resuelva $\frac{\sen x - 1}{\cos x} = \sqrt{3}$ (0,5 puntos)

(a) Pruebe que $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sen 2\theta - 1}{\cos 2\theta}$ donde $\theta \neq \frac{(2n+1)\pi}{4}$ $n \in \mathbb{Z}$.

Si $\theta \neq \frac{(2n+1)\pi}{4}$ $n \in \mathbb{Z}$ entonces,

$$\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \theta - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan \theta \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\tan \theta - 1}{1 + \tan \theta \cdot 1} = \frac{\frac{\sen \theta}{\cos \theta} - 1}{1 + \frac{\sen \theta}{\cos \theta}} = \frac{\sen \theta - \cos \theta}{\cos \theta + \sen \theta}$$

Si multiplicamos en el numerador y en el denominador por $(\cos \theta - \sen \theta)$

$$\begin{aligned} \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{(\sen \theta - \cos \theta) \cdot (\cos \theta - \sen \theta)}{(\cos \theta + \sen \theta) \cdot (\cos \theta - \sen \theta)} = -\frac{\sen^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\sen \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \sen^2 \theta} = \\ &= -\frac{1 - \sen 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\sen 2\theta - 1}{\cos 2\theta} \end{aligned}$$

(b) A partir de lo anterior, o de cualquier otro modo, resuelva $\frac{\sen x - 1}{\cos x} = \sqrt{3}$

Hacemos el cambio de variable,

$$x = 2\theta$$

Entonces,

- Si $\theta \neq \frac{(2n+1)\pi}{4}$ $n \in \mathbb{Z}$ entonces,

$$\frac{\sen x - 1}{\cos x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sen 2\theta - 1}{\cos 2\theta} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\theta - \frac{\pi}{4} = \arctan(\sqrt{3}) \Leftrightarrow \theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{7\pi}{12} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{7\pi}{12} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Si $\theta = \frac{(2n+1)\pi}{4}$ $n \in \mathbb{Z}$ entonces $\frac{x}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{4}$ $n \in \mathbb{Z}$ por lo que $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ $n \in \mathbb{Z}$.

En ese caso, $\sen(x) = \sen\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = 0$ y $\cos(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = \pm 1$ y por tanto,

$$\frac{\sen x - 1}{\cos x} \neq \sqrt{3}$$

4. La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica viene dada por,

$$S_n = \sum_{r=0}^{n-1} 5 \cdot (\log_2 c)^r$$

(a) Sabiendo que S_n converge, halle el rango de valores posibles de c . (0,5 puntos)

(b) Para el caso en el que $c = 1,5$, halle el menor valor de n para el que se cumple que

$$|S_\infty - S_n| < 0,1 \quad (0,75 \text{ puntos})$$

(a) Sabiendo que S_n converge, halle el rango de valores posibles de c .

Al ser S_n la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de la forma

$$a_0 = 5 \cdot (\log_2 c)^0 = 5$$

$$a_1 = 5 \cdot (\log_2 c)^1 = 5 \cdot \log_2 c$$

$$a_k = 5 \cdot (\log_2 c)^k$$

y si es convergente la suma entonces, la razón tiene que ser menor que 1 y mayor que -1 . En ese caso,

$$-1 < \log_2 c < 1$$

Por lo que,

$$2^{-1} < c < 2^1 \Leftrightarrow c \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

(b) Para el caso en el que $c = 1,5$, halle el menor valor de n para el que se cumple que

$$|S_\infty - S_n| < 0,1$$

Como,

$$S_\infty = \frac{a_0}{1-r} = \frac{5}{1-\log_2 1,5}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |S_\infty - S_n| &= \left| \frac{5}{1-\log_2 1,5} - \sum_{r=0}^{n-1} 5 \cdot (\log_2 1,5)^r \right| = \left| \frac{5}{1-\log_2 1,5} - 5 \cdot \frac{(1,5)^n - 1}{\log_2 1,5 - 1} \right| = \\ &= 5 \cdot \left| \frac{1 + (\log_2 1,5)^n - 1}{1 - \log_2 1,5} \right| = 5 \cdot \left| \frac{(\log_2 1,5)^n}{1 - \log_2 1,5} \right| \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $|S_\infty - S_n| < 0,1$ entonces,

$$\begin{aligned} 5 \cdot \left| \frac{(\log_2 1,5)^n}{1 - \log_2 1,5} \right| < 0,1 &\Leftrightarrow \left| \frac{(\log_2 1,5)^n}{1 - \log_2 1,5} \right| < 0,02 \Leftrightarrow \frac{(\log_2 1,5)^n}{1 - \log_2 1,5} < 0,02 \\ \Leftrightarrow (\log_2 1,5)^n < 0,02 \cdot (1 - \log_2 1,5) &\Leftrightarrow \ln((\log_2 1,5)^n) < \ln(0,02 \cdot (1 - \log_2 1,5)) \\ \Leftrightarrow n \cdot \ln((\log_2 1,5)) < \ln(0,02 \cdot (1 - \log_2 1,5)) &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,02 \cdot (1 - \log_2 1,5))}{\ln((\log_2 1,5))} \approx 8,93 \end{aligned}$$

Concluimos que el menor valor de n para el que se cumple que $|S_\infty - S_n| < 0,1$ es $n = 9$.

LA WEB DEL
PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 1,75 puntos]

5. Sea el triángulo de vértices $A(2,5)$, $B(-3,-4)$ y $C(9,-2)$,

(a) Calcule algebraicamente, a partir de sus medianas, el baricentro G del triángulo ABC .

(1 punto)

(b) Compruebe que el baricentro del triángulo ABC se puede calcular a partir de la fórmula

$$\text{Baricentro} = G = \frac{A + B + C}{3} \quad (0,25 \text{ puntos})$$

(c) En el triángulo ABC , compruebe algebraicamente que la distancia entre el baricentro G y el vértice A es el doble que la distancia entre el baricentro G y el punto medio del lado opuesto al vértice A .
(0,5 puntos)

(a) Calcule algebraicamente, a partir de sus medianas, el baricentro del triángulo de vértices.

Calculo la ecuación de la mediana m_A que pasa por el punto A y el punto medio del segmento BC .

Para ello, calculo primero las coordenadas del punto medio del segmento BC .

$$M_{BC} = \frac{B + C}{2} = \frac{(-3, -4) + (9, -2)}{2} = (3, -3)$$

Ahora calculo un vector director de la recta mediana m_A según,

$$\vec{v}_{m_A} = \overrightarrow{AM_{BC}} = M_{BC} - A = (3, -3) - (2, 5) = (1, -8)$$

Una ecuación continua de la recta mediana m_A es,

$$m_A \equiv \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 5}{-8}$$

Y una ecuación general de la mediana m_A es,

$$m_A \equiv -8x + 16 = y - 5 \Leftrightarrow 8x + y = 21$$

Calculo ahora la ecuación de la mediana m_B que pasa por el punto B y el punto medio del segmento AC .

Al igual que antes, calculo las coordenadas del punto medio del segmento AC .

$$M_{AC} = \frac{A + C}{2} = \frac{(2, 5) + (9, -2)}{2} = \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Ahora calculo un vector director de la recta mediana m_B según,

$$\vec{v}_{m_B} = \overrightarrow{BM_{AC}} = M_{AC} - B = \left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right) - (-3, -4) = \left(\frac{17}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

Una ecuación paramétrica de la recta mediana m_B es,

$$m_B \equiv \begin{cases} x = -3 + 17t \\ y = -4 + 11t \end{cases}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Calculamos el Baricentro G del triángulo ABC , que es el punto de corte de las tres medianas, sustituyendo las paramétricas de la mediana m_B en la ecuación general de la mediana m_A .

$$8 \cdot (-3 + 17t) + (-4 + 11t) = 21 \Leftrightarrow -24 + 136t - 4 + 11t = 21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 147t = 49 \Leftrightarrow t = \frac{49}{147} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, el Baricentro G del triángulo ABC tiene por coordenadas,

$$G = \begin{cases} x = -3 + 17 \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \\ y = -4 + 11 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow G\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

(b) Compruebe que el baricentro del triángulo ABC se puede calcular a partir de la fórmula

$$\text{Baricentro} = \frac{A + B + C}{3}$$

Operando obtenemos,

$$\frac{A + B + C}{3} = \frac{(2,5) + (-3,-4) + (9,-2)}{3} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Que son las mismas coordenadas que las del baricentro G obtenidas en el apartado anterior.

(c) En el triángulo ABC , compruebe algebraicamente que la distancia entre el baricentro G y el vértice A es el doble que la distancia entre el baricentro G y el punto medio del lado opuesto al vértice A .

Para el vértice A y el punto medio del segmento BC .

$$d(A, G) = |\overrightarrow{AG}| = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 5\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{260}}{3} = \frac{2 \cdot \sqrt{65}}{3}$$

$$d(M_{BC}, G) = |\overrightarrow{M_{BC}G}| = \sqrt{\left(\frac{8}{3} - 3\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} + 3\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{3}$$

Por lo tanto, $d(A, G) = 2 \cdot d(M_{BC}, G)$ como se pedía comprobar.

[Puntuación máxima: 2 puntos]

6. Dado el punto $A(-2, 1)$ y la recta $r \equiv x - 2y = 5$, calcule algebraicamente,

(a) La recta paralela a r que pasa por el punto A . (0,5 puntos)

(b) El punto simétrico A' del punto A respecto de la recta r . (0,75 puntos)

(c) Las coordenadas de los puntos de la recta r que distan 9 unidades del punto A . (0,75 puntos)

(a) La recta paralela a r que pasa por el punto A .

Una recta paralela r' a la recta r será de la forma,

$$r' \equiv x - 2y = c$$

Como $A(-2, 1) \in r'$ entonces,

$$-2 - 2 \cdot 1 = c \Leftrightarrow c = -4$$

Y una ecuación general de la recta r' paralela a la recta r que pasa por el punto A es,

$$r' \equiv x - 2y = -4$$

(b) El punto simétrico A' del punto A respecto de la recta r .

Un vector normal a la recta r es

$$\vec{n}_r = (1, -2)$$

Y unas paramétricas de la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto A son,

$$s \equiv \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

El punto de corte M de la recta r con la recta s viene dado por la sustitución de las paramétricas de la recta s en la recta r según,

$$\begin{aligned} (-2 + t) - 2 \cdot (1 - 2t) &= 5 \Leftrightarrow -2 + t - 2 + 4t = 5 \Leftrightarrow 5t = 9 \Leftrightarrow t = \frac{9}{5} \\ \Leftrightarrow M\left(-2 + \frac{9}{5}, 1 - 2 \cdot \frac{9}{5}\right) &= M\left(-\frac{1}{5}, -\frac{13}{5}\right) \end{aligned}$$

El punto simétrico A' verifica que,

$$M = \frac{A + A'}{2} \Leftrightarrow 2M = A + A' \Leftrightarrow A' = 2M - A$$

Por tanto,

$$A' = 2M - A = 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}, -\frac{13}{5}\right) - (-2, 1) = \left(-\frac{2}{5} + 2, -\frac{26}{5} - 1\right) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{31}{5}\right)$$

(c) Las coordenadas de los puntos de la recta r que distan 9 unidades del punto A .

Sea la recta $r \equiv x - 2y = 5$ y un punto cualquiera $P \in r$ de la forma,

$$x - 2y = 5 \Leftrightarrow x = 5 + 2y \Rightarrow P(5 + 2t, t), \forall t \in \mathbb{R}$$

Como el punto $P \in r$ debe distar 9 unidades del punto A entonces

$$d(P, A) = 9 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AP}| = 9$$

Como,

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (5 + 2t, t) - (-2, 1) = (7 + 2t, t - 1)$$

Entonces,

$$|\overrightarrow{AP}| = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(7 + 2t)^2 + (t - 1)^2} = 9 \Leftrightarrow 49 + 4t^2 + 28t + t^2 + 1 - 2t = 81 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5t^2 + 26t - 31 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-31)}}{2 \cdot 5} = \frac{-26 \pm \sqrt{676 + 620}}{10} =$$

$$= \frac{-26 \pm \sqrt{1296}}{10} = \frac{-26 \pm 36}{10} = \begin{cases} t = -6,2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, hay dos puntos de la recta r que se encuentran a distancia 9 unidades del punto A y son,

- Si $t = -6,2$ entonces $P = (5 + 2 \cdot (-6,2); -6,2) = (-7,4; -6,2)$
- Si $t = 1$ entonces $P = (5 + 2 \cdot 1; 1) = (7; 1)$

[Puntuación máxima: 1,75 puntos]

7. (a) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, calcule la ecuación general de la recta s paralela a la recta r que pasa por el punto $P(2,1)$. ¿Cuál es la pendiente y la inclinación de la recta s ? Exprese la inclinación en grados, minutos y segundos como un ángulo positivo. (0,75 puntos)
- (b) Calcule la distancia entre la recta r y la recta s . (0,5 puntos)
- (c) Calcule el ángulo agudo que forman las rectas secantes, (0,5 puntos)

$$p \equiv y = 5x + 3 \quad q \equiv x + 2y = -4$$

- (a) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, calcule la ecuación general de la recta s paralela a la recta r que pasa por el punto $P(2,1)$. ¿Cuál es la pendiente y la inclinación de la recta s ? Exprese la inclinación en grados, minutos y segundos como un ángulo positivo.

Un vector director de la recta r será,

$$\vec{v}_r = (1, -2)$$

Una ecuación continua de la recta s es,

$$s \equiv \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{-2}$$

Por lo tanto, operando, obtenemos la ecuación general pedida,

$$-2x + 4 = y - 1 \Leftrightarrow r \equiv 2x + y = 5$$

Si queremos calcular la pendiente podemos hacer dos cosas,

- 1) Calcular la pendiente a partir del vector director,

$$m_r = \frac{-2}{1} \Leftrightarrow m_r = -2$$

- 2) Pasamos la recta r a forma explícita,

$$r \equiv 2x + y = 5 \Leftrightarrow y = -2x + 5$$

En ese caso, la pendiente es el coeficiente que multiplica a x ,

$$m_r = -2$$

La inclinación se obtiene a partir de,

$$m_r = -2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{arctg}(-2) = 116^\circ 33'54,1''$$

(b) Calcule la distancia entre la recta r y la recta s .

Consideramos el punto $P(2,1)$ y la recta perpendicular r' a la recta r que pasa por P . Esa recta tiene por vector director cualquiera que sea normal al vector director de la recta r . Por lo tanto, un vector director de la recta r' es,

$$\vec{v}_{r'} = (2,1)$$

Calculamos una ecuación general de la recta r' a partir de la ecuación continua

$$r' \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} \Leftrightarrow r' \equiv x-2 = 2y-2 \Leftrightarrow r' \equiv x-2y=0$$

Calculamos el punto de intersección Q de la recta r con la recta r' , sustituyendo las paramétricas de la recta r en la ecuación general de la recta r' .

$$t - 2 \cdot (1 - 2t) = 0 \Leftrightarrow t - 2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5}$$

Por tanto, el punto de intersección es,

$$Q = \left(\frac{2}{5}, 1 - 2 \cdot \frac{2}{5} \right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

En tal caso, la distancia entre las rectas r y s es la distancia entre los puntos P y Q .

Por lo tanto, la distancia entre las dos rectas es,

$$\begin{aligned} d(r,s) = d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| &= \sqrt{\left(\frac{2}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{5} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{80}}{5} \text{ unidades} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ unidades} \approx 1,789 \text{ unidades} \end{aligned}$$

(c) Calcule el ángulo agudo que forman las rectas secantes,

$$p \equiv y = 5x + 3 \quad q \equiv x + 2y = -4$$

Podemos calcular el ángulo que forman las rectas a partir del ángulo que forman sus vectores normales. Un vector normal de la recta p es $\vec{n}_p = (5, -1)$ y un vector normal de la recta q es $\vec{n}_q = (1, 2)$.

Calculamos el ángulo α que forman a partir del producto escalar,

$$\cos \alpha = \frac{\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q}{|\vec{n}_p| \cdot |\vec{n}_q|} = \frac{5 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{130}}$$

Por lo tanto, el ángulo que forman las rectas es,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{130}}\right) = 74'745'' = 74^\circ 44'41,57''$$