www.lawebdelprofedemates.es

CUADERNILLO 4

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Entrega límite **VIERNES, 6 de FEBRERO de 2025 (hora de inicio de clase)**

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 11 puntos.
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$Nota\ def. = \ Notal\ total/(Días\ de\ retraso + 1)$$

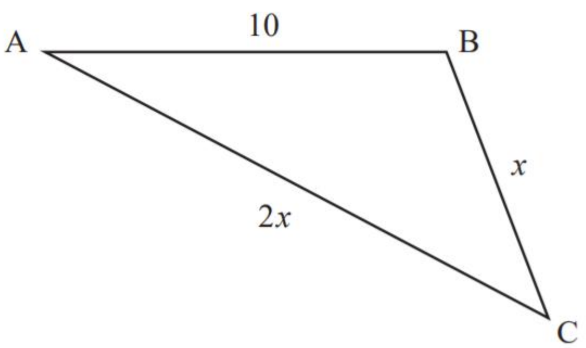
No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Análisis y Enfoques NS P1, Mayo 2021 ej 6)**

1. (a) La siguiente figura muestra el triángulo ABC, donde $AB = 10$, $BC = x$ y $AC = 2x$

la figura no está dibujada a escala



Sabiendo que $\cos C = \frac{3}{4}$, halle el área del triángulo dando la respuesta en la forma $\frac{p \cdot \sqrt{q}}{2}$ con $p, q \in \mathbb{Z}^{+}$. (0,5 puntos)

(b) Dados tres puntos A, B y C se sabe que $AB = 6\ cm$, $BC = 5{,}75\ cm$ y el ángulo $\widehat{BAC} = 65°$

(i) Demuestre que, con estas condiciones, existen dos triángulos ABC diferentes. (0,5 puntos)

(ii) Calcule la longitud del lado AC y de los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{BCA}$ para cada uno de los dos triángulos con las condiciones del problema. (1 punto)

[Puntuación máxima: 1 punto]

2. (a) De un triángulo ABC conocemos la medida de dos de sus lados, que son a y b unidades. También conocemos que las rectas que contienen a dichos lados forman un ángulo conocido de θ $radianes$. Demuestra que el área S del triángulo ABC es,

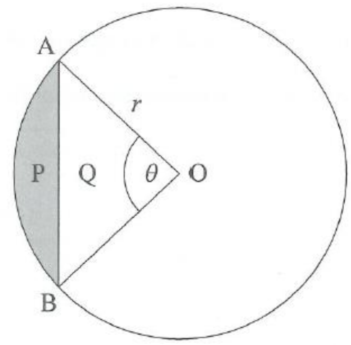
$$S = \frac{a \cdot b \cdot sen\theta}{2}$$

(b) Resuelve con la calculadora la ecuación $3x = 8 \cdot \cos x$ justificando mediante la misma que solo hay una solución.

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Matemáticas NS P2, Mayo 2025 ej 6)**

3. La siguiente figura muestra un círculo de centro O y radio $r\ cm$. Los puntos A y B pertenecen a la circunferencia y $\widehat{AOB} = \theta\ radianes$.

El sector circular OAB está dividido en dos regiones: el segmento circular sombreado P y el triángulo Q. La figura no está a escala.



El área del segmento circular sombreado P es igual a $12{,}8\ cm^2$. .

Las áreas de P y Q sigue la razón $3 : 5$.

Halle el valor de r ayudándote del resultado del ejercicio 2.

[Puntuación máxima: 1,25 puntos] **(Análisis y Enfoques NS P2, Mayo 2025 ej.4)**

4. Alex compra un coche por $EUR\ 30\ 000$. El valor del coche se deprecia un $15\ \%$ anual.

(a) Halle el valor del coche al cabo de diez años. Dé la respuesta redondeando a dos cifras decimales. (0,5 puntos)

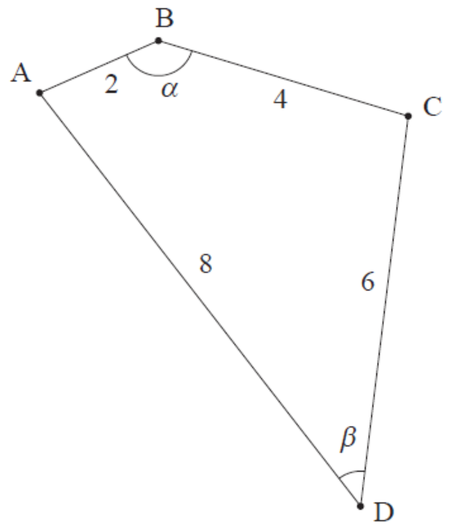
Alex invierte $EUR\ 50\ 000$ en una cuenta bancaria que paga un tipo de interés compuesto del $1{,}5\ \%$ mensual. Durante ese mismo periodo, la inflación fue del $0{,}8$ mensual.

(b) Investige el efecto de la inflación en el tipo de interés para hallar después el número de meses que tardará el valor real de la inversión en superar por primera vez los $EUR\ 55\ 000$. (0,75 puntos)

Puntuación máxima: 2,5 puntos] **(Análisis y Enfoques NS P2, Noviembre 2022 ej.9)**

5. Considere el cuadrilátero $ABCD$, donde $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 6$ y $DA = 8$, como se muestra en la siguiente figura. Sea $\alpha = \widehat{ABC}$ y $\beta = \widehat{ADC}$.

la figura no está dibujada a escala



(a) (i) Halle AC en función de α. (0,5 puntos)

(ii) Halle AC en función de β . (0,5 puntos)

(iii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle una expresión que dé α en función de β. (0,5 puntos)

(b) Si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ halle el área del cuadrilátero $ABCD$. (1 punto)

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Análisis y Enfoques NS, Mayo 2021, P1, Ej.2 y 7)**

6. Resuelva correctamente las siguientes cuestiones argumentando la solución algebraicamente,

(a) La ecuación cúbica $x^3 - kx^2 + 3k = 0$, donde $k > 0$, tiene por raíces $\alpha, \beta \ y \ \alpha + \beta$. Sabiendo que $\alpha \cdot \beta = -\frac{k^2}{4}$, halle el valor de k . (1 punto)

(b)Resuelva la ecuación $2\cos^2 x + 5sen\, x = 4 \ \ si \ \ 0 \le x \le 2\pi$, dando sus dos soluciones en radianes. (1 punto)

[Puntuación máxima: 0,75 puntos]

7. Sea $sen\ 50° = p$ y $cos\ 35° = q$. Halle una expresión en función de p y/o q para cada uno de los siguientes elementos:

$a)\ \text{sen}\,85°$ $\qquad b)\ \tan 100°$ $\qquad c)\ \text{sen}\,17{,}5°$

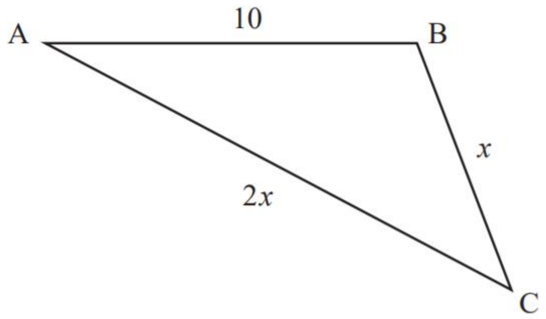
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CUADERNILLO 4

ANALISIS Y ENFOQUES NS – MATEMÁTICAS I

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Análisis y Enfoques NS P1, Mayo 2021 ej 6)**

1. (a) La siguiente figura muestra el triángulo ABC, donde $AB = 10$, $BC = x$ y $AC = 2x$

la figura no está dibujada a escala



Sabiendo que $\cos C = \frac{3}{4}$, halle el área del triángulo dando la respuesta en la forma $\frac{p \cdot \sqrt{q}}{2}$ con $p, q \in \mathbb{Z}^+$. (0,5 puntos)

(b) Dados tres puntos A, B y C se sabe que $AB = 6\ cm$, $BC = 5{,}75\ cm$ y el ángulo $\widehat{BAC} = 65°$

(i) Demuestre que, con estas condiciones, existen dos triángulos ABC diferentes. (0,5 puntos)

(ii) Calcule la longitud del lado AC y de los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{BCA}$ para cada uno de los dos triángulos con las condiciones del problema. (1 punto)

(a) La siguiente figura muestra el triángulo ABC, donde $AB = 10$, $BC = x$ y $AC = 2x$. Sabiendo que $\cos C = \frac{3}{4}$, halle el área del triángulo dando la respuesta en la forma $\frac{p \cdot \sqrt{q}}{2}$ con $p, q \in \mathbb{Z}^+$.

Aplicando el teorema del coseno sobre el lado AB podemos calcular la longitud del lado BC. Tendremos que,

$$|AB|^2 = |BC|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \cos \hat{C} \quad \Leftrightarrow$$

$$10^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 100 = x^2 + 4x^2 - 3x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 100 = 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 50 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{50} = x$$

Por lo tanto, $|BC| = \sqrt{50}\ cm$.

En ese caso, el semi-perímetro será:

$$s = \frac{|AB| + |AC| + |BC|}{2} cm = \frac{10 + 2 \cdot \sqrt{50} + \sqrt{50}}{2}\ cm = \frac{10 + 3 \cdot \sqrt{50}}{2}\ cm$$

Aplicando la fórmula de Herón para el cálculo del área del triángulo ABC tendremos que,

$$\acute{A}\boldsymbol{rea}(\boldsymbol{ABC}) = \sqrt{\boldsymbol{s}\cdot(\boldsymbol{s}-|\boldsymbol{AB}|)\cdot(\boldsymbol{s}-|\boldsymbol{AC}|)\cdot(\boldsymbol{s}-|\boldsymbol{BC}|)} =$$

$$= \sqrt{\frac{10+3\cdot\sqrt{50}}{2}\cdot\left(\frac{10+3\cdot\sqrt{50}}{2}-\mathbf{10}\right)\cdot\left(\frac{10+3\cdot\sqrt{50}}{2}-2\cdot\sqrt{50}\right)\cdot\left(\frac{10+3\cdot\sqrt{50}}{2}-\sqrt{50}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{\mathbf{10+3\cdot\sqrt{50}}}{\mathbf{2}}\cdot\left(\frac{\mathbf{3\cdot\sqrt{50}-10}}{\mathbf{2}}\right)\cdot\left(\frac{10-\sqrt{50}}{2}\right)\cdot\left(\frac{10+\sqrt{50}}{2}\right)} =$$

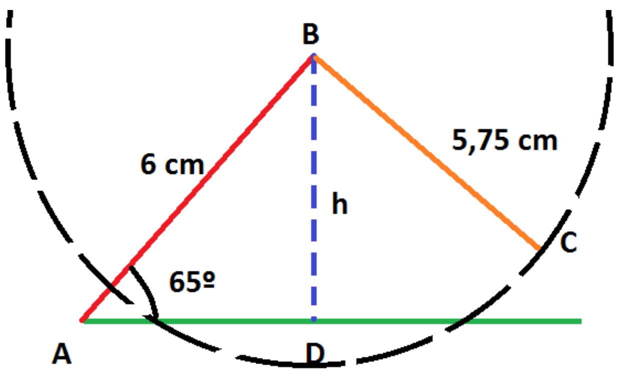
$$= \sqrt{\frac{\mathbf{(3\cdot\sqrt{50}+10)\cdot(3\cdot\sqrt{50}+10)}}{\mathbf{4}}\cdot\frac{\mathbf{(10+\sqrt{50})\cdot(10-\sqrt{50})}}{\mathbf{4}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mathbf{(3\cdot\sqrt{50})^2-10\,\hat{}\,2}}{\mathbf{4}}\cdot\frac{\mathbf{10^2-(\sqrt{50})^2}}{\mathbf{4}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{450-100}}{\mathbf{4}}\cdot\frac{\mathbf{100-50}}{\mathbf{4}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\mathbf{350}}{\mathbf{4}}\cdot\frac{\mathbf{50}}{\mathbf{4}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{175}}{\mathbf{2}}\cdot\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{2}}} = \sqrt{\frac{5^2\cdot 7\cdot 5^2}{2^2}} = \frac{\mathbf{25\cdot\sqrt{7}}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{cm^2}$$

(b) Dados tres puntos A, B y C se sabe que $AB = 6\ cm$, $BC = 5,75\ cm$ y el ángulo $\widehat{BAC} = 65°$

(i) Demuestre que, con estas condiciones, existen dos triángulos ABC diferentes.

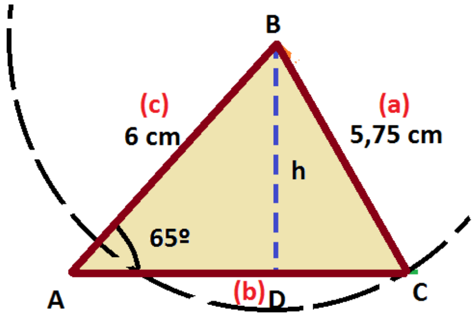


Calculamos la longitud de la altura sobre el lado AC. Si esta resulta ser menor que la longitud del lado BC, y puesto que la longitud del lado AB es menor que la longitud del lado BC, entonces hay dos soluciones.

$$sen\ 65° = \frac{h}{6} \quad \Leftrightarrow \quad h = 6\cdot sen\ 65°$$

Como $h = 6\cdot sen\ 65° \approx 5{,}438\ cm < 5{,}75\ cm = |BC|$ entonces hay dos triángulos ABC con las condiciones expresadas en el enunciado.

- **PRIMER TRIÁNGULO (ACUTÁNGULO)**



Calculamos el ángulo C por el teorema del seno,

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{c}{sen\ C} \Leftrightarrow \frac{5{,}75}{sen\ 65°} = \frac{6}{sen\ C} \Leftrightarrow$$

$$sen\ C = \frac{6 \cdot sen\ 65°}{5{,}75} \Leftrightarrow C = arcsen\left(\frac{6 \cdot sen\ 65°}{5{,}75}\right)$$

Por lo tanto,

$$C = arcsen\left(\frac{6 \cdot sen\ 65°}{5{,}75}\right) \approx 71{,}034° = 71°\ \ 2'\ \ 3{,}95''$$

En ese caso, el ángulo B tendrá amplitud,

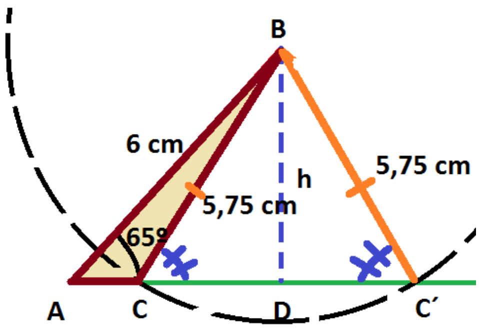
$$B = 180° - 65° - 71°\ \ 2'\ \ 3{,}95'' = 43{,}966° = 43°\quad 57'\quad 57{,}05''$$

Y podemos calcular la longitud del lado AC mediante el teorema del seno,

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} \Leftrightarrow \frac{5{,}75}{sen\ 65°} = \frac{b}{sen\ 43{,}966°} \Leftrightarrow \frac{5{,}75 \cdot sen\ 43{,}966°}{sen\ 65°} = b$$

Por tanto, $|AC| = b = \frac{5{,}75 \cdot sen\ 43{,}966°}{sen\ 65°} \approx 4{,}404\ cm$

- **SEGUNDO TRIÁNGULO (OBTUSÁNGULO)**



En este caso, el triángulo CBC' es isósceles, siendo el punto C' el punto C del triángulo primero. Entonces el ángulo C mide,

$$C = 180° - C' = 180° - 71{,}034° \approx '$$

$$\approx 108{,}966° = 108°\quad 57'\quad 57''$$

Por lo que el ángulo B mide,

$$B = 180° - 65° - 108{,}966° \approx 6{,}034° = 6º\ \ 2'\ \ 2{,}95''$$

Y podemos calcular la longitud del lado AC mediante el teorema del seno,

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} \Leftrightarrow \frac{5{,}75}{sen\ 65°} = \frac{b}{sen\ 6{,}034°} \Leftrightarrow \frac{5{,}75 \cdot sen\ 6{,}034°}{sen\ 65°} = b$$

Por tanto, $|AC| = b = \frac{5{,}75 \cdot sen\ 6{,}034°}{sen\ 65°} \approx 0{,}667\ cm$

[Puntuación máxima: 0,5 puntos]

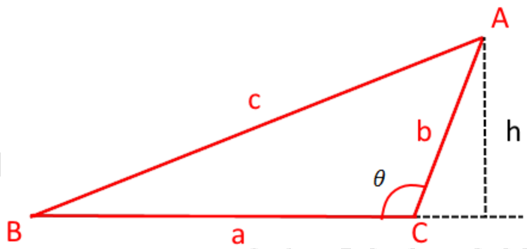
2. (a) De un triángulo ABC conocemos la medida de dos de sus lados, que son $a\ y\ b$ unidades. También conocemos que las rectas que contienen a dichos lados forman un ángulo conocido de $\theta\ radianes$. Demuestra que el área S del triángulo ABC es,

$$S = \frac{a \cdot b \cdot sen\ \theta}{2}$$

(b) Resuelve con la calculadora la ecuación $3x = 8 \cdot \cos x$ justificando mediante la misma que solo hay una solución.

(a) De un triángulo ABC conocemos la medida de dos de sus lados, que son $a\ y\ b$ unidades. También conocemos que las rectas que contienen a dichos lados forman un ángulo conocido de $\theta\ radianes$. Demuestra que el área S del triángulo ABC es,

$$S = \frac{a \cdot b \cdot sen\theta}{2}$$



Representamos un triángulo ABC cualquiera con base en el segmento BC con medida conocida a. En ese caso, su área es,

$$S = \frac{a \cdot h}{2}$$

Si calculamos la altura mediante trigonometría,

$$sen\ (90° - \theta) = \frac{h}{b} \quad \Leftrightarrow \quad h = b \cdot sen\ (90° - \theta)$$

Como $sen\ (90° - \theta) = sen\ \theta$ entonces el área del triángulo es,

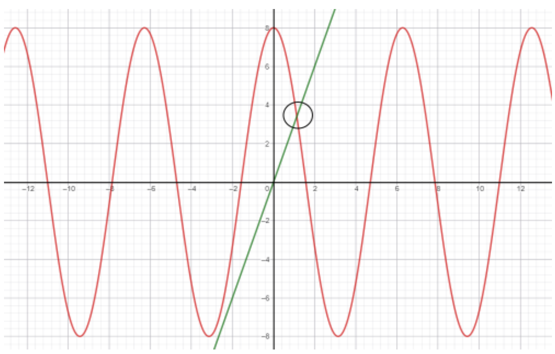
$$S = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b \cdot sen\ (90° - \theta)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot sen\ \theta}{2}$$

(b) Resuelve con la calculadora la ecuación $3x = 8 \cdot \cos x$ justificando mediante la misma que solo hay una solución.

Para resolver con la calculadora CASIO fx-CG50 vamos a la opción Ecuación del menú y escogemos F3 Resolver. Después de escribir la solución, obtenemos,

$$x = 1{,}132273471\ rad$$

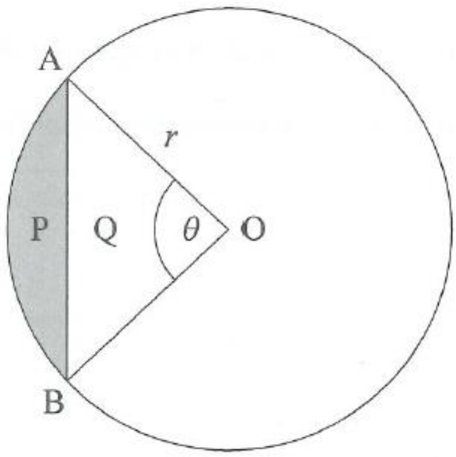
La solución es única ya que al graficar la función $f(x) = 2x$ observamos que es una recta continua creciente mientras que $g(x) = 8cos(x)$ es una función periódica que no toma valor que no esté entre $-8\ y\ 8$. En la gráfica se puede observar que solo hay una solución.



[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Matemáticas NS P2, Mayo 2025 ej 6)**

3. La siguiente figura muestra un círculo de centro O y radio $r\ cm$. Los puntos A y B pertenecen a la circunferencia y $\widehat{AOB} = \theta\ radianes$.

El sector circular OAB está dividido en dos regiones: el segmento circular sombreado P y el triángulo Q. La figura no está a escala.



El área del segmento circular sombreado P es igual a 12,8 cm^2. .

Las áreas de P y Q sigue la razón $3 : 5$.

Halle el valor de r ayudándote del resultado del ejercicio 2.

Según el ejercicio anterior, el área del triángulo ABO es,

$$Q = S_{triángulo(ABO)} = \frac{r \cdot r \cdot sen\ \theta}{2} = \frac{r^2 \cdot sen\ \theta}{2}\ cm^2$$

El área del sector circular es,

$$\begin{array}{ccc} \text{Ángulo} & & \text{Área} \\ 2\pi\ rad & \leftrightarrow & \pi r^2 \\ \theta\ rad & \leftrightarrow & S_{Sector\ (ABO)} \end{array} \qquad S_{Sector\ (ABO)} = \frac{\theta \cdot \pi r^2}{2\pi} = \frac{\theta r^2}{2}\ cm^2$$

El área del segmento circular podríamos escribirla como,

$$P = S_{Sector\ (ABO)} - Q = \frac{\theta r^2}{2} - \frac{r^2 \cdot sen\ \theta}{2}$$

Por lo tanto, como las áreas de P y Q sigue la razón $3 : 5$, el área del triángulo es,

$$Q = \frac{5P}{3} \iff \frac{r^2 \cdot sen\ \theta}{2} = \frac{5 \cdot \left(\frac{\theta r^2}{2} - \frac{r^2 \cdot sen\ \theta}{2}\right)}{3} \iff \frac{sen\ \theta}{2} = \frac{\frac{5}{2} \cdot (\theta - sen\ \theta)}{3}$$

$$\iff 3sen\ \theta = 5\theta - 5sen\ \theta \iff 8sen\ \theta = 5\theta \iff \theta \approx 1{,}599\ rad$$

Como,

$$Q = S_{triángulo(ABO)} = \frac{r^2 \cdot sen\,\theta}{2}\ cm^2$$

$$\frac{r^2 \cdot sen\,1{,}599}{2} = \frac{64}{3} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{\frac{128}{3 \cdot sen\,1{,}599}} \approx 6{,}53\ cm^2$$

[Puntuación máxima: 1,25 puntos] **(Análisis y Enfoques NS P2, Mayo 2025 ej.4)**

4. Alex compra un coche por EUR $30\ 000$. El valor del coche se deprecia un $15\ \%$ anual.

(a) Halle el valor del coche al cabo de diez años. Dé la respuesta redondeando a dos cifras decimales. (0,5 puntos)

Alex invierte EUR $50\ 000$ en una cuenta bancaria que paga un tipo de interés compuesto del 1,5 % mensual. Durante ese mismo periodo, la inflación fue del 0,8 mensual.

(b) Investigue el efecto de la inflación en el tipo de interés para hallar después el número de meses que tardará el valor real de la inversión en superar por primera vez los EUR $55\ 000$. (0,75 puntos)

(a) Alex compra un coche por EUR $30\ 000$. El valor del coche se deprecia un $15\ \%$ anual. Halle el valor del coche al cabo de diez años. Dé la respuesta redondeando a dos cifras decimales.

Al depreciarse un 15 % anual entonces su coeficiente de variación es

$$1-\frac{15}{100}=1-0{,}15=0{,}85.$$

En ese caso, el valor del coche tras diez años será,

$$V_{Final}=V_{Inicial}\cdot 0{,}85^{10}=30\ 000\cdot 0{,}85^{10}\approx 5\ 907\ €$$

(b) Alex invierte EUR 50.000 en una cuenta bancaria que paga un tipo de interés compuesto del $1,5\ \%$ mensual. Durante ese mismo periodo, la inflación fue del $0,8\ \%$ mensual. Investigue el efecto de la inflación en el tipo de interés para hallar después el número de meses que tardará el valor real de la inversión en superar por primera vez los EUR $55\ 000$.

Mientras que el coeficiente de variación correspondiente al 1,5 % mensual es,

$$1+\frac{1{,}5}{100}=1+0{,}015=1{,}015.$$

Dicho coeficiente se relativiza según el cociente,

$$\frac{C_{variación}}{C_{Inflacción}}=\frac{1{,}015}{1+0{,}008}=\frac{1{,}015}{1{,}008}=1{,}0069\hat{4}$$

Por lo tanto, el montante final después de n meses será,

$$C_{Final}=C_{Inicial}\cdot 1{,}0069\hat{4}^{n}=50000\cdot 1{,}0069\hat{4}^{n}$$

Resolvemos entonces la inecuación,

$$50000\cdot 1{,}0069\hat{4}^{n}>55000 \quad\Leftrightarrow\quad 1{,}0069\hat{4}^{n}>\frac{55000}{50000} \quad\Leftrightarrow\quad 1{,}0069\hat{4}^{n}>1{,}1$$

Tomando logaritmos decimales,

$$\log\left(1{,}0069\hat{4}\right)^{n}>\log 1{,}1 \quad\Leftrightarrow\quad n\cdot\log\left(1{,}0069\hat{4}\right)>\log 1{,}1 \quad\Leftrightarrow$$

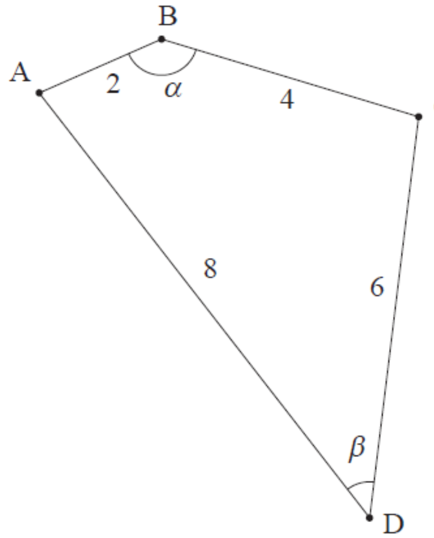
$$\Leftrightarrow\quad n>\frac{\log 1{,}1}{\log 1{,}0069\hat{4}} \quad\Leftrightarrow\quad n>13{,}772266\approx 13{,}78\ meses$$

Tardará 14 $meses$ en superar los EUR $55\ 000$.

Puntuación máxima: 2,5 puntos] **(Análisis y Enfoques NS P2, Noviembre 2022 ej.9)**

5. Considere el cuadrilátero $ABCD$, donde $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 6$ y $DA = 8$, como se muestra en la siguiente figura. Sea $\alpha = \widehat{ABC}$ y $\beta = \widehat{ADC}$.

la figura no está dibujada a escala



(a) (i) Halle AC en función de α. (0,5 puntos)

(ii) Halle AC en función de β . (0,5 puntos)

(iii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle una expresión que dé α en función de β. (0,5 puntos)

(b) Si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ halle el área del cuadrilátero $ABCD$. (1 punto)

(a) (i) Halle AC en función de α.

Aplicando el teorema del coseno sobre el triángulo ABC tendremos que,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$$

Por lo tanto,

$$AC^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos\alpha = 4 + 16 - 16\cos\alpha = 20 - 16\cos\alpha$$

Y concluimos que,

$$AC = \sqrt{20 - 16\cos\alpha} = 2 \cdot \sqrt{5 - 4\cos\alpha}$$

(ii) Halle AC en función de β .

Aplicando el teorema del coseno sobre el triángulo ADC tendremos que,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos\beta$$

Por lo tanto,

$$AC^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos\beta = 64 + 36 - 96\cos\beta = 100 - 96\cos\beta$$

Y concluimos que,

$$AC = \sqrt{100 - 96\cos\beta} = 2 \cdot \sqrt{25 - 24\cos\beta}$$

(iii) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle una expresión que dé α en función de β.

Igualando las dos expresiones de AC de los apartados anteriores obtenemos una expresión que relaciona a los dos ángulos según,

$$2 \cdot \sqrt{5 - 4\cos\alpha} = 2 \cdot \sqrt{25 - 24\cos\beta}$$

Simplificamos,

$$5 - 4\cos\alpha = 25 - 24\cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad 5 - 25 + 24\cos\beta = 4\cos\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 24\cos\beta - 20 = 4\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{24\cos\beta - 20}{4} = \cos\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 6\cos\beta - 5 = \cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \arccos(6\cos\beta - 5)$$

(b) Si $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ halle el área del cuadrilátero $ABCD$.

Como $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ y,

$$AC = 2 \cdot \sqrt{5 - 4\cos\alpha}$$

Entonces,

$$AC = 2 \cdot \sqrt{5 - 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = 2 \cdot \sqrt{5 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 \cdot \sqrt{5 + 2} = 2 \cdot \sqrt{7}$$

Calculamos ahora el área del triángulo ABC en mediante la fórmula de Herón, teniendo en cuenta el cálculo de su semi perímetro,

$$s = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{2 + 4 + 2 \cdot \sqrt{7}}{2} = 3 + \sqrt{7}$$

Por tanto, el área del triángulo ABC es,

$$Área(ABC) = \sqrt{s \cdot (s - AB) \cdot (s - AC) \cdot (s - BC)} =$$

$$= \sqrt{\left(3 + \sqrt{7}\right) \cdot \left(3 + \sqrt{7} - 2\right) \cdot \left(3 + \sqrt{7} - 4\right) \cdot \left(3 + \sqrt{7} - 2\sqrt{7}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(3 + \sqrt{7}\right) \cdot \left(\sqrt{7} + 1\right) \cdot \left(\sqrt{7} - 1\right) \cdot \left(3 - \sqrt{7}\right)} = \sqrt{(9 - 7) \cdot (7 - 1)} = \sqrt{12}$$

Calculamos ahora el área del triángulo ADC en mediante la fórmula de Herón, teniendo en cuenta el cálculo de su semi perímetro,

$$s = \frac{AD + AC + CD}{2} = \frac{8 + 2 \cdot \sqrt{7} + 6}{2} = 7 + \sqrt{7}$$

Por tanto, el área del triángulo ADC es,

$$Área(ADC) = \sqrt{s \cdot (s - AD) \cdot (s - AC) \cdot (s - CD)} =$$

$$= \sqrt{\left(7 + \sqrt{7}\right) \cdot \left(7 + \sqrt{7} - 8\right) \cdot \left(7 + \sqrt{7} - 2\sqrt{7}\right) \cdot \left(7 + \sqrt{7} - 6\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(7 + \sqrt{7}\right) \cdot \left(\sqrt{7} - 1\right) \cdot \left(7 - \sqrt{7}\right) \cdot \left(\sqrt{7} + 1\right)} = \sqrt{(49 - 7) \cdot (7 - 1)} =$$

$$= \sqrt{42 \cdot 6} = 6 \cdot \sqrt{7}$$

Por tanto, el área del cuadrilátero $ABCD$ será,

$$Área(ABCD) = Área\ (ABC) + Área(ADC) = \sqrt{12} + 6 \cdot \sqrt{7} \approx 19{,}339\ u^2$$

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Análisis y Enfoques NS, Mayo 2021, P1, Ej.2 y 7)**

6. Resuelva correctamente las siguientes cuestiones argumentando la solución algebraicamente,

(a) La ecuación cúbica $x^3 - kx^2 + 3k = 0$, donde $k > 0$, tiene por raíces $\alpha, \beta\ y\ \alpha + \beta$. Sabiendo que $\alpha \cdot \beta = -\frac{k^2}{4}$, halle el valor de k . (1 punto)

(b)Resuelva la ecuación $2\cos^2 x + 5sen\, x = 4\ \ si\ \ 0 \le x \le 2\pi$, dando sus dos soluciones en radianes. (1 punto)

(a) La ecuación cúbica $x^3 - kx^2 + 3k = 0$, donde $k > 0$, tiene por raíces $\alpha, \beta\ y\ \alpha + \beta$. Sabiendo que $\alpha \cdot \beta = -\frac{k^2}{4}$, halle el valor de k .

Como las raíces son $\alpha, \beta\ y\ \alpha + \beta$ entonces, la factorización del polinomio es,

$$(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot\big(x-(\alpha+\beta)\big)$$

En ese caso, su término independiente es,

$$-\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta)$$

Y como $\alpha \cdot \beta = -\frac{k^2}{4}$ entonces,

$$-\alpha\cdot\beta\cdot(\alpha+\beta) = \frac{k^2}{4}\cdot(\alpha+\beta)$$

Como el término independiente es $3k$ y $k > 0$ entonces,

$$3k = \frac{k^2}{4}\cdot(\alpha+\beta) \quad \Leftrightarrow \quad 12 = k\cdot(\alpha+\beta)$$

Por otra parte, su coeficiente de grado 2 es,

$$-\big(\alpha+\beta+(\alpha+\beta)\big) = -2(\alpha+\beta)$$

Como el coeficiente de grado dos es $-k$ entonces,

$$-k = -2(\alpha+\beta) \quad \Leftrightarrow \quad k = 2(\alpha+\beta)$$

Sustituyendo $k = 2(\alpha+\beta)$ en $12 = k\cdot(\alpha+\beta)$ tendremos que,

$$12 = 2(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) \quad \Leftrightarrow \quad 6 = (\alpha+\beta)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha+\beta = \pm\sqrt{6}$$

Por lo tanto, las posibilidades de k son,

$$k = 2(\alpha+\beta) = \pm 2\sqrt{6}$$

Como $k > 0$ entonces solo puede ocurrir que $k = 2\sqrt{6}$.

(b)Resuelva la ecuación $\mathbf{2\cos^2 x + 5sen\, x = 4\ \ si\ \ 0 \le x \le 2\pi}$, dando sus dos soluciones en radianes.

Puesto que,

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad sen^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Entonces la ecuación puede quedar expresada solo en función de $sen\ x$ del siguiente modo,

$$2\cos^2 x + 5sen\ x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot (1 - sen^2 x) + 5sen\ x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 2sen^2 x + 5senx = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 2sen^2 x - 5sen\ x + 2 = 0$$

Aplicamos el cambio de variable $t = sen\, x$ tendremos que la ecuación puede resolverse según,

$$2sen^2 x - 5sen\ x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 - 5t + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} == \frac{+5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{+5 \pm 3}{4} = \begin{cases} t = \dfrac{+5 + 3}{4} = 2 \\ t = \dfrac{+5 - 3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Deshacemos el cambio,

- Si $t = 2$ entonces $sen\ x = 2$, cosa que es imposible.
- Si $t = \frac{1}{2}$ entonces $sen\ x = \frac{1}{2}$ y entonces,

$$x = arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6}\ \ rad \\ \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}\ \ rad \end{cases}$$

[Puntuación máxima: 0,75 puntos]

7. Sea $sen\ 50° = p$ y $cos\ 35° = q$. Halle una expresión en función de p y/o q para cada uno de los siguientes elementos: (0,5 + 0,5 + 0,5 puntos)

$a)$ $\text{sen}\, 85°$ $b)$ $\tan 100°$ $c)$ $\text{sen}\, 17{,}5°$

$\boldsymbol{a)}$ $\textbf{sen 85°}$

Como

$$\text{sen}\, 85° = sen(50° + 35°)$$

Aplicando la fórmula de la adición,

$$sen(50° + 35°) = sen\ 50° \cdot \cos 35° + \cos 50° \cdot sen\ 35° = p \cdot q + \cos 50° \cdot sen\ 35°$$

Calculamos ahora $\cos 50°$ mediante la igualdad fundamental de la trigonometría,

$$sen^2\ 50° + \cos^2 50° = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 50° = 1 - sen^2 50° \quad \Leftrightarrow \quad cos\ 50° = \sqrt{1 - p^2}$$

Calculamos ahora $\text{sen}\, 35°$ mediante la igualdad fundamental de la trigonometría,

$$sen^2 35° + \cos^2 35° = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen}^2\, 35° = 1 - cos^2 35° \quad \Leftrightarrow \quad sen\, 35° = \sqrt{1 - q^2}$$

Por lo tanto,

$$\text{sen}\, 85° = sen(50° + 35°) = p \cdot q + \sqrt{1 - p^2} \cdot \sqrt{1 - q^2}$$

$\boldsymbol{b)}$ $\textbf{tan 100°}$

Aplicando la fórmula de la tangente y las fórmulas del seno y coseno del ángulo doble,

$$\tan 100\,° = \frac{sen\ 100º}{\cos 100º} = \frac{2 \cdot sen\ 50° \cdot \cos 50°}{cos^2\ 50° - \text{sen}^2\ 50°} = \frac{2 \cdot p \cdot \sqrt{1 - p^2}}{\left(\sqrt{1 - p^2}\right)^2 - p^2} = \frac{2 \cdot p \cdot \sqrt{1 - p^2}}{1 - 2p^2}$$

$\boldsymbol{c)}$ $\textbf{sen 17,5°}$

Partimos de la igualdad fundamental de la trigonometría aplicada en nuestro ángulo,

$$\cos^2(17{,}5°) + \text{sen}^2(17{,}5°) = 1$$

Y de la fórmula del coseno del ángulo doble aplicado sobre nuestro ángulo,

$$\cos^2(17{,}5°) - \text{sen}^2(17{,}5°) = \cos(2 \cdot 17{,}5°)$$

Si restamos ambas expresiones,

$$\begin{array}{rl} & \cos^2(17{,}5°) + \text{sen}^2(17{,}5°) = 1 \\ - & \underline{\cos^2(17{,}5°) - \text{sen}^2(17{,}5°) = \cos(35°)} \\ & 2sen^2(17{,}5°) = 1 - \cos 35° \end{array}$$

Por lo tanto,

$$sen^2(17{,}5°) = \frac{1 - \cos 35°}{2} \quad \Leftrightarrow \quad sen(17{,}5°) = \sqrt{\frac{1 - \cos 35°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - q}{2}}$$