

CONTROL 5

Análisis y enfoques Matemáticas I y II

Viernes 16 de ENERO de 2026
60 minutos

NOMBRE: _____

APELLIDOS: _____

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Escriba siempre con bolígrafo negro o azul. En caso de tachar, no se tendrá en cuenta lo tachado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.

Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1,75 puntos]

6. Contesta a las siguientes cuestiones razonando y operando matemáticamente,

- (a) Helena va a abrir un depósito con un interés simple del 2 % de rentabilidad y quiere duplicar el dinero que inicialmente invierte. ¿Cuántos años tendrá que tener retenido el dinero en ese depósito para conseguir su propósito? (0,25 puntos)
- (b) ¿Cuántos años debe depositar Aarón en el banco cualquier importe para que, con un interés compuesto del 2 %, se genere un interés que duplique a la cantidad aportada? (0,5 puntos)
- (c) En una famosa web de alquileres aparece la oferta de alquiler de un piso este primer trimestre del año. Que ha experimentado un aumento del 4 % en el precio sobre el precio a 31 de diciembre del año anterior; en el segundo trimestre del año, el precio se encarece un 5 %; en el tercer trimestre baja un 3 %; y en el cuarto trimestre baja de nuevo, un 6 %, siempre sobre los precios inmediatamente anteriores.
 - (i) Determina los índices de variación de cada trimestre y el índice de variación global de todo el año. ¿Qué aumento o descuento experimenta el precio final del piso a 31 de diciembre del año presente respecto del año pasado? (0,5 puntos)
 - (ii) Si el precio del alquiler a 31 de diciembre del año anterior era de 850 €, ¿Cuánto valdrá el alquiler a 31 de diciembre del presente año. (0,25 puntos)
 - (iii) Si el precio del alquiler a 31 de diciembre en el presente año será de 860 €, ¿Cuánto era el alquiler a 31 de diciembre del año anterior. (0,25 puntos)

LA WEB DEL PROFE DE MATES

2. En una progresión aritmética, el primer término es 60 y la diferencia común es $-2,5$.

(a) Sabiendo que el término k —ésimo de la progresión es cero, halle el valor de k . (0,5 puntos)

Sea S_k la suma de los k primeros términos de la progresión (k el del apartado anterior)

(b) Halle el valor de S_k (0,5 puntos)

LA WEB DEL
PROFEDEMATES

[Puntuación máxima: 1,75 puntos]

3. a) Se considera el sumatorio,

$$\sum_{k=3}^{18} (50 \cdot 2^{-k})$$

Calcula algebraicamente el valor correcto a que da lugar.

(0,75 puntos)

b) Ahora considere la siguiente suma

$$6,3 + 7,5 + 8,7 + \dots + 31,5 + 32,7 + 33,9$$

donde cada término se obtiene del anterior sumando cierta cantidad constante. Calcule dicha cantidad constante, el número de sumandos y el valor de la suma.

(0,25 + 0,5 + 0,25 puntos)

LA WEB DEL
PROFEDEMATES

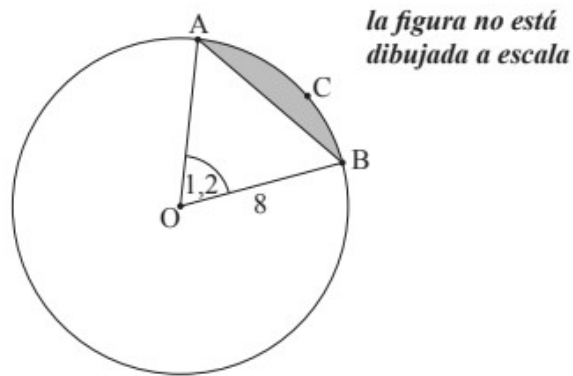
LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 1 punto]

4. En una llanura inmensa, a las doce de la mañana, Mario y Elena se encuentran separados por una distancia de 20 km . La aparición de un OVNI suspendido en el aire entre ambos los sorprende. Tratan de comunicarse por móvil y se dan la siguiente información: Mario observa el artefacto bajo un ángulo de 15° sobre la horizontal y Elena lo observa con un ángulo de 25° sobre la horizontal. Calcula algebraicamente a qué altura se encuentra suspendido el OVNI y cuál es la distancia sobre el terreno a la que están cada uno de la sombra del OVNI. (1 punto)

LA WEB DEL
PROFEDEMATES

5. La siguiente figura muestra un círculo de centro O y radio 8cm .



Los puntos A , B y C pertenecen a la circunferencia del círculo y $\widehat{AOB} = 1,2 \text{ rad}$.

- (a) Halle la longitud del arco ACB . (0,25 puntos)
- (b) Halle AB . (0,25 puntos)
- (c) A partir de lo anterior, halle el perímetro de la zona sombreada ABC . (0,25 puntos)

LA WEB DEL
PROFEDEMATES

[Puntuación máxima: 2,25 puntos]

6. Resuelve algebraicamente los siguientes límites, clasificando primeramente las indeterminaciones en caso de haberlas, (0,5 + 0,75 + 1 puntos)

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+1} + \sqrt{9n^2-1}} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+3n-1} - 2n) \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^3+3n} \right)^{n^2}$$

LA WEB DEL
PROFEDEMATES

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

7. Una máquina para triturar vehículos está rota y cada vez que se enciende su tiempo de funcionamiento es las dos terceras partes que la anterior vez que se puso en marcha. Si la cuarta vez que se puso en marcha tardó en dejar de funcionar 36 minutos.

- (a) Calcule el tiempo que tardó en pararse la primera vez que se puso en marcha. (0,25 puntos)
- (b) Estimamos que el tiempo que tardaremos en triturar todos los vehículos que tenemos es 6 horas. Con esta sola máquina defectuosa, demuestre matemáticamente que podremos hacer la tarea completa mediante operaciones matemáticas coherentes. (0,5 puntos)
- (c) Estime el número mínimo de veces que habrá que encender la máquina para acometer la tarea completa en 6 horas. (0,75 puntos)

LA WEB DEL
PROFEDEMATES

LA WEB DEL PROFE DE MATES

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL 5

ANÁLISIS Y ENFOQUES – MATEMÁTICAS I

[Puntuación máxima: 1,75 puntos]

1. Contesta a las siguientes cuestiones razonando y operando matemáticamente,

- (a) Helena va a abrir un depósito con un interés simple del 2 % de rentabilidad y quiere duplicar el dinero que inicialmente invierte. ¿Cuántos años tendrá que tener retenido el dinero en ese depósito para conseguir su propósito? (0,25 puntos)
- (b) ¿Cuántos años debe depositar Aarón en el banco cualquier importe para que, con un interés compuesto del 2 %, se genere un interés que duplique a la cantidad aportada? (0,5 puntos)
- (c) En una famosa web de alquileres aparece la oferta de alquiler de un piso este primer trimestre del año. Que ha experimentado un aumento del 4 % en el precio sobre el precio a 31 de diciembre del año anterior; en el segundo trimestre del año, el precio se encarece un 5 %; en el tercer trimestre baja un 3 %; y en el cuarto trimestre baja de nuevo, un 6 %, siempre sobre los precios inmediatamente anteriores.
 - (i) Determina los índices de variación de cada trimestre y el índice de variación global de todo el año. ¿Qué aumento o descuento experimenta el precio final del piso a 31 de diciembre del año presente respecto del año pasado? (0,5 puntos)
 - (ii) Si el precio del alquiler a 31 de diciembre del año anterior era de 850 €, ¿Cuánto valdrá el alquiler a 31 de diciembre del presente año. (0,25 puntos)
 - (iii) Si el precio del alquiler a 31 de diciembre en el presente año será de 860 €, ¿Cuánto era el alquiler a 31 de diciembre del año anterior. (0,25 puntos)

(a) Helena va a abrir un depósito con un interés simple del 2 % de rentabilidad y quiere duplicar el dinero que inicialmente invierte. ¿Cuántos años tendrá que tener retenido el dinero en ese depósito para conseguir su propósito?

Consideramos que el importe que invierte Helena es x €. En ese caso, lo que quiere conseguir son unos intereses iguales al capital invertido. Por tanto, $C = x = I$. En ese caso, mediante la fórmula del interés simple obtenemos que,

$$\begin{aligned} I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} &\Rightarrow x = \frac{x \cdot 2 \cdot t}{100} \Leftrightarrow 1 = \frac{2 \cdot t}{100} \Leftrightarrow 1 = \frac{2 \cdot t}{100} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{100}{2} = t \Leftrightarrow t = 50 \text{ años} \end{aligned}$$

Por tanto, tendrá que tener el dinero retenido 50 años.

(b) ¿Cuántos años debe depositar Aarón en el banco cualquier importe para que, con un interés compuesto del 2 %, se genere un interés que duplique a la cantidad aportada?

Consideramos que el importe que invierte Aarón es x €. En ese caso, lo que quiere conseguir son unos intereses que sean el doble que el capital invertido. Por tanto,

$$C = x \quad , \quad I = 2x$$

En ese caso, mediante la fórmula del interés compuesto obtenemos que,

$$C_{final} = C_{final} \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \Rightarrow 2x = x \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t \Leftrightarrow 2 = 1,02^t \Leftrightarrow$$

Tomando logaritmos,

$$\Leftrightarrow \ln(2) = \ln(1,02^t) \Leftrightarrow \ln(2) = t \cdot \ln(1,02) \Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\ln(1,02)} = t \Leftrightarrow t \approx 35 \text{ años}$$

Por tanto, tendrá que tener el dinero retenido 35 años.

- (c) En una famosa web de alquileres aparece la oferta de alquiler de un piso este primer trimestre del año. Que ha experimentado un aumento del 4 % en el precio sobre el precio a 31 de diciembre del año anterior; en el segundo trimestre del año, el precio se encarece un 5 %; en el tercer trimestre baja un 3 %; y en el cuarto trimestre baja de nuevo, un 6 %, siempre sobre los precios inmediatamente anteriores.

- (i) Determina los índices de variación de cada trimestre y el índice de variación global de todo el año en curso. ¿Qué aumento o descuento experimenta el precio final del psio a 31 de diciembre del año presente respecto del año pasado?

Primer trimestre	Segundo trimestre	Tercer trimestre	Cuarto trimestre
1,04	1,05	0,97	0,93

En ese caso, el índice de variación global del año en curso es

$$1,04 \cdot 1,05 \cdot 0,97 \cdot 0,93 = 0,9956856$$

Como,

$$1 - 0,9956856 = 0,0043144$$

El índice significa que hay un descuento en el precio del año pasado del 0,43144 %.

- (ii) Si el precio del alquiler a 31 de diciembre del año anterior era de 850 €, ¿Cuánto valdrá el alquiler a 31 de diciembre del presente año.

Multiplicamos el precio por el índice global obteniendo el precio a 31 de diciembre de este año,

$$850 \text{ €} \cdot 0,9956856 = 846,33 \text{ €}$$

- (iii) Si el precio del alquiler a 31 de diciembre en el presente año será de 860 €, ¿Cuánto era el alquiler a 31 de diciembre del año anterior.

Dividimos el precio por el índice global obteniendo el precio a 31 de diciembre del año pasado,

$$\frac{860 \text{ €}}{0,9956856} = 863,73 \text{ €}$$

2. En una progresión aritmética, el primer término es 60 y la diferencia común es $-2,5$.

(a) Sabiendo que el término k –ésimo de la progresión es cero, halle el valor de k . (0,5 puntos)

Sea S_k la suma de los k primeros términos de la progresión (k el del apartado anterior)

(b) Halle el valor de S_k (0,5 puntos)

(a) Sabiendo que el término k –ésimo de la progresión es cero, halle el valor de k .

Sea la progresión aritmética $\{a_n\}$ donde $a_1 = 60$ y la diferencia común es $d = -2,5$. El término general de dicha progresión vendrá dado por,

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo que,

$$a_n = 60 + (n - 1) \cdot (-2,5), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En tal caso, si $a_k = 0$ entonces,

$$a_k = 60 + (k - 1) \cdot (-2,5)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= 60 + (k - 1) \cdot (-2,5) \Leftrightarrow 0 = 60 - 2,5k + 2,5 \Leftrightarrow 2,5k = 62,5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = \frac{62,5}{2,5} \Leftrightarrow k = 25 \end{aligned}$$

(b) Halle el valor de S_k

$$S_k = \frac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2} = \frac{(60 + 0) \cdot 25}{2} = 750$$

[Puntuación máxima: 1,75 puntos]

3. a) Se considera el sumatorio,

$$\sum_{k=3}^{18} (50 \cdot 2^{-k})$$

Calcula algebraicamente el valor correcto a que da lugar.

(0,75 puntos)

b) Ahora considere la siguiente suma

$$6,3 + 7,5 + 8,7 + \dots + 31,5 + 32,7 + 33,9$$

donde cada término se obtiene del anterior sumando cierta cantidad constante. Calcule dicha cantidad constante, el número de sumandos y el valor de la suma.

(0,25 + 0,5 + 0,25 puntos)

a) Se considera el sumatorio,

$$\sum_{k=3}^{18} (50 \cdot 2^{-k})$$

calcule el valor correcto a que da lugar.

Como

$$\sum_{k=3}^{18} (50 \cdot 2^{-k}) = 50 \cdot \sum_{k=3}^{18} (2^{-k}) = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{2^{17}} + \frac{1}{2^{18}}$$

entonces se trata de una progresión geométrica de razón, primer término y último término,

$$r = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2^3}, \quad a_{18} = \frac{1}{2^{18}}$$

En tal caso, la suma vendrá dada por la fórmula,

$$\begin{aligned} 50 \cdot \sum_{k=3}^{18} (2^{-k}) &= 50 \cdot \frac{a_{18} \cdot r - a_3}{r - 1} = 50 \cdot \frac{\frac{1}{2^{18}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3}}{\frac{1}{2} - 1} = 50 \cdot \frac{\frac{1}{2^{18}} - \frac{1}{2^3}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{2}} = \\ &= 50 \cdot \frac{\frac{1}{2^{18}} - \frac{2^{15}}{2^{18}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{100 \cdot (2^{15} - 1)}{2^{18}} \approx 12,4996185 \end{aligned}$$

b) Ahora considere la siguiente suma

$$6,3 + 7,5 + 8,7 + \dots + 31,5 + 32,7 + 33,9$$

donde cada término se obtiene del anterior sumando cierta cantidad constante. Calcule dicha cantidad constante, el número de sumandos y el valor de la suma.

Se trata de una progresión aritmética. El valor constante que se suma es la diferencia y se puede calcular a partir de los dos primeros sumandos mediante, la resta de sus valores según,

$$d = 7,5 - 6,3 = 1,2$$

Al ser una progresión aritmética entonces, si a_n es el último término de la progresión entonces,

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Leftrightarrow 33,9 = 6,3 + (n - 1) \cdot 1,2$$

Y de ahí podemos calcular la posición del último término y, por lo tanto, el número de términos,

$$33,9 = 6,3 + (n - 1) \cdot 1,2 \Leftrightarrow 33,9 - 6,3 = (n - 1) \cdot 1,2 \Leftrightarrow 27,6 = (n - 1) \cdot 1,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{27,6}{1,2} = n - 1 \Leftrightarrow 23 = n - 1 \Leftrightarrow 23 + 1 = n \Leftrightarrow 24 = n$$

Por lo tanto, el valor de la suma vendrá dado mediante la fórmula,

$$S_{24} = \frac{(a_1 + a_{24}) \cdot 24}{2}$$

En la que sustituyendo,

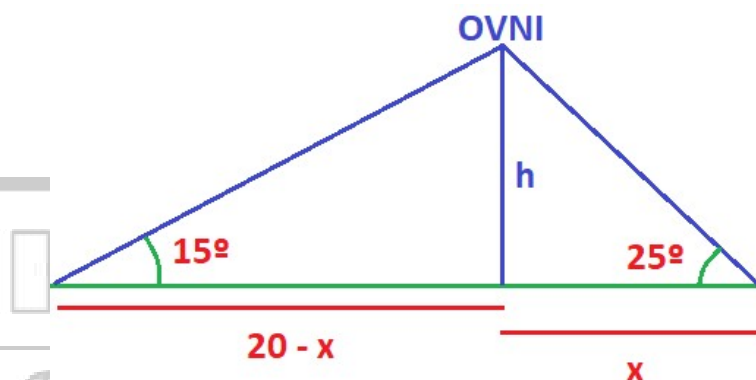
$$S_{24} = \frac{(a_1 + a_{24}) \cdot 24}{2} = \frac{(6,3 + 33,9) \cdot 24}{2} = \frac{40,2 \cdot 24}{2} = 482,4$$

LA WEB DEL
PROFEDEMATES

[Puntuación máxima: 1 punto]

4. En una llanura inmensa, a las doce de la mañana, Mario y Elena se encuentran separados por una distancia de 20 km. La aparición de un OVNI suspendido en el aire entre ambos los sorprende. Tratan de comunicarse por móvil y se dan la siguiente información: Mario observa el artefacto bajo un ángulo de 15° sobre la horizontal y Elena lo observa con un ángulo de 25° sobre la horizontal. Calcula algebraicamente a qué altura se encuentra suspendido el OVNI y cuál es la distancia sobre el terreno a la que están cada uno de la sombra del OVNI. (1 punto)

En una llanura inmensa, a las doce de la mañana, Mario y Elena se encuentran separados por una distancia de 20 km. La aparición de un OVNI suspendido en el aire entre ambos los sorprende. Tratan de comunicarse por móvil y se dan la siguiente información: Mario observa el artefacto bajo un ángulo de 15° sobre la horizontal y Elena lo observa con un ángulo de 25° sobre la horizontal. Calcula algebraicamente a qué altura se encuentra suspendido el OVNI y cuál es la distancia sobre el terreno a la que están cada uno de la sombra del OVNI.



Llamando x a la distancia entre Elena y la sombra del OVNI, y h a la altura a la que está suspendido el OVNI tendremos el sistema de ecuaciones siguiente,

$$\left. \begin{aligned} \tan 15 &= \frac{h}{20 - x} \\ \tan 25 &= \frac{h}{x} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} h &= (20 - x) \cdot \tan 15 \\ h &= x \cdot \tan 25 \end{aligned}$$

Resolvemos,

$$\left. \begin{aligned} \tan 15 &= \frac{h}{20 - x} \\ \tan 25 &= \frac{h}{x} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} h &= (20 - x) \cdot \tan 15 \\ h &= x \cdot \tan 25 \end{aligned} \Leftrightarrow (20 - x) \cdot \tan 15 = x \cdot \tan 25$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (20 - x) \cdot \tan 15 &= x \cdot \tan 25 \Leftrightarrow 20 \cdot \tan 15 - x \cdot \tan 15 = x \cdot \tan 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 20 \cdot \tan 15 &= x \cdot \tan 25 + x \cdot \tan 15 \Leftrightarrow x = \frac{20 \tan 15}{\tan 25 + \tan 15} \approx 7,29 \text{ km} \end{aligned}$$

Por lo tanto, Elena está a $7,29 \text{ km}$ de la sombra del OVNI y Mario,

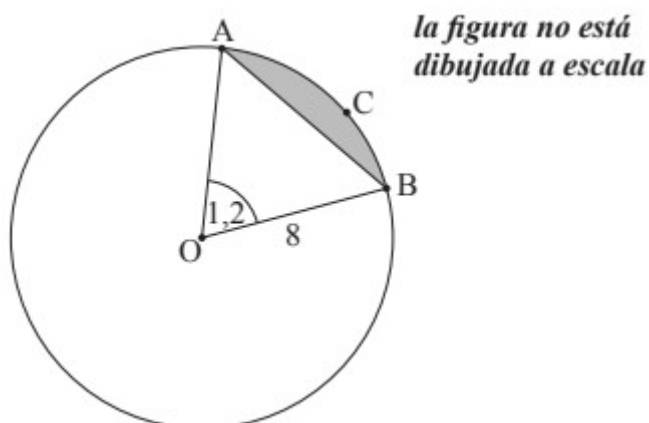
$$20 \text{ km} - 7,29 \text{ km} = 12,71 \text{ km}$$

La altura a la que está suspendido el OVNI es,

$$h = \frac{20 \tan 15^\circ \cdot \tan 25^\circ}{\tan 25^\circ + \tan 15^\circ} \approx 3,4 \text{ km}$$

LA WEB DEL
PROFEDEMATES

5. La siguiente figura muestra un círculo de centro O y radio 8 cm .



Los puntos A, B y C pertenecen a la circunferencia del círculo y $\widehat{AOB} = 1,2 \text{ rad}$.

(a) Halle la longitud del arco ACB . (0,25 puntos)

(b) Halle AB . (0,25 puntos)

(c) A partir de lo anterior, halle el perímetro de la zona sombreada ABC . (0,25 puntos)

(a) Halle la longitud del arco ACB .

Hacemos regla de tres para calcular la longitud de arco ACB

Rad		Longitud	
$2\pi \text{ rad}$	$\leftrightarrow$	$2 \cdot \pi \cdot 8$	
$1,2 \text{ rad}$	$\leftrightarrow$	x	

$$x = \frac{1,2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 8}{2\pi} = 9,6 \text{ cm}$$

(b) Halle AB .

Por el teorema del coseno,

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}$$

Entonces,

$$AB^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos(1,2) = 128 + 128 \cdot 0,362 \approx 81,618$$

Por lo tanto,

$$AB = \sqrt{81,618} = 9,03 \text{ cm}$$

(c) A partir de lo anterior, halle el perímetro del segmento circular sombreado ABC .

El perímetro de la zona sombreada es,

$$\text{Perímetro} = AB + ABC = \sqrt{81,618} \text{ cm} + 9,6 \text{ cm} \approx 18,63 \text{ cm}$$

[Puntuación máxima: 2,25 puntos]

6. Resuelve algebraicamente los siguientes límites, clasificando primeramente las indeterminaciones en caso de haberlas, (0,5 + 0,75 + 1 puntos)

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+1} + \sqrt{9n^2-1}} \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+3n-1} - 2n) \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^3+3n} \right)^{n^2}$$

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+1} + \sqrt{9n^2-1}} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+1} + \sqrt{9n^2-1}} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+3n-1} - 2n)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+3n-1} - 2n) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2+3n-1} - 2n) \cdot (\sqrt{4n^2+3n-1} + 2n)}{(\sqrt{4n^2+3n-1} + 2n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2+3n-1})^2 - (2n)^2}{(\sqrt{4n^2+3n-1} + 2n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+3n-1-4n^2}{(\sqrt{4n^2+3n-1} + 2n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{(\sqrt{4n^2+n+1} + 2n)} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{(2n+2n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^3+3n} \right)^{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{n^3+3n} \right)^{n^2} \stackrel{1^\infty}{=} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(\frac{n^3}{n^3+3n} - 1 \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(\frac{n^3-n^3-3n}{n^3+3n} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(\frac{-3n}{n^3+3n} \right)} =$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-3n^3}{n^3+3n} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-3n^3}{n^3} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-3}{1} \right)} = e^{-3}$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

7. Una máquina para triturar vehículos está rota y cada vez que se enciende su tiempo de funcionamiento es las dos terceras partes que la anterior vez que se puso en marcha. Si la cuarta vez que se puso en marcha tardó en dejar de funcionar 36 minutos.

- (a) Calcule el tiempo que tardó en pararse la primera vez que se puso en marcha. (0,25 puntos)
- (b) Estimamos que el tiempo que tardaremos en triturar todos los vehículos que tenemos es 6 horas. Con esta sola máquina defectuosa, demuestre matemáticamente que podremos hacer la tarea completa mediante operaciones matemáticas coherentes. (0,5 puntos)
- (c) Estime el número mínimo de veces que habrá que encender la máquina para acometer la tarea completa en 6 horas. (0,75 puntos)

(a) Calcule el tiempo que tardó en pararse la primera vez que se puso en marcha.

$$a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \Leftrightarrow 36 = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{36}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = a_1 \Leftrightarrow \frac{36 \cdot 3^3}{2^3} = a_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_1 = 121,5 \text{ minutos}$$

(b) Estimamos que el tiempo que tardaremos en triturar todos los vehículos que tenemos es 6 horas. Con esta sola máquina defectuosa demuestre, mediante operaciones matemáticas coherentes, que podremos hacer la tarea completa.

Al tratarse de una progresión geométrica de razón menor que 1, calculamos la suma de los infinitos términos,

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{121,5}{1-\frac{2}{3}} = \frac{121,5}{\frac{1}{3}} = 121,5 \cdot 3 = 364,5 \text{ minutos} = 6 \text{ horas } 4 \text{ min } 30 \text{ seg}$$

Por lo tanto, si podrá terminar la tarea.

(c) Estime el mínimo número de veces que habrá que encender la máquina para acometer la tarea completa en 6 horas.

Como

$$S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r - 1}$$

y $S_n = 360$ entonces,

$$360 = \frac{\frac{243}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{243}{2}}{\frac{2}{3} - 1} \Leftrightarrow 360 = \frac{\frac{243}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{243}{2}}{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -360 \cdot \frac{1}{3} = \frac{243}{2} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) \Leftrightarrow -\frac{120}{\frac{243}{2}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) \Leftrightarrow 1 - \frac{240}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow \frac{1}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Tomando logaritmos neperianos en ambos lados,

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{81}\right) = \ln\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{81}\right) = n \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{1}{81}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 10,84$$

Por lo tanto, la undécima vez que la encienda, habrá terminado la tarea.

LA WEB DEL
PROFE DE MATE