

CONTROL N°1

Análisis y enfoques Matemáticas I y II

Fecha: Viernes, 24 de octubre de 2025

NOMBRE: _____

APELLIDOS: _____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En este cuadernillo se escribe solo a bolígrafo de color azul o negro exclusivamente. No se leerá nada que esté a lápiz.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de **10 puntos**.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

1. Demostrar por inducción las siguientes cuestiones,

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \frac{(1+n)^2 \cdot n^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

2.(a) Dado el producto $x^2 \cdot \left(2x - \frac{1}{4x^3}\right)^{10}$ con $x \in \mathbb{R}$, calcular el coeficiente del sumando de grado 2 del resultado final de tal producto. (1 punto)

(b) La expansión binomial de $(1 + kx)^n$ viene dada en sus primeros términos por $1 + 12x + 28k^2x^2 + \dots$. Calcula razonadamente el valor de $k \in \mathbb{R}$ y el de $n \in \mathbb{N}$.

(1,5 puntos)

LA WEB DEL
PROFE DE MATHS

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

3. En una convocatoria de exámenes de prueba, un alumno de un colegio tiene que hacer 18 exámenes, incluidos entre ellos el de Física, el de Química y el de Biología. Si puede elegir el orden de realización de todos los exámenes,

a) Halle el número de órdenes distintos en los que podría hacer los 18 exámenes.

(0,5 puntos)

b) Si el primer y último examen lo escoge de entre Física, el de Química y el de Biología, halle el número de órdenes distintos en los que podría hacer los 18 exámenes.

(1 punto)

c) Si no le está permitido hacer los tres exámenes seguidos (dos seguidos sí), halle el número de órdenes distintos en los que podría hacer los 18 exámenes. (1 punto)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

4. Resuelve los siguientes problemas,

- (a) Dado el polinomio $p(x) = x^2 + (k - 5)x + (k - 6)$, determinar, si existen, los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la gráfica del polinomio corta al eje OX . ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el polinomio tiene dos raíces distintas?, ¿para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ no tiene raíces? (1 punto)
- (b) Se sabe que el polinomio $q(x) = 4x^3 + 6x^2 + kx - 4$ tiene tres raíces reales y distintas. Sabiendo que el producto de dos de las tres raíces es 1, calcular la tercera raíz. A partir de esto, calcule el valor de k y el de las otras dos raíces. (1,5 puntos)

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 1 punto]

5. (a) Dados $n, k \in \mathbb{R}$ con $n > k$ Demuestra la propiedad de los números combinatorios siguiente,

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \quad (0,25 \text{ puntos})$$

- (b) Dados $n, k \in \mathbb{R}$ con $n > k$, mediante la propiedad anterior de los números combinatorios, del triángulo Pascal-Tartaglia o del cualquier otro modo matemático, simplifica al máximo la siguiente operación,

$$\frac{\binom{n}{n-k} + \binom{n}{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} \quad (0,75 \text{ puntos})$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL PROFE DE MATHS

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CONTROL Nº 1

DE ANÁLISIS Y ENFOQUES N.S.

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

1. Demostrar por inducción las siguientes cuestiones,

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \frac{(1+n)^2 \cdot n^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \frac{(1+n)^2 \cdot n^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probamos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

- Probamos el caso $n = 1$, es decir,

$$¿ \sum_{j=1}^1 j^3 = \frac{(1+1)^2 \cdot 1^2}{4} ?$$

Como,

$$\sum_{j=1}^1 j^3 = 1^3 = 1$$

Y tenemos que,

$$\frac{(1+1)^2 \cdot 1^2}{4} = \frac{2^2 \cdot 1}{4} = 1$$

Por tanto, el caso $n = 1$ está probado ya que,

$$\sum_{j=1}^1 j^3 = 1 = \frac{(1+1)^2 \cdot 1^2}{4}$$

- Probamos la hipótesis inductiva. Suponemos cierto el caso $n = k$, es decir,

$$\sum_{j=1}^k j^3 = \frac{(1+k)^2 \cdot k^2}{4},$$

- Y probamos el caso $j = k + 1$, es decir,

$$¿ \sum_{j=1}^{k+1} j^3 = \frac{(1+k+1)^2 \cdot (k+1)^2}{4} ? \Leftrightarrow ¿ \sum_{j=1}^{k+1} j^3 = \frac{(k+2)^2 \cdot (k+1)^2}{4} ?$$

Como,

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^3 = \sum_{j=1}^k j^3 + (k+1)^3$$

Aplicando la hipótesis inductiva,

$$\sum_{j=1}^{k+1} j^3 = \sum_{j=1}^k j^3 + (k+1)^3 = \frac{(1+k)^2 \cdot k^2}{4} + (k+1)^3$$

Operando,

$$\begin{aligned} \frac{(1+k)^2 \cdot k^2}{4} + (k+1)^3 &= \frac{(1+k)^2 \cdot k^2 + 4 \cdot (k+1)^3}{4} \\ &= \frac{(1+k)^2 \cdot (k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(1+k)^2 \cdot (k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, acabamos de probar el caso $j = k + 1$ y en ese caso, hemos demostrado la hipótesis inductiva.

La prueba de inducción queda completada y concluimos que ,

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \frac{(1+n)^2 \cdot n^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

2.(a) Dado el producto $x^2 \cdot \left(2x - \frac{1}{4x^3}\right)^{10}$ con $x \in \mathbb{R}$, calcular el coeficiente del sumando de grado 2 del resultado final de tal producto. (1 punto)

(b) La expansión binomial de $(1 + kx)^n$ viene dada en sus primeros términos por $1 + 12x + 28k^2x^2 + \dots$. Calcula razonadamente el valor de $k \in \mathbb{R}$ y el de $n \in \mathbb{N}$.

(1,5 puntos)

(a) Dado el producto $x^2 \cdot \left(2x - \frac{1}{4x^3}\right)^{10}$ con $x \in \mathbb{R}$, calcular el coeficiente del sumando de grado 2 del resultado final de tal producto.

Por el teorema del Binomio tenemos que,

$$\begin{aligned}\left(2x - \frac{1}{4x^3}\right)^{10} &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot (2x)^{10-k} \cdot \left(-\frac{1}{4x^3}\right)^k = \\&= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot (2)^{10-k} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot \frac{x^{10-k}}{x^{3k}} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot \frac{2^{10-k}}{2^{2k}} \cdot (-1)^k \cdot x^{10-4k} = \\&= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot 2^{10-3k} \cdot (-1)^k \cdot x^{10-4k}\end{aligned}$$

Al estar multiplicado el binomio anterior por x^2 , debemos buscar en el binomio aquel término con grado 0 (término independiente. Lo podemos encontrar haciendo,

$$10 - 4k = 0 \Leftrightarrow 10 = 4k \Leftrightarrow k = 2,5 \notin \mathbb{N}$$

En ese caso, como el valor encontrado no pertenece a los naturales, la expresión algebraica del enunciado no tiene grado 2 o, en su defecto, se puede decir que el coeficiente es 0.

(b) (1,5 puntos) La expansión binomial de $(1 + kx)^n$ viene dada en sus primeros términos por $1 + 12x + 28k^2x^2 + \dots$. Calcula razonadamente el valor de $k \in \mathbb{R}$ y el de $n \in \mathbb{N}$.

Por el teorema del Binomio tenemos que,

$$(1 + kx)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot 1^{n-j} \cdot (kx)^j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot k^j \cdot x^j$$

Si el término independiente de la expresión es 1 entonces, para $j = 0$ tendremos que,

$$\binom{n}{0} \cdot 1^{n-0} \cdot k^0 \cdot x^0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$$

Si el término de grado 1 de la expresión es $12x$ entonces, para $j = 1$ tendremos que,

$$\binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot k^1 \cdot x^1 = 12x \Leftrightarrow nk = 12$$

Si el término de grado 2 de la expresión es $28k^2x^2$ entonces, para $j = 2$ tendremos que,

$$\binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot k^2 \cdot x^2 = 28 \cdot k^2 \cdot x^2 \Leftrightarrow \binom{n}{2} = 28 \Leftrightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 28 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n \cdot (n-1)}{2} = 28 \Leftrightarrow n^2 - n = 56 \Leftrightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56)}}{2 \cdot 1} = \frac{+1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{+1 \pm \sqrt{225}}{2} =$$

$$= \frac{+1 \pm 15}{2} = \begin{cases} n = 8 \\ n = -7 \end{cases}$$

Como $n \in \mathbb{N}$ entonces $n = 8$ y, en ese caso, como $nk = 12$ entonces,

$$n \cdot k = 12 \Leftrightarrow 8k = 12 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2} = 1,5$$

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

3. En una convocatoria de exámenes de prueba, un alumno de un colegio tiene que hacer 18 exámenes, incluidos entre ellos el de Física, el de Química y el de Biología. Si puede elegir el orden de realización de todos los exámenes,

a) Halle el número de órdenes distintos en los que podría hacer los 18 exámenes.

(0,5 puntos)

b) Si el primer y último examen lo escoge de entre Física, el de Química y el de Biología, halle el número de órdenes distintos en los que podría hacer los 18 exámenes.

(1 punto)

c) Si no le está permitido hacer los tres exámenes seguidos (dos seguidos sí), halle el número de órdenes distintos en los que podría hacer los 18 exámenes. (1 punto)

a) Halle el número de órdenes distintos en los que podría hacer los 18 exámenes.

El total de posibilidades sin condición alguna es una permutación ya que cada posibilidad se diferencia en el orden y el número de exámenes y su orden de realización es igual. Por lo tanto, sin condiciones, tiene un total de $18!$ posibilidades de realización de los exámenes.

$$18! = 6,402373706 \cdot 10^{15} \text{ posibilidades}$$

b) Si el primer y último examen lo escoge de entre Física, el de Química y el de Biología, halle el número de órdenes distintos en los que podría hacer los 18 exámenes.

Elegimos primero los dos exámenes que harán al comienzo y al final. Para ello, como importa el orden, haremos una variación sin repetición de 3 elementos tomados de dos en dos,

$$V_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$$

El resto de exámenes, que son 16, podemos permutarlos como queramos por lo que el total de posibilidades pedido es,

$$V_{3,2} \cdot P_{16} = 6 \cdot 16! = 1,255357393 \cdot 10^{14} \text{ posibilidades}$$

c) Si no le está permitido hacer los tres exámenes seguidos, halle el número de órdenes distintos en los que podría hacer los 18 exámenes.

El total de posibilidades sin condición alguna es una permutación ya que cada posibilidad se diferencia en el orden y el número de exámenes y su orden de realización es igual. Por lo tanto, sin condiciones, tiene un total de $18!$ posibilidades de realización de los exámenes.

Vamos a contar ahora el número de posibilidades de hacer los tres exámenes juntos. Al ir los tres juntos, debemos calcular las posibilidades de permutación entre ellos tres que será $3!$ Posibilidades.

Por otra parte, podemos considerarlos como un solo elemento a permutar con los otros 15 exámenes y en ese caso, los modos de posición de estos 16 elementos vendrá dado por $16!$ Posibilidades. En tal caso, podrá hacer los tres exámenes juntos en un total de,

$$3! \cdot 16! \text{ posibilidades}$$

En tal caso, el número de órdenes distintos en los que podría hacer los 18 exámenes si no le está permitido hacer los tres exámenes seguidos es,

$$18! - 3! \cdot 16! = 6,276836966 \cdot 10^{15} \text{ posibilidades}$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

4. Resuelve los siguientes problemas,

- (a) Dado el polinomio $p(x) = x^2 + (k - 5)x + (k - 6)$, determinar, si existen, los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la gráfica del polinomio corta al eje OX . ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el polinomio tiene dos raíces distintas?, ¿para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ no tiene raíces? (1 punto)
- (b) Se sabe que el polinomio $q(x) = 4x^3 + 6x^2 + kx - 4$ tiene tres raíces reales y distintas. Sabiendo que el producto de dos de las tres raíces es 1, calcular la tercera raíz. A partir de esto, calcule el valor de k y el de las otras dos raíces. (1,5 puntos)

(a) (1 punto) Dado el polinomio $p(x) = x^2 + (k - 5)x + (k - 6)$, determinar, si existen, los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la gráfica del polinomio corta al eje OX . ¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ tiene dos raíces distintas?, ¿para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ no tiene raíces?

El polinomio $p(x)$ es cuadrático y su gráfica es una parábola.

- Para que el polinomio $p(x)$ corte al eje OX una sola vez debe suceder que tenga una raíz. Por tanto, el discriminante de la ecuación $p(x) = 0$ debe ser negativo. Por tanto,

$$\begin{aligned}\Delta = 0 &\Leftrightarrow (k - 5)^2 - 4 \cdot (k - 6) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k^3 - 10k + 25 - 4k + 24 = 0 \Leftrightarrow k^3 - 14k + 49 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49}}{2 \cdot 1} = \frac{+14 \pm \sqrt{196 - 196}}{2} = \frac{+14 \pm 0}{2} = 7\end{aligned}$$

En conclusión, para $k = 7$ el polinomio corta una sola vez al eje OX .

- Si queremos que tenga dos cortes con el eje, el discriminante de la ecuación $p(x) = 0$ debe ser positivo. Como

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (k - 7)^2 > 0$$

Por lo tanto, para cualquier valor real de k , el polinomio tendrá corte con el eje OX . Además, $\forall k \in \mathbb{R} - \{7\}$ tiene dos raíces reales.

- Si queremos que no tenga raíces entonces el discriminante de la ecuación $p(x) = 0$ debe ser negativo. Por tanto,

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (k - 7)^2 < 0$$

Pero eso es imposible. **Por tanto, no existen valores de k para los que no tenga raíces.**

En conclusión, $\nexists k \in \mathbb{R}$ para el que no tenga raíces.

(b) (1 punto) Se sabe que el polinomio $q(x) = 4x^3 + 6x^2 + kx - 4$ tiene tres raíces reales y distintas. Sabiendo que el producto de dos de las raíces es 1, calcula la tercera raíz. A partir de esto, calcula el valor de k y las otras dos raíces cuyo producto es 1.

Si las raíces del polinomio $q(x)$ son r_1, r_2 y r_3 , la factorización del polinomio $q(x)$ es,

$$q(x) = 4 \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3)$$

En ese caso, por las fórmulas CardanoVieta, el término independiente es,

$$4 \cdot (-r_1) \cdot (-r_2) \cdot (-r_3) = -4 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

Como el término independiente es -4 entonces,

$$-4r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = -4 \Leftrightarrow r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 1$$

Como se nos dice que el producto de dos de las tres raíces es 1 supongamos sin pérdida de generalidad que $r_1 \cdot r_2 = 1$. En ese caso, volviendo al producto de las tres raíces obtenemos que,

$$\left. \begin{array}{l} r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = 1 \\ r_1 \cdot r_2 = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow r_3 = 1$$

Sabiendo que una de las tres raíces es 1 entonces $q(1) = 0$ y en ese caso,

$$q(1) = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + k \cdot 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4 + 6 + k - 4 = 0 \Leftrightarrow k = -6$$

Para calcular las otras dos raíces, resolvemos $p(x) = 0$ por el método de Ruffini con aplicando la raíz $r_3 = 1$.

	+4	+6	-6	-4
+1		+4	+10	+4
	+4	+10	+4	0

Resolvemos ahora la ecuación,

$$4x^2 + 10x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

Operamos,

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, las raíces del polinomio $q(x)$ son $r_1 = -2$, $r_2 = -\frac{1}{2}$ y $r_3 = 1$ con $k = -6$.

LA WEB DEL
PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 1 punto]

5. (a) Dados $n, k \in \mathbb{R}$ con $n > k$ Demuestra la propiedad de los números combinatorios siguiente,

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \quad (0,25 \text{ puntos})$$

- (b) Dados $n, k \in \mathbb{R}$ con $n > k$, mediante la propiedad anterior de los números combinatorios, del triángulo Pascal-Tartaglia o del cualquier otro modo matemático, simplifica al máximo la siguiente operación,

$$\frac{\binom{n}{n-k} + \binom{n}{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} \quad (0,75 \text{ puntos})$$

- (a) Dados $n, k \in \mathbb{N}$ con $n > k$ Demuestra la propiedad de los números combinatorios siguiente,

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Simplemente escribiendo la definición de número combinatorio obtenemos la demostración.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

- (b) Dados $n, k \in \mathbb{N}$ con $n > k$, mediante la propiedad anterior, del triángulo Pascal-Tartaglia o del cualquier otro modo matemático, simplifica al máximo la siguiente operación,

$$\frac{\binom{n}{n-k} + \binom{n}{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}}$$

Dados $n, k \in \mathbb{N}$ con $n > k$, y aplicando el apartado anterior sobre el numerador que queremos,

$$\binom{n}{n-k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Mediante la propiedad de los números combinatorios (propiedad fundamental del triángulo Pascal-Tartaglia) tendremos que,

$$\binom{n}{n-k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Por lo tanto, volviendo a la expresión algebraica a simplificar al máximo,

$$\frac{\binom{n}{n-k} + \binom{n}{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} = \frac{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+1}{k+1}} = 1$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATHS