

ANÁLISIS Y ENFOQUES

MATEMÁTICAS I Y II

Viernes, 5 de DICIEMBRE de 2025

1 hora

NOMBRE: _____

APELLIDOS: _____

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Escriba siempre con bolígrafo negro o azul. En caso de tachar, no se tendrá en cuenta lo tachado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 11 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.
- Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

(Ej.7 Matemáticas NS P1, Mayo 2019)

1. Resuelva el sistema de ecuaciones,

$$\log_2 6x = 1 + 2 \log_2 y$$

$$1 + \log_6 x = \log_6(15y - 25)$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

2. Resolver el siguiente sistema exponencial determinando todas sus soluciones,

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -42 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 3^{y-1} = 4 \end{cases}$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

3. Utilice la inducción matemática para probar que

$$\sum_{r=1}^n \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATE

[Puntuación máxima: 1,25 puntos]

[Matemáticas NS, Mayo 2017 P1, Ej.3]

4. Considere el polinomio $q(x) = 3x^3 + (k - 5)x^2 + kx + 8$

- (a) Sabiendo que $(x - 4)$ es uno de los factores de $q(x)$, halle el valor de k . (0,5 puntos)
- (b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo factorice $q(x)$ como producto de factores lineales. (0,75 puntos)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

5. Resuelva los siguientes apartados correctamente,

(1 + 1 punto)

- (a) En el desarrollo de $\left(\frac{x}{a} + \frac{a^2}{x}\right)^6$, donde $a \in \mathbb{R}$, el término constante es igual a 1280. Calcule a .
- (b) Uno de los términos del desarrollo de $(2x + p)^6$ es $60x^4$. Halle todos los posibles valores de p .

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATE

[Puntuación máxima: 1,25 puntos]

6. Resuelva algebraicamente de modo correcto,

$$\frac{3 - x^2}{x^2 - 9} \leq 1$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

7. (a) La función f viene dada por $f(x) = kx^2 - 2kx + (k^2 - 2)$ donde $k \in \mathbb{R}$. Halle el conjunto de valores de k para los que $f(x) = 0$ no presenta soluciones reales. (1 punto)
- (b) Ocho corredores participan en una carrera donde no puede haber empates. Andrea y Jack son dos de los ocho participantes en esta carrera. Halle el número total de maneras posibles en las que pueden llegar a meta estos ocho corredores, sabiendo que Jack llega:
- (i) Justo una posición después de Andrea. (0,5 puntos)
- (ii) En cualquier posición después de Andrea. (1 punto)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATE

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE LA PRUEBA ESCRITA

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

(Ej.7 Matemáticas NS P1, Mayo 2019)

1. Resuelva el sistema de ecuaciones,

(1,5 puntos)

$$\log_2 6x = 1 + 2 \log_2 y$$

$$1 + \log_6 x = \log_6(15y - 25)$$

En cada una de las ecuaciones, eliminaremos los logaritmos utilizando las propiedades de los mismos.

- **Primera ecuación.**

$$\log_2 6x = 1 + 2 \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 6x = 1 + \log_2 y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 6x - \log_2 y^2 = 1 \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{6x}{y^2} \right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x}{y^2} = 2^1 \Leftrightarrow 6x = 2y^2$$

- **Segunda ecuación.**

$$1 + \log_6 x = \log_6(15y - 25) \Leftrightarrow 1 = \log_6(15y - 25) - \log_6 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \log_6 \left(\frac{15y - 25}{x} \right) \Leftrightarrow 6^1 = \frac{15y - 25}{x} \Leftrightarrow 6x = 15y - 25$$

Por lo tanto, tenemos que resolver el sistema,

$$\left. \begin{array}{l} 6x = 2y^2 \\ 6x = 15y - 25 \end{array} \right\}$$

Igualando las dos expresiones a partir del término $6x$ tendremos que hay que resolver,

$$\left. \begin{array}{l} 6x = 2y^2 \\ 6x = 15y - 25 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 2y^2 = 15y - 25 \Leftrightarrow 2y^2 - 15y + 25 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado en y ,

$$\begin{aligned} 2y^2 - 15y + 25 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{+15 \pm \sqrt{(+15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 25}}{2 \cdot 2} = \\ &= \frac{+15 \pm \sqrt{225 - 200}}{4} = \frac{+15 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{+15 \pm 5}{4} = \begin{cases} y_1 = \frac{+15 + 5}{4} = \frac{20}{4} = 5 \\ y_2 = \frac{+15 - 5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Para cada valor de y calculamos su correspondiente valor de x . Como,

$$6x = 15y - 25 \Leftrightarrow x = \frac{15y - 25}{6}$$

Entonces,

- Si $y_1 = 5$ entonces

$$x_1 = \frac{15 \cdot 5 - 25}{6} = \frac{75 - 25}{6} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}$$

- Si $y_2 = \frac{5}{2}$ entonces

$$x_2 = \frac{15 \cdot \frac{5}{2} - 25}{6} = \frac{\frac{75}{2} - 25}{6} = \frac{\frac{75}{2} - \frac{50}{2}}{6} = \frac{\frac{25}{2}}{6} = \frac{25}{12}$$

Por lo tanto, las candidatas a soluciones son

$$x_1 = \frac{25}{3} \quad y_1 = 5 \quad ; \quad x_2 = \frac{25}{12} \quad y_2 = \frac{5}{2}$$

Como los valores de x y de y son positivos, $\log_2 6x$, $\log_2 x$ y $\log_6 y$ existen. Vemos que existe $\log_6(15y - 25)$ para los dos valores de y (debe dar positivo $(15y - 25)$).

- Si $y_1 = 5$ entonces

$$15y_1 - 25 = 15 \cdot 5 - 25 = 75 - 25 = 50 > 0$$

- Si $y_2 = \frac{5}{2}$ entonces

$$15y_2 - 25 = 15 \cdot \frac{5}{2} - 25 = \frac{75}{2} - 25 = \frac{75}{2} - \frac{50}{2} = \frac{25}{2} > 0$$

Por lo tanto, valen las soluciones.

Las soluciones son entonces dos,

$$x_1 = \frac{25}{3} \quad y_1 = 5 \quad ; \quad x_2 = \frac{25}{12} \quad y_2 = \frac{5}{2}$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

2. Resolver el siguiente sistema exponencial determinando todas sus soluciones,

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -42 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 3^{y-1} = 4 \end{cases}$$

Realizamos los siguientes cambios de variable,

$$w = 2^x, \quad z = 3^y$$

Entonces,

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -42 \\ 5 \cdot 2^{x+1} - 4 \cdot 3^{y-1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -42 \\ 5 \cdot 2^x \cdot 2 - 4 \cdot \frac{3^y}{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3w - 2z = -42 \\ 10w - \frac{4z}{3} = 4 \end{cases}$$

Resolvemos por reducción

$$\begin{array}{rcl} & \xrightarrow{\cdot 10} & \\ & \xrightarrow{\cdot (-3)} & \\ \hline & \begin{cases} 30w - 20z = -420 \\ -30w + 4z = -12 \end{cases} & \\ \hline & -16z = -432 & \Leftrightarrow z = 27 \end{array}$$

Deshaciendo el cambio de variable $z = 3^y$ tendremos que,

$$z = 27 \Leftrightarrow 3^y = 27 \Leftrightarrow 3^y = 3^3 \Leftrightarrow y = 3$$

Resolviendo ahora la primera ecuación del sistema a partir del valor de z tendremos que,

$$\begin{aligned} 3w - 2z = -42 &\Rightarrow 3w - 2 \cdot 27 = -42 \Leftrightarrow 3w = -42 + 54 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3w = 12 \Leftrightarrow w = 4 \end{aligned}$$

Deshaciendo el cambio de variable $w = 2^x$ tendremos que,

$$\Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$$

Por lo tanto, la solución es,

$$x = 2, y = 3$$

3. Utilice la inducción matemática para probar que $\sum_{r=1}^n \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ Para todo número entero $n \geq 1$.

Probamos el caso $n = 1$

$$\begin{aligned} i \sum_{r=1}^1 \frac{r}{(r+1)!} &= 1 - \frac{1}{(1+1)!} ? \Leftrightarrow i \frac{1}{(1+1)!} = 1 - \frac{1}{(1+1)!} ? \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow i \frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{2!} ? \end{aligned}$$

Esto es cierto porque,

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2!}$$

Suponemos cierto el caso $n = k$, es decir,

$$\sum_{r=1}^k \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

y probamos el caso $n = k + 1$, es decir,

$$i \sum_{r=1}^{k+1} \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1+1)!} ? \Leftrightarrow i \sum_{r=1}^{k+1} \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!} ?$$

Como,

$$\sum_{r=1}^{k+1} \frac{r}{(r+1)!} = \sum_{r=1}^k \frac{r}{(r+1)!} + \frac{k+1}{((k+1)+1)!} = \sum_{r=1}^k \frac{r}{(r+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!}$$

Aplicando el caso $n = k$ tendremos que,

$$\sum_{r=1}^{k+1} \frac{r}{(r+1)!} = \sum_{r=1}^k \frac{r}{(r+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!}$$

Operamos,

$$\sum_{r=1}^{k+1} \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{(k+2)}{(k+2) \cdot (k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} =$$

$$= 1 - \frac{k+2}{(k+2)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = 1 + \frac{-k-2+k+1}{(k+2)!} = 1 - \frac{1}{(k+2)!}$$

Por lo tanto, la hipótesis inductiva queda confirmada y se puede asegurar que,

$$\sum_{r=1}^n \frac{r}{(r+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

4. Considere el polinomio $q(x) = 3x^3 + (k - 5)x^2 + kx + 8$

- (a) Sabiendo que $(x - 4)$ es uno de los factores de $q(x)$, halle el valor de k . (0,5 puntos)
- (b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo factorice $q(x)$ como producto de factores lineales. (0,75 puntos)

(a) Sabiendo que $(x - 4)$ es uno de los factores de $q(x)$, halle el valor de k .

Si $(x - 4)$ es factor de $q(x)$ entonces $x = 4$ es raíz de $q(x)$. Por lo tanto,

$$q(4) = 0$$

En esos caso,

$$\begin{aligned} q(4) = 0 &\Leftrightarrow 3 \cdot 4^3 + (k - 5) \cdot 4^2 + k \cdot 4 + 8 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 192 + (k - 5) \cdot 16 + 4k + 8 = 0 \Leftrightarrow 200 + 16k - 80 + 4k = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 120 + 20k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{120}{20} = -6 \end{aligned}$$

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo factorice $q(x)$ como producto de factores lineales sin usar la calculadora.

Aplicamos el método de Ruffini, para $x = 4$ ya que sabemos que es una raíz,

$$\begin{array}{r|rrrr} & +3 & -11 & -6 & +8 \\ +4 & & +12 & +4 & -8 \\ \hline & +3 & +1 & -2 & 0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación $3x^2 + x - 2 = 0$ mediante la fórmula general de la ecuación polinómica de segundo grado,

$$\begin{aligned} 3x^2 + x - 2 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6} = \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{-1 - 5}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el polinomio $q(x)$ se escribe como producto de factores lineales según,

$$q(x) = 3 \cdot (x - 4) \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot (x + 1)$$

5. Resuelva los siguientes apartados correctamente,

(1 + 1 punto)

(a) En el desarrollo de $\left(\frac{x}{a} + \frac{a^2}{x}\right)^6$, donde $a \in \mathbb{R}$, el término constante es igual a 1280. Calcule a .

(b) Uno de los términos del desarrollo de $(2x + p)^6$ es $60x^4$. Halle todos los posibles valores de p .

(a) En el desarrollo de $\left(\frac{x}{a} + \frac{a^2}{x}\right)^6$, donde $a \in \mathbb{R}$, el término constante es igual a 1280. Calcule a .

Aplicando la fórmula del binomio,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{a} + \frac{a^2}{x}\right)^6 &= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{6-k} \cdot \left(\frac{a^2}{x}\right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \cdot \frac{x^{6-k}}{a^{6-k}} \cdot \frac{a^{2k}}{x^k} = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} \cdot x^{6-2k} \cdot a^{3k-6}\end{aligned}$$

El término independiente o constante será el valor de k tal que,

$$6 - 2k = 0 \Leftrightarrow 6 = 2k \Leftrightarrow \frac{6}{2} = k \Leftrightarrow 3 = k$$

Por lo tanto, el término independiente de la fórmula es,

$$\binom{6}{3} \cdot x^{6-2 \cdot 3} \cdot a^{3 \cdot 3-6} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot x^0 \cdot a^3 = 20 \cdot a^3$$

Por lo tanto,

$$20 \cdot a^3 = 1280 \Leftrightarrow a^3 = \frac{1280}{20} \Leftrightarrow a^3 = 64 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{64} = +4$$

(b) Uno de los términos del desarrollo de $(2x + p)^6$ es $60x^4$. Halle todos los posibles valores de p .

El binomio de Newton del enunciado tiene el siguiente desarrollo,

$$(2x + p)^6 = \sum_{n=0}^6 \binom{6}{n} \cdot (2x)^{6-n} \cdot p^n$$

Puesto que damos valores a $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, el monomio de grado 4 será para $n = 2$,

$$\binom{6}{2} \cdot (2x)^{6-2} \cdot p^2 = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} \cdot 16 \cdot x^4 \cdot p^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 16 \cdot x^4 \cdot p^2 =$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} \cdot 16 \cdot x^4 \cdot p^2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot 16 \cdot x^4 \cdot p^2 = 15 \cdot 16 \cdot x^4 \cdot p^2 = 240 \cdot p^2 \cdot x^4$$

Como el coeficiente de grado 4 es 60 entonces,

$$60 \cdot x^4 = 240 \cdot p^2 \cdot x^4 \Leftrightarrow 60 = 240 \cdot p^2 \Leftrightarrow \frac{60}{240} = p^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = p^2 \Leftrightarrow \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = p \Leftrightarrow \pm \frac{1}{2} = p$$

Por lo tanto, $p = \frac{1}{2}$ o $p = -\frac{1}{2}$.

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

[Puntuación máxima: 1,25 puntos]

6. Resuelva algebraicamente de modo correcto,

$$\frac{3 - x^2}{x^2 - 9} \leq 1$$

$$\frac{3 - x^2}{x^2 - 9} \leq 1$$

Operamos para dejar una sola fracción algebraica minorada por cero según,

$$\frac{3 - x^2}{x^2 - 9} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3 - x^2}{x^2 - 9} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3 - x^2 - (x^2 - 9)}{x^2 - 9} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 12}{x^2 - 9} \leq 0$$

Factorizamos el numerador y el denominador, calculando primeramente las raíces de ambos polinomios,

$$-2x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow 12 = 2x^2 \Leftrightarrow 6 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Por tanto,

$$\frac{-2x^2 + 12}{x^2 - 9} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2 \cdot (x + \sqrt{6}) \cdot (x - \sqrt{6})}{(x + 3) \cdot (x - 3)} \leq 0$$

Estudiamos ahora el signo de la fracción algebraica a partir de las factorizaciones y en los intervalos y semirrectas en los que queda dividida la recta real,

Intervalos/semirrectas	Valor de prueba	$\frac{-2 \cdot (x + \sqrt{6}) \cdot (x - \sqrt{6})}{(x + 3) \cdot (x - 3)}$	≤ 0 ?
$(-\infty, -3)$	$x = -10$	$\frac{(-) \cdot (-) \cdot (-)}{(-) \cdot (-)} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$	Sí
$(-3, -\sqrt{6}]$	$x = -2,5$	$\frac{(-) \cdot (-) \cdot (-)}{(+) \cdot (-)} = \frac{(-)}{(-)} = (+)$	No
$[-\sqrt{6}, +\sqrt{6}]$	$x = 0$	$\frac{(-) \cdot (+) \cdot (-)}{(+) \cdot (-)} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$	Sí
$[+\sqrt{6}, +3)$	$x = +2,5$	$\frac{(-) \cdot (+) \cdot (+)}{(+) \cdot (-)} = \frac{(-)}{(-)} = (+)$	No
$(+3, +\infty)$	$x = 10$	$\frac{(-) \cdot (+) \cdot (+)}{(+) \cdot (+)} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$	Sí

En conclusión, los valores que validan la inecuación son $x \in \mathbb{R}$ con

$$x \in (-\infty, -3) \cup [-\sqrt{6}, +\sqrt{6}] \cup (+3, +\infty).$$

7. (a) La función f viene dada por $f(x) = kx^2 - 2kx + (k^2 - 2)$ donde $k \in \mathbb{R}$. Halle el conjunto de valores de k para los que $f(x) = 0$ no presenta soluciones reales. (1 punto)

(b) Ocho corredores participan en una carrera donde no puede haber empates. Andrea y Jack son dos de los ocho participantes en esta carrera. Halle el número total de maneras posibles en las que pueden llegar a meta estos ocho corredores, sabiendo que Jack llega:

(i) Justo una posición después de Andrea. (0,5 puntos)

(ii) En cualquier posición después de Andrea. (1 punto)

(a) La función f viene dada por $f(x) = kx^2 - 2kx + (k^2 - 2)$ donde $k \in \mathbb{R}$. Halle el conjunto de valores de k para los que $f(x) = 0$ no presenta soluciones reales.

Para que no presente soluciones su discriminante tiene que ser negativo. En ese caso,

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (-2k)^2 - 4 \cdot k \cdot (k^2 - 2) < 0 \Leftrightarrow 4k^2 - 4k^3 + 8k < 0$$

Resolvemos la ecuación $4k^2 - 4k^3 + 8k = 0$, extrayendo factor común y resolviendo,

$$4k^2 - 4k^3 + 8k = 0 \Leftrightarrow 4k \cdot (k - k^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \\ k - k^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación, $-k^2 + k + 2 = 0$ mediante la fórmula de la ecuación de segundo grado,

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} x = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \\ x = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = +2 \end{cases}$$

En tal caso, formamos intervalos y semirrectas para valorar el signo del polinomio en cada uno de ellos,

$$\begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \hline -1 \quad 0 \quad +2 \end{array}$$

Estudiamos el signo del polinomio en cada uno de los intervalos y semirrectas,

Intervalos/semirrectas	Valor de prueba	$-4k \cdot (k + 1) \cdot (k - 2)$	< 0
$(-\infty - 1)$	-2	$(+) \cdot (-) \cdot (-) = (+)$	No
$(-1, 0)$	$-0,5$	$(+) \cdot (+) \cdot (-) = (-)$	Sí
$(0, +2)$	$+1$	$(-) \cdot (+) \cdot (-) = (+)$	No
$(+2, +\infty)$	$+3$	$(-) \cdot (+) \cdot (+) = (-)$	Sí

Por lo tanto, los valores de k para los que la ecuación no tiene soluciones reales son,

$$k \in (-1,0) \cup (+2, +\infty)$$

(b) Ocho corredores participan en una carrera donde no puede haber empates. Andrea y Jack son dos de los ocho participantes en esta carrera. Halle el número total de maneras posibles en las que pueden llegar a meta estos ocho corredores, sabiendo que Jack llega:

(i) Justo una posición después de Andrea.

Se trata de una permutación de siete elementos en la que Andrea y Jack son un único elemento. Por lo tanto, solo habrá que permutar 7 elementos.

$$7! = 5040 \text{ posibilidades}$$

(ii) En cualquier posición después de Andrea.

- Si Andrea llega la primera, Jack tiene 7 posibilidades diferentes de llegar y el resto de corredores permutarán entre ellos. por lo que las posibilidades de que Andrea llegue primera serán

$$7 \cdot 6!$$

- Si Andrea llega la segunda, Jack tiene 6 posibilidades diferentes de llegar y el resto de corredores permutarán entre ellos. por lo que las posibilidades de que Andrea llegue segunda serán

$$6 \cdot 6!$$

- Si Andrea llega la tercera, Jack tiene 5 posibilidades diferentes de llegar y el resto de corredores permutarán entre ellos. por lo que las posibilidades de que Andrea llegue tercera serán

$$5 \cdot 6!$$

- Si Andrea llega la cuarta, Jack tiene 4 posibilidades diferentes de llegar y el resto de corredores permutarán entre ellos. por lo que las posibilidades de que Andrea llegue cuarta serán

$$4 \cdot 6!$$

- Si Andrea llega la quinta, Jack tiene 3 posibilidades diferentes de llegar y el resto de corredores permutarán entre ellos. por lo que las posibilidades de que Andrea llegue quinta serán

$$3 \cdot 6!$$

- Si Andrea llega la sexta, Jack tiene 2 posibilidades diferentes de llegar y el resto de corredores permutarán entre ellos. por lo que las posibilidades de que Andrea llegue sexta serán

$$2 \cdot 6!$$

- Si Andrea llega la séptima, Jack tiene 1 posibilidad diferente de llegar y el resto de corredores permutarán entre ellos. por lo que las posibilidades de que Andrea llegue séptima serán

$$1 \cdot 6!$$

- Andrea no puede llegar la octava porque entonces Jack no podría llegar detrás

Por lo tanto, las posibilidades de que Jack llegue por detrás de Andrea son:

$$\sum_{n=1}^7 (7-n) \cdot 6! = 7 \cdot 6! + 6 \cdot 6! + 5 \cdot 6! + 4 \cdot 6! + 3 \cdot 6! + 2 \cdot 6! + 1 \cdot 6! =$$

$$= 6! \cdot (7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 6! \cdot \frac{(1+7) \cdot 7}{2} =$$

$$= 6! \cdot 28 = 20160 \text{ posibilidades}$$