

CONTROL Nº 3

Análisis y enfoques Matemáticas I y II

Fecha: Viernes, 21 de noviembre de 2025

NOMBRE: _____

APELLIDOS: _____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba siempre con bolígrafo de color azul o negro.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de **11 puntos**.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

1. Resuelva algebraicamente,

(0,5 + 1 punto)

a) $5 \cdot 3^{x-1} = 8$

b) $\frac{x^2 + 9 - 6x}{3x - x^2} \geq -1$

LA WEB DEL
PROFE DE MATHS

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

2. Un profesor se lleva a n alumnos de viaje de estudios. A los alumnos se les divide al azar en dos grupos. Por motivos de seguridad tiene que haber exactamente tres alumnos en el primer grupo y **al menos** tres alumnos en el segundo grupo. El profesor asigna al azar tres de los alumnos al primer grupo y el resto al segundo grupo.

(a) Escriba una expresión algebraica fraccionaria en función de n , lo más simplificada posible, que dé el número de maneras distintas en las que se puede repartir a los alumnos. (0,5 puntos)

(b) Dos de los alumnos le piden al profesor no coincidir en el mismo grupo. El profesor acepta la petición. Escriba una expresión algebraica no fraccionaria en función de n , que determine el número de posibilidades de hacer esto. (0,5 puntos)

(c) El profesor se da cuenta de que el número de maneras de repartir a los alumnos si accede a la petición anterior es la mitad que sin la petición. Calcule en este caso el valor de n . (0,5 puntos)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 2 puntos]

3. Resuelva algebraicamente,

(0,5 + 1,5 puntos)

(a) $\ln x = 1 + 2 \ln(3x)$

(b)
$$\left. \begin{array}{l} 2^{x+1} + 5^{y+2} = 7 \\ 2^{1-x} + 5^{y+1} = 3 \end{array} \right\}$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATHS

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 2 puntos]

(Análisis y Enfoques P2, Noviembre 2024 ej.2)

4. (i) Halle el coeficiente del término x^6 del desarrollo de $(2x - 5)^9$. (1 punto)

(ii) Halle p para que el coeficiente del término x^6 del desarrollo de $(2x - p)^9$ sea -672 .

(1 punto)

LA WEB DEL
PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

(Matemáticas NS P1, Mayo 2025 ej.5)

5. La ecuación cuadrática $x^2 + kx + 15 - k = 0$, tiene dos raíces reales distintas.

(i) Halle los posibles valores de k .

(1 punto)

(ii) Usando el resultado anterior y razonando mediante las fórmulas Cardano-Vieta, halle los posibles valores de k en el caso en el que las dos raíces reales distintas sean ambas positivas o ambas negativas.

(1,5 puntos)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

(Análisis y Enfoques NS, Mayo 2025, P1 ej. 7)

6. Se sabe que $p(x) = x^4 + px^3 - 2x^2 + qx - 3$ es exactamente divisible entre $(x + 1)^2$. Señala, sin hacer cálculo alguno, una raíz del polinomio $p(x)$ y su multiplicidad. Aplicando lo anterior, halle el valor de p y el valor de q , donde $p, q \in \mathbb{R}$.

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CONTROL Nº 3

DE ANÁLISIS Y ENFOQUES N.S. / MATEMÁTICAS I

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

1. Resuelva algebraicamente,

(0,5 + 1 punto)

a) $5 \cdot 3^{x-1} = 8$

b) $\frac{x^2 + 9 - 6x}{3x - x^2} \geq -1$

a) $5 \cdot 3^{x-1} = 8$

Pasamos a dividir al 5 y tomamos logaritmos decimales,

$$5 \cdot 3^{x-1} = 8 \Leftrightarrow 3^{x-1} = \frac{8}{5} \Leftrightarrow \log(3^{x-1}) = \log\left(\frac{8}{5}\right)$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos,

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot \log(3) = \log\left(\frac{8}{5}\right) \Leftrightarrow (x-1) = \frac{\log\left(\frac{8}{5}\right)}{\log(3)} \Leftrightarrow x = 1 + \frac{\log\left(\frac{8}{5}\right)}{\log(3)}$$

$$\Leftrightarrow x \approx 1,42782$$

b) $\frac{x^2 + 9 - 6x}{3x - x^2} \geq -1$

Ordenamos la inecuación de tal modo que sea una fracción algebraica mayor o igual a cero.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 9 - 6x}{3x - x^2} \geq -1 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 9 - 6x}{3x - x^2} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 9 - 6x + 3x - x^2}{3x - x^2} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{9 - 3x}{3x - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-3 \cdot (x - 3)}{-x \cdot (x - 3)} \geq 0 \end{aligned}$$

La raíz del numerador es $x = 3$ mientras que las del denominador son $x = 0$ y $x = 3$.

Formamos intervalos,



Estudiamos el signo de la fracción, que nunca va a ser cero, para analizar cuándo es positivo,

Semirrectas/intervalos	Valor de prueba	$\frac{-3 \cdot (x - 3)}{-x \cdot (x - 3)}$
$(-\infty, 0)$	$x = -1000$	$\frac{(-) \cdot (-)}{(+) \cdot (-)} = (-)$
$(0, +3)$	$x = 2$	$\frac{(-) \cdot (-)}{(-) \cdot (-)} = (+)$
$(+3, +\infty)$	$x = 1000$	$\frac{(-) \cdot (+)}{(-) \cdot (+)} = (+)$

La solución es $x \in (0, +3) \cup (+3, +\infty)$.

LA WEB DEL
PROFE DE MATHS

2. Un profesor se lleva a n alumnos de viaje de estudios. A los alumnos se les divide al azar en dos grupos. Por motivos de seguridad tiene que haber exactamente tres alumnos en el primer grupo y **al menos** tres alumnos en el segundo grupo. El profesor asigna al azar tres de los alumnos al primer grupo y el resto al segundo grupo.

(a) Escriba una expresión algebraica fraccionaria en función de n , lo más simplificada posible, que dé el número de maneras distintas en las que se puede repartir a los alumnos. (0,5 puntos)

(b) Dos de los alumnos le piden al profesor no coincidir en el mismo grupo. El profesor acepta la petición. Escriba una expresión algebraica no fraccionaria en función de n , que determine el número de posibilidades de hacer esto. (0,5 puntos)

(c) El profesor se da cuenta de que el número de maneras de repartir a los alumnos si accede a la petición anterior es la mitad que sin la petición. Calcule en este caso el valor de n . (0,5 puntos)

(a) Escriba una expresión algebraica fraccionaria en función de n , lo más simplificada posible, que dé el número de maneras distintas en las que se puede repartir a los alumnos.

Se trata únicamente de elegir los 3 alumnos que van a ir al primer grupo. Como no importa el orden y no se pueden repetir alumnos, este número viene determinado por la combinación ordinaria de n elementos tomados de 3 en 3. Es decir,

$$C_{n,3} = \binom{n}{3}$$

Simplificamos al máximo esta expresión,

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}$$

(b) Dos de los alumnos le piden al profesor no coincidir en el mismo grupo. El profesor acepta la petición. Escriba una expresión algebraica no fraccionaria en función de n , que determine el número de posibilidades de hacer esto.

El número de posibilidades de que no vayan juntos estos dos alumnos consiste en asignar uno a uno de los grupos y el otro al segundo grupo. De esto hay dos opciones si solo tenemos en cuenta a los dos

Además, al primer grupo, le tenemos que asignar 2 alumnos más entre los $n - 2$ restantes, por lo que el número de posibilidades será,

$$2 \cdot C_{n-2,2} = 2 \cdot \binom{n-2}{2} = 2 \cdot \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} = (n-2) \cdot (n-3)$$

(c) El profesor se da cuenta de que el número de maneras de repartir a los alumnos si accede a la petición anterior es la mitad que sin la petición. Calcule en este caso el valor de n .

Si el profesor se da cuenta de que ahora son la mitad de posibilidades es porque,

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} = 2 \cdot (n-2) \cdot (n-3)$$

Resolvemos,

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} &= 2 \cdot (n-2) \cdot (n-3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n \cdot (n-1) &= 12 \cdot (n-3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n^2 - n &= 12n - 36 \Leftrightarrow n^2 - 13n + 36 = 0 \\ \Leftrightarrow n &= \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} n = \frac{13+5}{2} = 9 \\ n = \frac{13-5}{2} = 4 \end{cases}$$

Como en el segundo grupo tiene que haber al menos tres alumnos entonces el único valor que cumple las condiciones del enunciado es

En ese caso, las posibilidades de que no vayan juntos es $n = 9$

[Puntuación máxima: 2 puntos]

3. Resuelva algebraicamente,

(0,5 + 1,5 puntos)

(a) $\ln x = 1 + 2 \ln(3x)$

(b) $\begin{cases} 2^{x+1} + 5^{y+2} = 7 \\ 2^{1-x} + 5^{y+1} = 3 \end{cases}$

(a) $\ln x = 1 + 2 \ln(3x)$

$$\ln x = 1 + 2 \ln(3x) \Leftrightarrow \ln x = 1 + \ln(3x)^2 \Leftrightarrow \ln x - \ln(3x)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{9x^2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9x} = e^1 \Leftrightarrow \frac{1}{9e} = x$$

(b) $\begin{cases} 2^{x+1} + 5^{y+2} = 7 \\ 2^{1-x} + 5^{y+1} = 3 \end{cases}$

Si sumamos las ecuaciones obtenemos

$$\begin{cases} 2^{x+1} + 5^{y+2} = 7 \\ 2^{1-x} + 5^{y+1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2^x + 25 \cdot 5^y = 7 \\ \frac{2}{2^x} + 5 \cdot 5^y = 3 \end{cases}$$

Hacemos los cambios de variable,

$$u = 2^x ; \quad v = 5^y$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} 2 \cdot 2^x + 25 \cdot 5^y = 7 \\ \frac{2}{2^x} + 5 \cdot 5^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 25 \cdot v = 7 \\ \frac{2}{u} + 5 \cdot v = 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-5)} \begin{cases} 2u + 25 \cdot v = 7 \\ -\frac{10}{u} - 25 \cdot v = -15 \end{cases}$$

$$2u - \frac{10}{u} = 7 - 15$$

Resolvemos,

$$2u - \frac{10}{u} = 7 - 15 \Leftrightarrow 2u - \frac{10}{u} = -8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2u^2}{u} - \frac{10}{u} = \frac{-8u}{u} \Leftrightarrow 2u^2 + 8u - 10 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{4} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{4} = \frac{-8 \pm 12}{4} = \begin{cases} u = \frac{-8 + 12}{4} = 1 \\ u = \frac{-8 - 12}{4} = -5 \end{cases}$$

Resolvemos el valor de x ,

- Si $u = 1$, como $u = 2^x$ entonces,

$$1 = 2^x \Leftrightarrow x = 0$$

- Si $u = -5$, como $u = 2^x$ entonces,

$$-5 = 2^x \Leftrightarrow \text{No existe } x$$

Por lo tanto, la única posibilidad para x es $x = 0$. Calculamos v con la primera ecuación

- Si $u = 1$ entonces,

$$2 \cdot 1 + 25 \cdot v = 7 \Leftrightarrow 2 + 25v = 7 \Leftrightarrow 25v = 5 \Leftrightarrow v = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

Como $v = 5^y$ entonces,

$$\frac{1}{5} = 5^y \Leftrightarrow 5^{-1} = 5^y \Leftrightarrow y = -1$$

En conclusión $x = 0$, $y = -1$.

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

4. (i) Halle el coeficiente del término x^6 del desarrollo de $(2x - 5)^9$. (1 punto)

(ii) Halle p para que el coeficiente del término x^6 del desarrollo de $(2x - p)^9$ sea -672 .

(1 punto)

(i) Halle el coeficiente del término x^6 del desarrollo de $(2x - 5)^9$.

Como

$$(2x - 5)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \cdot (2x)^{9-k} \cdot (-5)^k = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \cdot 2^{9-k} \cdot x^{9-k} \cdot (-5)^k$$

Entonces, el grado 6 lo conseguiremos si y solo si,

$$9 - k = 6 \Leftrightarrow k = 3$$

Y el coeficiente de grado 6 será,

$$\binom{9}{3} \cdot 2^{9-3} \cdot (-5)^3 = 84 \cdot 64 \cdot (-125) = -672\,000$$

(ii) Halle k para que el coeficiente del término x^6 del desarrollo de $(2x - p)^9$ sea -672 .

Como

$$(2x + p)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \cdot (2x)^{9-k} \cdot (-p)^k = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \cdot 2^{9-k} \cdot x^{9-k} \cdot (-p)^k$$

Entonces, el grado 6 lo conseguiremos si y solo si,

$$9 - k = 6 \Leftrightarrow k = 3$$

Y el coeficiente de grado 6 será,

$$\binom{9}{3} \cdot 2^{9-3} \cdot (-p)^3 = 84 \cdot 64 \cdot (-p)^3 = -5376p^3$$

Como el coeficiente de grado 6 es -672 entonces,

$$-5376p^3 = -672 \Leftrightarrow p^3 = \frac{672}{5376} \Leftrightarrow p^3 = 0.125 \Leftrightarrow p = \sqrt[3]{0.125} = 0.5$$

En conclusión $p = 0.5$.

5. La ecuación cuadrática $x^2 + kx + 15 - k = 0$, tiene dos raíces reales distintas.

(i) Halle los posibles valores de k .

(1 punto)

(ii) Usando el resultado anterior y razonando mediante las fórmulas Cardano-Vieta, halle los posibles valores de k en el caso en el que las dos raíces reales distintas sean ambas positivas o ambas negativas. (1,5 puntos)

(i) Halle los posibles valores de k .

Para que la ecuación cuadrática $x^2 + kx + 15 - k = 0$ tenga dos raíces reales distintas. Su discriminante debe ser positivo.

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow k^2 - 4 \cdot (15 - k) > 0 \Leftrightarrow k^2 + 4k - 60 > 0$$

Las raíces de la ecuación $k^2 + 4k - 60 = 0$ son

$$k^2 + 4k - 60 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 240}}{2} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{-4 \pm 16}{2} = \begin{cases} x = \frac{-4 + 16}{2} = +6 \\ x = \frac{-4 - 16}{2} = -10 \end{cases}$$

Por tanto, como $p(k) = k^2 + 4k - 60$ es un polinomio de grado dos con coeficiente principal positivo entonces, los valores de k para los que $p(k) = k^2 + 4k - 60 > 0$ son

$$k \in (-\infty, -10) \cup (+6, +\infty)$$

(ii) Halle los posibles valores de k en el caso en el que las dos raíces reales distintas sean ambas positivas o ambas negativas.

Los valores de k que buscamos están dentro de las dos semirrectas de valores,

$$k \in (-\infty, -10) \cup (+6, +\infty)$$

Consideramos los valores r_1 y r_2 como las dos raíces de la ecuación $x^2 + kx + 15 - k = 0$.

En tal caso, aplicando las fórmulas Cardano-Vieta sobre el coeficiente de grado 1, tendremos que,

$$k = -(r_1 + r_2)$$

Para esta fórmula tendremos que,

- Si $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$ entonces $k < 0$. En tal caso, los posibles valores de k son,

$$k \in (-\infty, -10)$$

Aplicando ahora las *fórmulas Cardano-Vieta* sobre el término independiente, tendremos que,

$$15 - k = r_1 \cdot r_2 > 0$$

Esta situación la cumplen todos los valores

$$k \in (-\infty, -10)$$

- Si $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$ entonces $k > 0$. En tal caso, los posibles valores de k son,

$$k \in (+6, +\infty)$$

Aplicando ahora las *fórmulas Cardano-Vieta* sobre el término independiente, tendremos que,

$$15 - k = r_1 \cdot r_2 < 0$$

Esta situación la cumplen todos los valores del intervalo,

$$k \in (6, 15)$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

6. Se sabe que $p(x) = x^4 + px^3 - 2x^2 + qx - 3$ es exactamente divisible entre $(x + 1)^2$. Señala, sin hacer cálculo alguno, una raíz del polinomio $p(x)$ y su multiplicidad. Aplicando lo anterior, halle el valor de p y el valor de q , donde $p, q \in \mathbb{R}$.

Si el polinomio es divisible entre $(x + 1)^2$ entonces dicho polinomio debe tener una raíz doble para $x = -1$. En ese caso,

$$p(-1) = 0$$

Operando obtenemos que,

$$p(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^4 + p \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 + q \cdot (-1) - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - p - 2 - q - 3 = 0 \Leftrightarrow p = -q - 4$$

Además, $p(x)$ es divisible entre $(x + 1)$ y entonces al dividir $p(x)$ entre el factor $(x + 1)$ debemos obtener resto cero. Aplicando la regla de Ruffini para dividir $p(x)$ entre $(x + 1)$ tendremos que,

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -q-4 & -2 & q & -3 \\ -1 & & -1 & q+5 & -q-3 & +3 \\ \hline & 1 & -q-5 & q+3 & -3 & 0 \end{array}$$

Aplicando de nuevo Ruffini para dividir el cociente $x^3 - (q + 5)x^2 + (q + 3)x - 3$ entre $(x + 1)$ tendremos que,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -q-5 & q+3 & -3 \\ -1 & & -1 & q+6 & -2q-9 \\ \hline & 1 & -q-6 & 2q+9 & -2q-12 \end{array}$$

Como el resto debe ser cero entonces,

$$-2q - 12 = 0 \Leftrightarrow -12 = 2q \Leftrightarrow -6 = q$$

Por tanto, los valores pedidos son $q = -6$ y $p = -q - 4 = -(-6) - 4 = +2$