

CONTROL N°2

Análisis y enfoques Matemáticas I y II

Fecha: Viernes, 7 de noviembre de 2025

NOMBRE: _____

APELLIDOS: _____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba siempre con bolígrafo de color azul o negro.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de **10puntos**.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

1. Sabiendo que $\log_a 3 \approx 0.43$ y $\log_a 6 \approx 0.7$ y **sin utilizar la calculadora más que para sumar y restar, calcula algebraicamente**, mediante las propiedades de los logaritmos,

a) $\log_a 54$ b) $\log_a (\sqrt[3]{2})$ c) $\log_a \left(\frac{1}{4}\right)$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

[Puntuación máxima: 1 punto] (Análisis y Enfoques P2, Noviembre 2022 ej.5)

2. (a) Considere el desarrollo de $\frac{(ax+1)^9}{21x^2}$, donde $a \neq 0$. El coeficiente de término en x^4 es $\frac{8}{7}a^5$.
Halle el valor de a . (1 punto)

- (b) Aplicando el binomio de Newton, calcule directamente el siguiente sumatorio,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad (0,75 \text{ puntos})$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATHS

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

3. Resuelve algebraicamente las siguientes ecuaciones

a) $e^{2x} - 3 \cdot e^{3+x} + 2 \cdot e^6 = 0$

(1 punto)

b) $\log_4(x+5) + 2 \cdot \log_4(3+x) = 1 + \log_4(2+x)$

(1,5 puntos)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 2,25 puntos]

(Matemáticas NS P2, Noviembre 2017 ej7)

(Matemáticas NS P2, Mayo 2017 ej11)

4. Resuelva las siguientes preguntas razonando sus soluciones.

(1) En la ecuación cuadrática $7x^2 - 8x + p = 0$, ($p \in \mathbb{Z}$), una de las raíces es tres veces mayor que la otra raíz. Halle el valor de p . (1 punto)

(2) Sea $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 7x - 4$, donde a y b son números positivos.

(i) Sabiendo que $x^2 - 1$ es un factor de $f(x)$, halle el valor de a y el valor de b . (0,75 puntos)

(ii) Factorice $f(x)$, expresándolo como un producto de factores lineales. (0,5 puntos)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 2 puntos]

(Análisis y Enfoques, Noviembre 2022, P1 ej. 11)

5. Considere un código de tres cifras abc , donde a cada letra a , b y c se le asigna uno de los siguientes valores: 1, 2, 3, 4 o 5. Halle el número total de códigos posibles:

(i) Suponiendo que los valores se pueden repetir (por ejemplo, 121 o 444). (0,5 puntos)

(ii) Suponiendo que no se repite ningún valor. (0,5 puntos)

(iii) Suponiendo que se repiten exactamente dos valores (por ejemplo 112 o 232).

(0,5 puntos)

(iv) Suponiendo que no se repite ningún valor y no importa el orden. (0,5 puntos)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CONTROL Nº 2

DE ANÁLISIS Y ENFOQUES N.S. / MATEMÁTICAS I

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

1. Sabiendo que $\log_a 3 \approx 0.43$ y $\log_a 6 \approx 0.7$ y **sin utilizar la calculadora más que para sumar y restar, calcula algebraicamente**, mediante las propiedades de los logaritmos,

a) $\log_a 54$ b) $\log_a(\sqrt[3]{2})$ c) $\log_a\left(\frac{1}{4}\right)$

a) $\log_a 54$

$$\begin{aligned}\log_a 54 &= \log_a(9 \cdot 6) = \log_a 9 + \log_a 6 = \log_a 3^2 + \log_a 6 = \\ &= 2 \cdot \log_a 3 + \log_a 6 \approx 2 \cdot 0.43 + 0.7 = 0.86 + 0.7 = \mathbf{1.56}\end{aligned}$$

b) $\log_a(\sqrt[3]{2})$

$$\begin{aligned}\log_a \sqrt[3]{2} &= \log_a 2^{1/3} = \frac{1}{3} \cdot \log_a 2 = \frac{1}{3} \cdot \log_a\left(\frac{6}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (\log_a 6 - \log_a 3) \approx \frac{1}{3} \cdot (0.7 - 0.43) = \frac{0.27}{3} = \mathbf{0.09}\end{aligned}$$

c) $\log_a\left(\frac{1}{4}\right)$

$$\begin{aligned}\log_a\left(\frac{1}{4}\right) &= \log_a 4^{-1} = \log_a(2^2)^{-1} = \log_a 2^{-2} = -2 \cdot \log_a 2 = -2 \cdot \log_a\left(\frac{6}{3}\right) = \\ &= -2 \cdot [\log_a 6 - \log_a 3] \approx -2 \cdot [0.7 - 0.43] = -2 \cdot 0.27 = \mathbf{-0.54}\end{aligned}$$

[Puntuación máxima: 1 punto] (Análisis y Enfoques P2, Noviembre 2022 ej.5)

2. (a) Considere el desarrollo de $\frac{(ax+1)^9}{21x^2}$, donde $a \neq 0$. El coeficiente de término en x^4 es $\frac{8}{7}a^5$.
Halle el valor de a . (1 punto)

(b) Aplicando el binomio de Newton, calcula directamente el siguiente sumatorio,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad (0,75 \text{ puntos})$$

Como

$$(ax + 1)^9 = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \cdot (ax)^{9-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \cdot a^{9-k} \cdot x^{9-k}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{(ax + 1)^9}{21x^2} &= \frac{\sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \cdot a^{9-k} \cdot x^{9-k}}{21x^2} = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \cdot \frac{a^{9-k} \cdot x^{9-k}}{21x^2} = \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \cdot \frac{a^{9-k}}{21} \cdot x^{9-k-2} = \\ &= \sum_{k=0}^9 \binom{9}{k} \cdot \frac{a^{9-k}}{21} \cdot x^{7-k} \end{aligned}$$

El valor de k del coeficiente de grado cuatro de esta expresión vendrá dado por,

$$7 - k = 4 \Leftrightarrow 7 - 4 = k \Leftrightarrow k = 3$$

Y el coeficiente de grado cuatro será,

$$\binom{9}{3} \cdot \frac{a^{9-3}}{21} = 84 \cdot \frac{a^6}{21} = 4a^6$$

Como el coeficiente de término en x^4 es $\frac{8}{7}a^5$ y $a \neq 0$ entonces,

$$4a^6 = \frac{8a^5}{7} \Leftrightarrow 4a = \frac{8}{7} \Leftrightarrow a = \frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

(b) Aplicando el binomio de Newton, calcula directamente el siguiente sumatorio,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = (1 + 1)^n = 2^n$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

3. Resuelve algebraicamente las siguientes ecuaciones

a) $e^{2x} - 3 \cdot e^{3+x} + 2 \cdot e^6 = 0$ (1 punto)

b) $\log_4(x+5) + 2 \cdot \log_4(3+x) = 1 + \log_4(2+x)$ (1,5 puntos)

a) $e^{2x} - 3 \cdot e^{3+x} + 2 \cdot e^6 = 0$

Como,

$$e^{2x} - 3 \cdot e^{3+x} + 2 \cdot e^6 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 3 \cdot e^3 \cdot e^x + 2 \cdot e^6 = 0 \Leftrightarrow$$

Entonces, haciendo el cambio de variable,

$$t = e^x$$

Tendremos,

$$(e^x)^2 - 3 \cdot e^3 \cdot e^x + 2 \cdot e^6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3 \cdot e^3 \cdot t + 2 \cdot e^6 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^2 - 3e^3t + 2e^6 = 0$$

Resolvemos la ecuación mediante la fórmula de resolución,

$$t = \frac{-(-3e^3) \pm \sqrt{(-3e^3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2e^6}}{2 \cdot 1} = \frac{+3e^3 \pm \sqrt{9e^6 - 8e^6}}{2} = \\ = \frac{+3e^3 \pm \sqrt{e^6}}{2} = \frac{+3e^3 \pm e^3}{2} = \begin{cases} t = 2e^3 \\ t = e^3 \end{cases}$$

- Si $t = 2e^3$, entonces, como $t = e^x$ entonces,

$$e^x = 2e^3 \Leftrightarrow e^{x-3} = 2 \Leftrightarrow \ln(e^{x-3}) = \ln 2 \Leftrightarrow (x-3) \cdot \ln(e) = \ln 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x-3 = \ln(2) \Leftrightarrow x = 3 + \ln(2) \approx 3.69315$$

- Si $t = e^3$, entonces, como $t = e^x$ entonces,

$$e^x = e^3 \Leftrightarrow x = 3$$

b) $\log_4(x+5) + 2 \cdot \log_4(3+x) = 1 + \log_4(2+x)$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos para ir eliminándolos,

$$\log_4(x+5) + 2 \cdot \log_4(3+x) = 1 + \log_4(2+x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_4(x+5) + \log_4(3+x)^2 = 1 + \log_4(2+x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_4[(x+5)(3+x)^2] = 1 + \log_4(2+x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_4[(x+5)(3+x)^2] - \log_4(2+x) = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_4 \left[\frac{(x+5)(3+x)^2}{(2+x)} \right] = 1$$

Aplicamos la definición de logaritmo para eliminar definitivamente el mismo,

$$\frac{(x+5)(3+x)^2}{(2+x)} = 4^1 \Leftrightarrow (x+5) \cdot (9+x^2+6x) = 4 \cdot (2+x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x + x^3 + 6x^2 + 45 + 5x^2 + 30x = 8 + 4x \Leftrightarrow$$

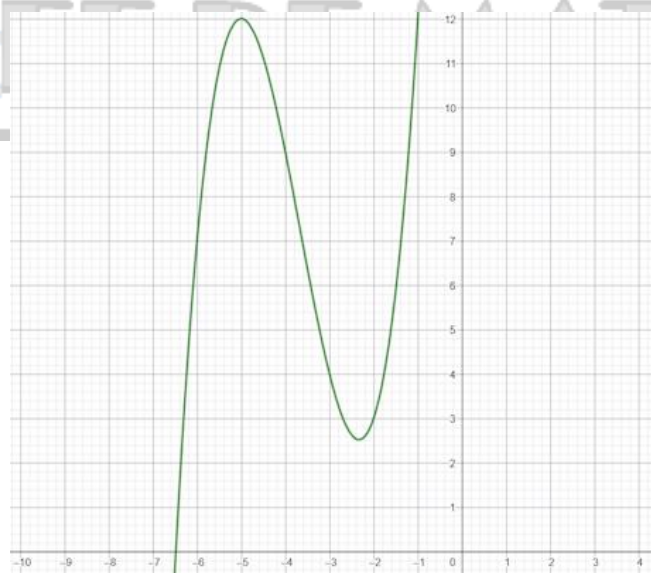
$$\Leftrightarrow x^3 + 11x^2 + 35x + 37 = 0$$

Resolviendo la ecuación mediante polinómica mediante la calculadora gráfica, realizando las siguientes órdenes,

- Ecuación
- F2 polinomio
- Grado 3
- $a = 1 \quad b = 11 \quad c = 35 \quad d = 37$

la calculadora nos da un solo valor $x = -6,479815749$.

Se puede comprobar mediante la opción gráfica también que solo existe esa solución ya que, graficando $f(x) = x^3 + 11x^2 + 35x + 37$ solo existe un corte con el eje OX (que está entre $x = -6$ y $x = -7$ y es la raíz del polinomio).



Sin embargo, se comprueba que la posible solución hallada NO es solución de la ecuación logarítmica inicial, simplemente sustituyendo en la ecuación, donde todos ningún logaritmo existe y la ecuación, NO tiene solución.

4. Resuelva las siguientes preguntas razonando sus soluciones.

(1) En la ecuación cuadrática $7x^2 - 8x + p = 0$, ($p \in \mathbb{Z}$), una de las raíces es tres veces mayor que la otra raíz. Halle el valor de p . (1 punto)

(2) Sea $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 7x - 4$, donde a y b son números positivos.

(i) Sabiendo que $x^2 - 1$ es un factor de $f(x)$, halle el valor de a y el valor de b . (0,75 puntos)

(ii) Factorice $f(x)$, expresándolo como un producto de factores lineales. (0,5 puntos)

(1) En la ecuación cuadrática $7x^2 - 8x + p = 0$, ($p \in \mathbb{Z}$), una de las raíces es tres veces mayor que la otra raíz. Halle el valor de p .

Sean r_1 y r_2 las dos raíces de la ecuación. Si una de ellas es el triple que la otra entonces,

$$r_1 = 3r_2$$

Por otra parte, por las *fórmulas Cardano-Vieta* tendremos que, igualando los coeficientes de los términos de igual grado del polinomio $p(x) = 7x^2 - 8x + p$ y los correspondientes a su factorización, tendremos que,

$$\begin{aligned} 7x^2 - 8x + p &= 7 \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \Leftrightarrow 7x^2 - 8x + p = 7 \cdot (x - 3r_2) \cdot (x - r_2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -8 = 7 \cdot (-r_2 - 3r_2) \\ p = 7 \cdot (-3r_2) \cdot (-r_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 = 28r_2 \\ p = 21 \cdot r_2^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo que, para el caso del grado 1 tendremos que, al igualar los coeficientes,

$$8 = 28r_2 \Leftrightarrow \frac{8}{28} = r_2 \Leftrightarrow \frac{2}{7} = r_2$$

Y en ese caso,

$$r_1 = 3r_2 = 3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right) = \frac{6}{7}$$

Nuevamente, por las *fórmulas Cardano-Vieta* tendremos que, para el caso del término independiente,

$$p = -21 \cdot r_2^2 \Leftrightarrow p = 21 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 \Leftrightarrow p = 21 \cdot \frac{4}{49} \Leftrightarrow p = \frac{12}{7}$$

(2) Sea $f(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 7x - 4$, donde a y b son números positivos.

(i) Sabiendo que $x^2 - 1$ es un factor de $f(x)$, halle el valor de a y el valor de b .

Si $x^2 - 1$ es factor de $f(x)$, como

$$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$$

entonces $(x - 1)$ y $(x + 1)$ son factores de $f(x)$, tendremos que, por el teorema del resto,

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^4 + a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow a + b = 8$$

y que

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) - 4 = 0 \Leftrightarrow -a + b = -6$$

Resolvemos el sistema,

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ -a + b = -6 \end{cases}$$

Sumando las ecuaciones,

$$\begin{array}{r} + \quad a + b = 8 \\ -a + b = -6 \\ \hline 2b = 2 \Leftrightarrow b = 1 \end{array}$$

Y en tal caso,

$$a + b = 8 \Leftrightarrow a = 8 - b = 8 - 1 = 7$$

Concluyendo que $a = 7$ y $b = 1$.

(ii) Factorice $f(x)$, expresándolo como un producto de factores lineales.

Como $x = 1$ es raíz del polinomio, aplicamos el *método de Ruffini* con estas dos raíces,

$$\begin{array}{r|rrrrr} & +3 & +7 & +1 & -7 & -4 \\ +1 & & +3 & +10 & +11 & +4 \\ \hline & +3 & +10 & +11 & +4 & 0 \end{array}$$

Aplicando de nuevo el *método de Ruffini*, esta vez con $x = -1$ tendremos que,

$$\begin{array}{r|rrrr} & +3 & +10 & +11 & +4 \\ -1 & & -3 & -7 & -4 \\ \hline & +3 & +7 & +4 & 0 \end{array}$$

Resolvemos ahora la ecuación resultante de igualar a cero al cociente,

$$3x^2 + 7x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(+7) \pm \sqrt{(+7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{6} =$$
$$= \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{-7 \pm 1}{6} = \begin{cases} x = \frac{-7 + 1}{6} = -\frac{6}{6} = -1 \\ x = \frac{-7 - 1}{6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Por lo tanto, las raíces del polinomio $f(x)$ son,

$$r_1 = +1 \quad , \quad r_2 = -1 \text{ (doble)} \quad , \quad r_3 = -\frac{4}{3}$$

Y la factorización del polinomio $f(x)$ es,

$$q(x) = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)^2 \cdot \left(x + \frac{4}{3}\right)$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

5. Considere un código de tres cifras abc , donde a cada letra a , b y c se le asigna uno de los siguientes valores: 1, 2, 3, 4 o 5. Halle el número total de códigos posibles:

(i) Suponiendo que los valores se pueden repetir (por ejemplo, 121 o 444). (0,5 puntos)

(ii) Suponiendo que no se repite ningún valor. (0,5 puntos)

(iii) Suponiendo que se repiten exactamente dos valores (por ejemplo 112 o 232).

(0,5 puntos)

(iv) Suponiendo que no se repite ningún valor y no importa el orden. (0,5 puntos)

(i) Suponiendo que los valores se pueden repetir (por ejemplo, 121 o 444).

Puesto que importa el orden de colocación de los valores y se pueden repetir, estamos ante una variación con repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3. Por tanto, el número de códigos posibles son,

$$VR_{5,3} = 5^3 = 125 \text{ códigos posibles}$$

(ii) Suponiendo que no se repite ningún valor.

Puesto que importa el orden de colocación de los valores y se pueden repetir, estamos ante una variación ordinaria sin repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3. Por tanto, el número de códigos posibles son,

$$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ códigos posibles}$$

(iii) Suponiendo que se repiten exactamente dos valores (por ejemplo 112 o 232).

En el caso de 112, habrá tres posibilidades en que 1 se repita dos veces y 2 una. En ese caso, como habrá cinco opciones para la repetición del número y 4 para el otro número, el total de posibilidades es,

$$3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \text{ posibilidades}$$

(iv) Suponiendo que no se repite ningún valor y no importa el orden.

Puesto que NO importa el orden de colocación de los valores y no se pueden repetir, estamos ante una combinación ordinaria sin repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3. Por tanto, el número de códigos posibles son,

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ códigos posibles}$$