CUADERNILLO 3

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Entrega límite **JUEVES, 8 de ENERO de 2025 (hora de inicio de clase)**

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **<u>TODOS los ejercicios y problemas</u>** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10puntos.
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$Nota\ def. = \ Notal\ total/(Días\ de\ retraso + 1)$$

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

1. En una progresión aritmética, la suma de los términos $3°$ y $8°$ es igual a 1. Sabiendo que la suma de los siete primeros términos es 35, determine el primer término y la diferencia común.

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

2.Dada la sucesión de término general $a_n = \frac{n+a}{bn+2}$, desarrolle los cálculos adecuados y calcule a y b si $a_{11} = -\frac{1}{7}$ y $a_{20} = -\frac{5}{26}$.

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

3. Dadas dos sucesiones por sus términos generales

$$a_n = \frac{-10n + an^2}{bn^2 - 21} \quad , \quad b_n = \frac{4n^3}{an^3 + b}$$

calcule a y b si $\lim\ a_n = \lim\ b_n$ y $a_2 = b_1$.

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Matemáticas NS Ej.4 Mayo 2018)**

4. Una progresión geométrica $u_1, u_2, u_3, \ldots$ tiene razón común r. Considere la progresión $A = \{a_n = log_2|u_n| : \ n \in \mathbb{Z}^+\}$.

(a) Demuestra que A es una progresión aritmética, e indique cuál es la diferencia común d en función de r. (0,75 puntos)

(b) En una progresión geométrica en particular $u_1 = 3$ y la suma de los infinitos términos es igual a 4. Halle el valor de d. (0,75 puntos)

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

5. Supongamos que un canguro da saltos consecutivamente de manera infinita. Según va acumulando saltos se va cansando. Supongamos que cada salto es, en longitud, la mitad que el anterior.

(a) Si el primer salto que da 2,4 metros. Cuánto habrá recorrido tras siete saltos.

(0,5 puntos)

(b) ¿En qué salto ha recorrido 0,00234375 metros? De unos cálculos correctos que le permiten afirmar su resultado. (0,5 puntos)

(c) ¿Puede llegar a recorrer el canguro 5 metros saltando de manera consecutiva? Razone numéricamente la respuesta. (0,5 puntos)

[Puntuación máxima: 1,25 puntos] **(Matemáticas NS P1 - Ej.1 Mayo 2023)**

6. El n-ésimo término de una progresión aritmética viene dado por $u_n = 15 - 3n$.

(a) Indique el valor del primer término u_1 y la diferencia común. (0,25 puntos)

(b) Sabiendo que el n-ésimo término de la progresión es -33, halle el valor de n. (0,5 puntos)

(c) Calcule algebraicamente (0,5 puntos)

$$\sum_{n=12}^{46} u_n$$

[Puntuación máxima: 1,25 puntos]

7. Calcular algebraicamente el siguiente límite

$$L = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \ln\left(\frac{n^2 - 5n + 3}{n^2 + 3n - 5}\right)\right)^{2n-5}$$

Observación: 1) Toma logaritmos ya que el límite del logaritmo es el logaritmo del límite.

2) $\lim_{n \to \infty} f(n)^{g(n)} \overset{1^{\infty}}{=} e^{\lim_{n \to \infty} g(n)\cdot(f(n)-1)}$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CUADERNILLO 3

ANALISIS Y ENFOQUES – MATEMÁTICAS I

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

1. En una progresión aritmética, la suma de los términos 3° y 8° es igual a 1. Sabiendo que la suma de los siete primeros términos es 35, determine el primer término y la diferencia común.

Sea la sucesión a_n que cumple con las características descritas, es decir,

$$a_3 + a_8 = 1$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 35$$

Como,

$$S_7 = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} = 35$$

Entonces,

$$(a_1 + a_7) \cdot 7 = 2 \cdot 35 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 + a_7 = 10$$

Ahora bien, como

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Entonces,

$$a_3 = a_1 + (3-1) \cdot d = a_1 + 2d$$

$$a_7 = a_1 + (7-1) \cdot d = a_1 + 6d$$

$$a_8 = a_1 + (8-1) \cdot d = a_1 + 7d$$

Y en ese caso tendremos que, por una parte,

$$a_3 + a_8 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 + 2d + a_1 + 7d = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a_1 + 9d = 1$$

Y por la otra,

$$a_1 + a_7 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 + a_1 + 6d = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 2a_1 + 6d = 10$$

Con lo que, podemos formar el sistema,

$$\left.\begin{array}{r} 2a_1 + 9d = 1 \\ 2a_1 + 6d = 10 \end{array}\right\}$$

Aplicando el método de reducción y restando ambas ecuaciones obtenemos d,

$$-\begin{array}{r} 2a_1 + 9d = 1 \\ 2a_1 + 6d = 10 \end{array}\Bigg\}$$

$$3d = -9 \quad \Leftrightarrow \quad d = -\frac{9}{3} = -3$$

En tal caso, como,

$$2a_1 + 6d = 10 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 + 3d = 5 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 5 - 3d$$

Sustituyendo $d = -3$ tendremos que,

$$a_1 = 5 - 3 \cdot (-3) = 5 + 9 = 14$$

Concluimos que $a_1 = 14$ y $d = -3$.

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

2. Dada la sucesión de término general $a_n = \frac{n+a}{bn+2}$, desarrolle los cálculos adecuados y calcule a y b si $a_{11} = -\frac{1}{7}$ y $a_{20} = -\frac{5}{26}$.

Puesto que $a_{11} = -\frac{1}{7}$ entonces,

$$\frac{11+a}{11b+2} = -\frac{1}{7} \quad \Leftrightarrow \quad 7 \cdot (11+a) = -(11b+2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 77 + 7a = -11b - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 7a + 11b = -79$$

Puesto que $a_{20} = -\frac{5}{26}$ entonces,

$$\frac{20+a}{20b+2} = -\frac{5}{26} \quad \Leftrightarrow \quad 26 \cdot (20+a) = -5 \cdot (20b+2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 520 + 26a = -100b - 10 \quad \Leftrightarrow \quad 26a + 100b = -530$$

A partir de las dos expresiones, formamos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 7a + 11b = -79 \\ 26a + 100b = -530 \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos por sustitución,

$$\left.\begin{array}{r} 7a + 11b = -79 \\ 26a + 100b = -530 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} a = \dfrac{-79-11b}{7} \\ 26a + 100b = -530 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 26 \cdot \left(\frac{-79-11b}{7}\right) + 100b = -530 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2054-286b}{7} + \frac{700b}{7} = \frac{-3710}{7} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -2054 - 286b + 700b = -3710 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 414b = -3710 + 2054 \quad \Leftrightarrow \quad 414b = -1656 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad b = -\frac{1656}{414} \quad \Leftrightarrow \quad b = -4$$

En ese caso,

$$a = \frac{-79-11b}{7} = \frac{-79-11\cdot(-4)}{7} = \frac{-79+44}{7} = -\frac{35}{7} = -5$$

En conclusión, $a = -5, b = -4$ y $a_n = \frac{n-5}{-4n+2}$.

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

3. Dadas dos sucesiones por sus términos generales

$$a_n = \frac{-10n + an^2}{bn^2 - 21} \quad , \quad b_n = \frac{4n^3}{an^3 + b}$$

calcule a y b si $\lim\ a_n = \lim\ b_n$ y $a_2 = b_1$.

Como $\lim\ a_n = \lim\ b_n$ y

$$\lim a_n = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim b_n = \frac{4}{a}$$

Entonces,

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{a} \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 4b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{4} = b$$

Como $a_2 = b_1$ y

$$a_2 = \frac{-10 \cdot 2 + a \cdot 2^2}{b \cdot 2^2 - 21} = \frac{-20 + 4a}{4b - 21}$$

$$b_1 = \frac{4 \cdot 1^3}{a \cdot 1^3 + b} = \frac{4}{a + b}$$

Entonces,

$$\frac{-20 + 4a}{4b - 21} = \frac{4}{a + b}$$

Sustituyendo el despeje de b de la primera igualdad en la segunda obtenemos,

$$\frac{-20 + 4a}{4 \cdot \left(\frac{a^2}{4}\right) - 21} = \frac{4}{a + \frac{a^2}{4}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-20 + 4a}{a^2 - 21} = \frac{16}{4a + a^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-5 + a}{a^2 - 21} = \frac{4}{4a + a^2} \quad \Leftrightarrow \quad (-5 + a) \cdot (4a + a^2) = 4 \cdot (a^2 - 21) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -20a - 5a^2 + 4a^2 + a^3 = 4a^2 - 84 \quad \Leftrightarrow a^3 - 5a^2 - 20a + 84 = 0$$

Aplicando el *método de Ruffini*,

	$+1$	-5	-20	$+84$
$+6$		$+6$	$+6$	-84
	$+1$	$+1$	-14	0

Si seguimos resolviendo la ecuación resultante de igualar a cero el cociente,

$$a^2 + a - 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$$

Por lo tanto,

- Si $a = 6$ entonces

$$b = \frac{6^2}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

- Si $a = \frac{-1+\sqrt{57}}{2} \approx 3{,}27$ entonces

$$b = \frac{\left(\frac{-1+\sqrt{57}}{2}\right)^2}{4} = \frac{1 + 57 - 2\sqrt{57}}{16} = \frac{58 - 2\sqrt{57}}{16} = \frac{29 - \sqrt{57}}{8} \approx 2{,}68$$

- Si $a = \frac{-1-\sqrt{57}}{2} \approx -4{,}27$ entonces

$$b = \frac{\left(\frac{-1-\sqrt{57}}{2}\right)^2}{4} = \frac{1 + 57 + 2\sqrt{57}}{16} = \frac{58 + 2\sqrt{57}}{16} = \frac{29 + \sqrt{57}}{8} \approx 4{,}57$$

En conclusión,

- $a = 6 \; y \; b = 9$
- $a = \frac{-1+\sqrt{57}}{2} \; y \; b = \frac{29 \quad \sqrt{57}}{8}$
- $a = \frac{-1-\sqrt{57}}{2} \; y \; b = \frac{29-\sqrt{57}}{8}$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Matemáticas NS Ej.4 Mayo 2018)**

4. Una progresión geométrica $u_1, u_2, u_3, \ldots$ tiene razón común r. Considere la progresión $A = \{a_n = log_2|u_n| : \ n \in \mathbb{Z}^+\}$.

(a) Demuestra que A es una progresión aritmética, e indique cuál es la diferencia común d en función de r. (0,75 puntos)

(b) En una progresión geométrica en particular $u_1 = 3$ y la suma de los infinitos términos es igual a 4. Halle el valor de d. (0,75 puntos)

(a) Demuestra que A es una progresión aritmética, e indique cuál es la diferencia común d en función de r.

Veamos que dos términos cualesquiera consecutivos se diferencian en un valor común,

$$a_{n+1} - a_n = log_2|u_{n+1}| - log_2|u_n| = log_2\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

Como $\{u_n\}$ es una progresión geométrica,

$$u_{n+1} = u_n \cdot r$$

Y por lo tanto,

$$a_{n+1} - a_n = log_2\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = log_2\left(\frac{u_n \cdot r}{u_n}\right) = log_2 r$$

Siendo $log_2 r = d$ un valor constante entre dos términos cualesquiera de la sucesión A. Por lo tanto, A es progresión geométrica y su diferencia es $d = log_2 r$

(b) En una progresión geométrica en particular $u_1 = 3$ y la suma de los infinitos términos es igual a 4. Halle el valor de d.

Como la suma de los infinitos términos de la sucesión e 4 y el primer término es 3 entonces,

$$S_\infty = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_1}{1-r} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{1-r} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 4 \cdot (1-r)$$

Y podemos obtener el valor de r según,

$$3 = 4 \cdot (1-r) \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 4 - 4r \quad \Leftrightarrow \quad 4r = 4 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{4}$$

Visto el resultado del anterior apartado, el valor de d es,

$$d = log_2\left(\frac{1}{4}\right) = log_2(2^{-2}) = -2 \cdot log_2 2 = -2 \cdot 1 = -2$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

5. Supongamos que un canguro da saltos consecutivamente de manera infinita. Según va acumulando saltos se va cansando. Supongamos que cada salto es, en longitud, la mitad que el anterior.

(a) Si el primer salto que da 2,4 metros. Cuánto habrá recorrido tras siete saltos.(0,5)

(b) ¿En qué salto ha recorrido 0,00234375 metros? De unos cálculos correctos que le permiten afirmar su resultado. (0,5 puntos)

(c) ¿Puede llegar a recorrer el canguro 5 metros saltando de manera consecutiva? Razone numéricamente la respuesta. (0,5 puntos)

(a) Si el primer salto que da 2,4 metros. Cuánto habrá recorrido tras siete saltos.

Consideramos la sucesión $\{a_n\}$ que indica en cada término la longitud del salto $n-ésimo$. En tal caso, $a_1 = 2{,}4$ y $r = 1/2$.

En ese caso, en el séptimo salto recorrerá,

$$a_7 = a_1 \cdot r^6 = 2{,}4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 0{,}0375\, m$$

La suma de los siete primeros saltos vendrá dada por,

$$S_7 = \frac{a_7 \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{0{,}0375 \cdot \frac{1}{2} - 2{,}4}{\frac{1}{2} - 1} = 4{,}7635\, m$$

(b) ¿En qué salto ha recorrido 0,00234375 metros? De unos cálculos correctos que le permiten afirmar su resultado.

Si llamamos n al salto en el que recorre 0,00234375 metros entonces,

$$a_n = 0{,}00234375 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 \cdot r^{n-1} = 0{,}00234375 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2{,}4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0{,}00234375 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{0{,}00234375}{2{,}4}$$

Tomando logaritmos,

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \log\left(\frac{0{,}00234375}{2{,}4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)\cdot \log(2^{-1}) = \log\left(\frac{0{,}00234375}{2{,}4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad n - 1 = \frac{\log\left(\frac{0{,}00234375}{2{,}4}\right)}{\log(2^{-1})} \quad \Leftrightarrow \quad n = 1 + \frac{\log\left(\frac{0{,}00234375}{2{,}4}\right)}{\log(2^{-1})} = 1 + 10 = 11$$

Por lo tanto, el salto en el que realizó esa longitud es el undécimo.

(c) ¿Puede llegar a recorrer el canguro 5 metros saltando de manera consecutiva?

La suma de todas las longitudes que recorrería si no parase vendrá dada por,

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2{,}4}{1-\frac{1}{2}} = 4{,}8\ m$$

Por lo tanto, el canguro nunca llegará a recorrer 5 metros ya que, suponiendo que no parara jamás, no llegaría a 4,8 m, que es menos de 5 metros.

[Puntuación máxima: 1,25 puntos] **(Matemáticas NS P1 - Ej.1 Mayo 2023)**

6.El n-ésimo término de una progresión aritmética viene dado por $u_n = 15 - 3n$.

(a) Indique el valor del primer término u_1 y la diferencia común.(0,25 puntos)

(b) Sabiendo que el n-ésimo término de la progresión es -33, halle el valor de n.(0,5 puntos)

(c) Calcule algebraicamente (0,5 puntos)

$$\sum_{n=12}^{46} u_n$$

(a) Indique el valor del primer término u_1 y la diferencia común.

$$u_1 = 15 - 3 \cdot 1 = 15 - 3 = 12$$

$$d = -3$$

(b) Sabiendo que el n-ésimo término de la progresión es -33, halle el valor de n.

Aplicando la fórmula del término general,

$$u_n = -33 \quad \Leftrightarrow \quad 15 - 3n = -33 \quad \Leftrightarrow \quad 15 + 33 = 3n \quad \Leftrightarrow \quad 48 = 3n \quad \Leftrightarrow \quad 16 = n$$

(c) Calcule algebraicamente

$$\sum_{n=12}^{46} \boldsymbol{u_n}$$

Al tratarse de una progresión aritmética,

$$\sum_{n=12}^{46} u_n = \frac{(u_{12} + u_{46}) \cdot (46 - 12 + 1)}{2}$$

Calculamos los términos u_{12} y u_{46},

$$u_{12} = 15 - 3 \cdot 12 = 15 - 36 = -21$$

$$u_{46} = 15 - 3 \cdot 46 = 15 - 138 = -123$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=12}^{46} u_n = \frac{(u_{12} + u_{46}) \cdot (46 - 12 + 1)}{2} = \frac{(-21 - 123) \cdot 35}{2} = -2520$$

[Puntuación máxima: 1,25 puntos]

7.Calcular algebraicamente el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\ln\left(\frac{n^2-5n+3}{n^2+3n-5}\right)\right)^{2n-5}$$

Observación: El límite del logaritmo es el logaritmo del límite.

Solución. Primero observamos que se trata de una indeterminación 1^{∞} ya que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\ln\left(\frac{n^2-5n+3}{n^2+3n-5}\right)\right)^{2n-5} = (1+0)^{\infty} = 1^{\infty}$$

Por tanto, resolvemos del siguiente modo:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\ln\left(\frac{n^2-5n+3}{n^2+3n-5}\right)\right)^{2n-5} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(2n-5)\cdot\ln\left(\frac{n^2-5n+3}{n^2+3n-5}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n^2-5n+3}{n^2+3n-5}\right)^{(2n-5)}} =$$

Procedemos a calcular el límite del exponente:

$$= e^{\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+3}{n^2+3n-5}\right)^{(2n-5)}\right)} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+3}{n^2+3n-5}\right)^{(2n-5)}\right)$$

Calculamos el límite de dentro del logaritmo:

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-5n+3}{n^2+3n-5}\right)^{(2n-5)}\right) = e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty}(2n-5)\cdot\left(\frac{n^2-5n+3}{n^2+3n-5}-1\right)\right)} =$$

$$= e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty}(2n-5)\cdot\left(\frac{n^2-5n+3-n^2-3n+5}{n^2+3n-5}\right)\right)} = e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty}(2n-5)\cdot\left(\frac{-8n+8}{n^2+3n-5}\right)\right)} = e^{-16}$$

Luego el límite pedido será:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\ln\left(\frac{n^2-5n+3}{n^2+3n-5}\right)\right)^{2n-5} = e^{-16}$$