CUADERNO DE TRABAJO Nº1

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Entrega límite **MIÉRCOLES, 15 de OCTUBRE de 2025 (hora de inicio de clase)**

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de **10,25puntos.**
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$Nota\ def. =\ Notal\ total/(Días\ de\ retraso + 1)$$

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 3 puntos]

1.Demostrar por inducción las siguientes cuestiones,

$(a)(1\,punto)\displaystyle\sum_{j=0}^{n} j\,!\cdot j=(n+1)!-1\ ,\ \ \forall\, n\ \in \mathbb{N}$

$(b)(1\,punto)2^{2n}-3n-1\ es\ dividible\ entre\ 9,\ \ \forall\, n\ \in \mathbb{N}^{*}.$

$(c)(1\,punto)5^{k}<(k+5)!\,,\ \ \forall\, n\ \in \mathbb{N}.$

[Puntuación máxima: 2 puntos] (Análisis y Enfoques, Noviembre 2024, P2, Ej.2)

2.Resuelva las siguientes cuestiones,

(a) (0,5 puntos) Halle, sin utilizar la calculadora, coeficiente en x^3 del desarrollo de

$$\left(2x - \frac{5}{x}\right)^9.$$

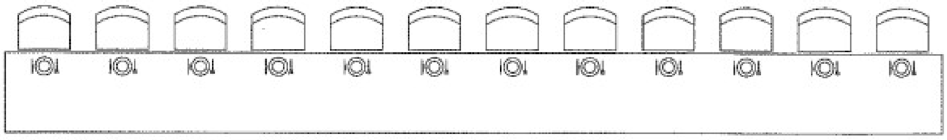
(b) (1 punto) Sabiendo que en el desarrollo de $(1+x)^n$ hay tres coeficientes de grados consecutivosa_{k-1}, a_k, a_{k+1} en progresión aritmética, demostrar que se cumple que:

$$n^2 + 4k^2 - 2 - n \cdot (4k+1) = 0$$

(0,5 puntos) A partir de esto, encontrar tres coeficientes consecutivos del desarrollo de $(1 + x)^{14}$ que formen una progresión aritmética.

[Puntuación máxima: 1 punto] **(Análisis y Enfoques, Noviembre 2024, P2, Ej.7)**

3. Un restaurante autoservicio especializado en sushi tiene una fila de 12 asientos disponibles, tal y como se muestra en la siguiente figura.



Anvi, Vanya y Parita deciden ir a comer a este restaurante.

(a) (0,5 puntos) Halle el número de maneras posibles en las que se pueden sentar en esta fila, suponiendo que deciden no sentarse juntos como un grupo de 3 y el resto de asientos no están ocupados.

Al día siguiente a Anvi, Vanya y Parita los acompañan 3 personas más en ese mismo restaurante y se sientan en la misma fila de 12 asientos disponibles. Anvi, Vanya y Parita deciden ahora sentarse uno junto a otro , como un grupo de 3.

(b) (0,5 puntos) Halle el número de maneras posibles en las que se pueden sentar estas 6 personas dentro de los 12 puestos si el resto no se ocupan.

[Puntuación máxima: 2 puntos]

4. Resuelve los siguientes problemas,

(a) Se deben seleccionar 4 estudiantes para formar un equipo para un concurso de matemáticas. Se pueden elegir entre 4 chicos y 8 chicas:

(a1) (0,25 puntos) ¿De cuantas maneras puede elegirse el equipo?

(a2)(0,25 puntos) ¿De cuántas maneras si el equipo debe incluir al menos un chico y una chica?

(a3)(0,5 puntos) ¿De cuántas si el equipo debe incluir al menos un chico y dos chicas?

(b) (1 punto) En un puesto de mando, y para trasmitir señales, hay en línea recta, cuatro astas; en cada asta solamente se puede colocar una bandera. Las señales consisten en colocar banderas de distintos colores en dichas astas. Según el número de banderas colocadas, colores de las mismas y lugar que ocupen, la señal será distinta. Hallar el número de señales que se pueden trasmitir si se posee un juego de siete banderas con los colores del arco iris.

[Puntuación máxima: 2,25 puntos] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2024, P3, Ej.2)**

5. Se consideran en todos los apartados siguientes las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ cuyos coeficientes a, b y c se generan al azar tirando un dado equilibrado de seis caras tres veces y tomando el valor que aparece en la cara superior del dado.

Por ejemplo, si al tirar el dado saliera un 2, un 3 y un 5, la función cuadrática resultante sería $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

(a) Determine cuántas funciones cuadráticas distintas se pueden generar utilizando este método. (0,25 puntos)

(b) El conjunto de coeficientes $a = 1, b = 4, c = 4$ se ha generado al azar para dar lugar a la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x + 4$. Muestre algebraicamente que la función cuadrática tiene solo una intersección con el eje x. (0,25 puntos)

(c) Considerando el discriminante, o de cualquier otro modo, muestre que la probabilidad de que el gráfico de una función cuadrática generada al azar de esta manera tenga solo una intersección con el eje x es igual a $5/216$. (0,5 puntos)

Considere ahora las funciones cuadráticas generadas al azar cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x.

(d) Considerando el discriminante, determine el conjunto de posibles valores del producto ac. (0,5 puntos)

(e) (i) Para el caso en el que $ac = 1$, muestre que existen cuatro funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x. (0,25 puntos)

(ii) Para el caso en el que $ac = 2$, determine, argumentando su respuesta matemáticamente, el número de funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x. (0,5 puntos)

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CUADERNO DE TRABAJO Nº 1

[Puntuación máxima: 3 puntos]

1.Demostrar por inducción las siguientes cuestiones,

$$(a)(1\ punto)\sum_{j=0}^{n} j\,!\cdot j=(n+1)!-1\ ,\ \ \forall\, n\ \in\mathbb{N}$$

$$(b)(1\ punto)2^{2n}-3n-1\ es\ dividible\ entre\ 9,\ \forall\, n\ \in\mathbb{N}^*.$$

$$(c)(1\ punto)5^{k}<(k+5)!\ ,\ \ \forall\, n\ \in\mathbb{N}.$$

$$\boldsymbol{(a)(1\ punto)\sum_{j=0}^{n} j\,!\cdot j=(n+1)!-1}\ ,\ \ \forall\, n\ \in\mathbb{N}$$

Probamos por inducción sobre $n\ \in\mathbb{N}$.

- Probamos el caso $j=0$, es decir,

$$¿\sum_{j=0}^{0} j\,!\cdot j=0!\cdot 0=(0+1)!-1\ ?$$

Como,

$$\sum_{j=0}^{0} j\,!\cdot j=0!\cdot 0=0$$

Y tenemos que,

$$(0+1)!-1=1!-1=1-1=0$$

Por tanto, el caso $j=0$ está probado ya que,

$$\sum_{j=0}^{0} j\,!\cdot j=0!\cdot 0=0=(0+1)!-1\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{j=0}^{0} j\,!\cdot j=0!\cdot 0=(0+1)!-1$$

- Probamos la hipótesis inductiva. Suponemos cierto el caso $j=k$, es decir,

$$\sum_{j=0}^{k} j\,!\cdot j=(k+1)!-1$$

- Y probamos el caso $j=k+1$, es decir,

$$¿\sum_{j=0}^{k+1} j\,!\cdot j=\big((k+1)+1\big)!-1\ ?\ \ \Leftrightarrow\ \ ¿\sum_{j=0}^{k+1} j\,!\cdot j=(k+2)!-1\ ?$$

Como,

$$\sum_{j=0}^{k+1} j\,¡\cdot j = \sum_{j=0}^{k} j\,¡\cdot j + (k+1)! \cdot (k+1)$$

Aplicando la hipótesis inductiva,

$$\sum_{j=0}^{k+1} j\,¡\cdot j = \sum_{j=0}^{k} j\,¡\cdot j + (k+1)! \cdot (k+1) = (k+1)! - 1 + (k+1)! \cdot (k+1)$$

Operando,

$$(k+1)! - 1 + (k+1)! \cdot (k+1) = (k+1)! \cdot (1 + k + 1) - 1 =$$

$$(k+1)! \cdot (k+2) - 1 = (k+2)! - 1$$

Por lo tanto, acabamos de probar el caso $j = k + 1$ y en ese caso, hemos demostrado la hipótesis inductiva.

La prueba de inducción queda completada y concluimos que ,

$$\sum_{j=0}^{n} j\,! \cdot j = (k+1)! - 1\,, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$(\boldsymbol{b})(\mathbf{1}\,\boldsymbol{punto})\mathbf{2}^{\mathbf{2}\boldsymbol{n}} - \mathbf{3}\boldsymbol{n} - \mathbf{1}\;\; \boldsymbol{es}\;\; \boldsymbol{divi dible}\;\; \boldsymbol{entre}\; \mathbf{9}$, $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$**.**

Probamos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$.

- Probamos el caso $n = 1$, es decir,

$$¿\, 2^{2\cdot 1} - 3 \cdot 1 - 1 \;\; es\; divisible\; entre\; 9\, ?$$

Como,

$$2^{2\cdot 1} - 3 \cdot 1 - 1 = 2^2 - 3 - 1 = 4 - 3 - 1 = 0$$

Y 0 es divisible entre cualquier naturaL, entonces el caso $k = 1$ está probado.

- Probamos la hipótesis inductiva. Suponemos cierto el caso $n = k$, es decir,

$$2^{2k} - 3 \cdot k - 1 \;\; es\; divisible\; entre\; 9 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, p \in \mathbb{N}\;,\;\; 2^{2k} - 3 \cdot k - 1 \; = 9p$$

Y probamos el caso $n = k + 1$, es decir,

$$¿\;\, 2^{2\cdot(k+1)} - 3 \cdot (k+1) - 1 \;\; es\; divisible\; entre\; 9? \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \;\; ¿\, \exists\, p' \in \mathbb{N}\;,\;\; 2^{2\cdot(k+1)} - 3 \cdot (k+1) - 1 \; = 9p'\, ?$$

Operando tenemos que,

$$2^{2\cdot(k+1)} - 3 \cdot (k+1) - 1 = 2^{2k+2} - 3k + 3 - 1 = 2^{2k} \cdot 4 - 3k + 2$$

Como,

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ ,\ 2^{2k} - 3\cdot k - 1 = 9p \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, p \in \mathbb{N}\ ,\ 2^{2k} = 9p + 3\cdot k + 1$$

Entonces, sustituyendo el equivalente a 2^{2k} en la expresión $2^{2k}\cdot 4 - 3k + 2$ tendremos que,

$$2^{2\cdot(k+1)} - 3\cdot(k+1) - 1 = 2^{2k}\cdot 4 - 3k - 3 - 1 = (9p + 3\cdot k + 1\,)\cdot 4 - 3k - 4$$

Operando,

$$(9p + 3\cdot k + 1\,)\cdot 4 - 3k - 4 = 36p + 12k + 4 - 3k - 4 =$$

$$= 36p + 9k = 9\cdot(4p + k)$$

Por lo tanto,

$$\exists\, p' \in \mathbb{N}\ ,\ 2^{2\cdot(k+1)} - 3\cdot(k+1) - 1 = 9p' \quad con$$

$$p' = 4p + k \ \text{ y } 2^{2k} = 9p + 3\cdot k + 1$$

Y acabamos de probar el caso $n = k + 1$ a partir del caso $n = k$ y en ese caso, hemos demostrado la hipótesis inductiva.

La prueba de inducción queda completada y concluimos que ,

$$2^{2n} - 3\cdot n - 1 \ \ es\ divisible\ entre\ 9\ ,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

$(c)(1\ punto)\, 5^k < (k+5)!\ ,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Probamos por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Aunque se puede comenzar con $n = 0$, y sería cierta la desigualdad, entenderemos que el caso primero es $n = 1$.

- Probamos el caso $n = 1$, es decir,

  $$¿\, 5^1 < (1+5)!\ ?$$

  Como, $5^1 = 5\ y\ (1+5)! = 6! = 720$ entonces,

  $$5^1 = 5 < 720 = (1+5)!$$

  Por tanto, el caso $k = 1$ está probado.

- Probamos la hipótesis inductiva. Suponemos cierto el caso $n = k$, es decir,

  $$5^k < (k+5)!$$

  Y probamos el caso $n = k + 1$, es decir,

  $$¿\ 5^{k+1} < \big((k+1)+5\big)!\ ? \quad \Leftrightarrow\ ¿\ 5^{k+1} < (k+6)!\ ?$$

Operando tenemos que,

$$5^{k+1} = 5^k \cdot 5$$

Como el caso $n = k$ es cierto entonces,

$$5^{k+1} = 5^k \cdot 5 < (k+5)! \cdot 5$$

Como, $k > 0$ entonces,

$$5 = 0 + 5 < k + 6$$

En ese caso,

$$5^{k+1} = 5^k \cdot 5 < (k+5)! \cdot 5 < (k+5)! \cdot (k+6) = (k+6)!$$

Por lo tanto,

$$5^{k+1} < (k+6)!$$

Y acabamos de probar el caso $n = k + 1$ a partir del caso $n = k$ y en ese caso, hemos demostrado la hipótesis inductiva.

La prueba de inducción queda completada y concluimos que ,

$$5^n < (n+5)! \ , \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

[Puntuación máxima: 2 puntos] (Análisis y Enfoques, Noviembre 2024, P2, Ej.2)

2.Resuelva las siguientes cuestiones,

(a) (0,5 puntos) Halle, sin utilizar la calculadora, coeficiente en x^3 del desarrollo de

$$\left(2x-\frac{5}{x}\right)^9.$$

(b) (1 punto) Sabiendo que en el desarrollo de $(1+x)^n$ hay tres coeficientes de grados consecutivosa_{k-1}, a_k, a_{k+1} en progresión aritmética, demostrar que se cumple que:

$$n^2+4k^2-2-n\cdot(4k+1)=0$$

(0,5 puntos) A partir de esto, encontrar tres coeficientes consecutivos del desarrollo de $(1\ +\ x)^{14}$ que formen una progresión aritmética.

(a) (1 punto) Halle, sin utilizar la calculadora, coeficiente en x^3 del desarrollo de $\left(2x-\frac{5}{x}\right)^9$.

Como,

$$(2x-5)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\cdot(2x)^{9-k}\cdot\left(-\frac{5}{x}\right)^k=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\cdot(2)^{9-k}\cdot(-5)^k\cdot\frac{x^{9-k}}{x^k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\cdot(2)^{9-k}\cdot(-5)^k\cdot x^{9-2k}=$$

El monomio de grado 1 lo podemos encontrar haciendo,

$$9-2k=3\quad\Leftrightarrow\quad 6=2k\quad\Leftrightarrow\quad 3=k$$

En ese caso, el coeficiente de grado 6 es,

$$\binom{9}{3}\cdot(2)^{9-3}\cdot(-5)^3=\frac{9!}{3!\cdot 6!}\cdot 2^6\cdot(-125)=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2}\cdot 64\cdot(-125)=$$

$$=84\cdot 64\cdot(-125)=-672\,000$$

(b) (1 punto) Sabiendo que en el desarrollo de $(1+x)^n$ hay tres coeficientes de grados consecutivos a_{k-1}, a_k, a_{k+1} en progresión aritmética, demostrar que se cumple que:

$$\boldsymbol{n^2+4k^2-2-n\cdot(4k+1)=0}$$

Como a_{k-1}, a_k, a_{k+1} entonces, $a_{k+1}-a_k = a_k-a_{k-1}$. En ese caso, sustituimos cada coeficiente por su valor en,

$$a_{k+1} - a_k = a_k - a_{k-1}$$

En ese caso,

$$\binom{n}{k+1} \cdot 1^{n-(k+1)} - \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} - \binom{n}{k-1} \cdot 1^{n-(k-1)}$$

Es decir, si $x \neq 0$, tendremos que,

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{k+1} - 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{k+1} - 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!} - \frac{2 \cdot n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-(k-1))!} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} - \frac{2}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{1}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(n-k) \cdot (n-k+1)}{(k+1)! \cdot (n-k+1)!} - \frac{2 \cdot (k+1) \cdot (n-k+1)}{k! \cdot (n-k+1)!} + \frac{k \cdot (k+1)}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (n-k) \cdot (n-k+1) - 2 \cdot (k+1) \cdot (n-k+1) + k \cdot (k+1) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 - nk + n - kn + k^2 - k - 2 \cdot (kn - k^2 + k + n - k + 1) + k^2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 - nk + n - kn + k^2 - k - 2kn + 2k^2 - 2k - 2n + 2k - 2 + k^2 + k = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 + 4k^2 - 2 - 4kn - n = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad n^2 + 4k^2 - 2 - n \cdot (4k+1) = 0$$

(0,5 puntos) A partir de esto, encontrar tres coeficientes consecutivos del desarrollo de $(1 + x)^{14}$ que formen una progresión aritmética.

Si $n = 14$ entonces debemos encontrar el valor k tal que,

$$14^2 + 4k^2 - 2 - 14 \cdot (4k+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 196 + 4k^2 - 2 - 56k - 14 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 - 14k + 45 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 45}}{2 \cdot 1} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 180}}{2} =$$

$$= \frac{14 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{14 \pm 4}{2} = \begin{cases} k = 9 \\ k = 5 \end{cases}$$

En ese caso, hay dos ternas de coeficientes que forman progresión aritmética, que son,

- $Si \ \ k = 9$ entonces los coeficientes consecutivos son a_8, a_9, a_{10} .

$$a_8 = \binom{14}{8} \cdot 1^{14-8} = 3003$$

$$a_9 = \binom{14}{9} \cdot 1^{14-9} = 2002$$

$$a_{10} = \binom{14}{10} \cdot 1^{14-10} = 1001$$

- $Si \ \ k = 5$ entonces los coeficientes consecutivos son a_4, a_5, a_6 .

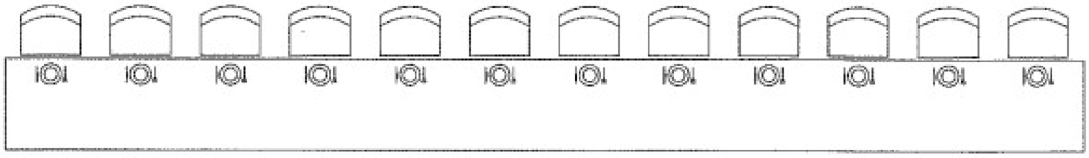
$$a_4 = \binom{14}{4} \cdot 1^{14-4} = 1001$$

$$a_5 = \binom{14}{5} \cdot 1^{14-5} = 2002$$

$$a_6 = \binom{14}{6} \cdot 1^{14-6} = 3003$$

[Puntuación máxima: 1 punto] **(Análisis y Enfoques, Noviembre 2024, P2, Ej.7)**

3. Un restaurante autoservicio especializado en sushi tiene una fila de 12 asientos disponibles, tal y como se muestra en la siguiente figura.



Anvi, Vanya y Parita deciden ir a comer a este restaurante.

(a) (0,5 puntos) Halle el número de maneras posibles en las que se pueden sentar en esta fila, suponiendo que deciden no sentarse juntos como un grupo de 3 y el resto de asientos no están ocupados.

Al día siguiente a Anvi, Vanya y Parita los acompañan 3 personas más en ese mismo restaurante y se sientan en la misma fila de 12 asientos disponibles. Anvi, Vanya y Parita deciden ahora sentarse uno junto a otro , como un grupo de 3.

(b) (0,5 puntos) Halle el número de maneras posibles en las que se pueden sentar estas 6 personas dentro de los 12 puestos si el resto no se ocupan.

(a) Halle el número de maneras posibles en las que se pueden sentar en esta fila, suponiendo que deciden no sentarse juntos como un grupo de 3.

Calculamos los casos en que se sientan juntos. En ese caso, podríamos considerarlos como un soloasiento a ocupar, habiendo 9asientos más. Por tanto, habrá que elegir 10 de los 10 asientos 1 y luego multiplicar por las permutaciones de los tres amigos. El resultado final es,

$$\binom{10}{1} \cdot 3! = 10 \cdot 6 = 60$$

Por lo tanto, el número de posibilidades en que no se sentaran juntos en grupo de 3 será la resta de elegir 3 asientos de entre 12 asientos posibles y restar las situaciones en las que se sientan como grupo de 3,

$$\binom{12}{3} \cdot 3! - 60 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} \cdot 3! - 60 = 1320 - 60 = 1260\, posibilidades$$

(b) Halle el número de maneras posibles en las que se pueden sentar estas 6 personas dentro de los 12 puestos.

Ya sabemos que el número de casos en los que se sientan Anvi, Vanya y Parita juntos en grupo de 3 es 60. Para sentar a los otros 3, elegimos los tres puestos de entre los 9 que quedan y permutamos a los tres. De este modo el resultado es,

$$60 \cdot \binom{9}{3} \cdot 3! = 60 \cdot \frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot 3! = 60 \cdot \frac{9!}{6!} = 60 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 30240\, posibilidades$$

[Puntuación máxima: 2 puntos]

4. Resuelve los siguientes problemas,

(a) Se deben seleccionar 4 estudiantes para formar un equipo para un concurso de matemáticas. Se pueden elegir entre 4 chicos y 8 chicas:

(a1) (0,25 puntos) ¿De cuantas maneras puede elegirse el equipo?

(a2)(0,25 puntos) ¿De cuántas maneras si el equipo debe incluir al menos un chico y una chica?

(a3)(0,5 puntos) ¿De cuántas si el equipo debe incluir al menos un chico y dos chicas?

(b) (1 punto) En un puesto de mando, y para trasmitir señales, hay en línea recta, cuatro astas; en cada asta solamente se puede colocar una bandera. Las señales consisten en colocar banderas de distintos colores en dichas astas. Según el número de banderas colocadas, colores de las mismas y lugar que ocupen, la señal será distinta. Hallar el número de señales que se pueden trasmitir si se posee un juego de siete banderas con los colores del arco iris.

(a) Se deben seleccionar 4 estudiantes para formar un equipo para un concurso de matemáticas. Se pueden elegir entre 4 chicos y 8 chicas:

(a1) (0,25 puntos) ¿De cuantas maneras puede elegirse el equipo?

Se trata de elegir de un conjunto de 12 personas un subconjunto de 4 personas sin que nos importe el orden de elección. Por ello, aplicamos una combinación,

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495 \, equipos$$

(a2) (0,25 puntos) ¿De cuántas si el equipo debe incluir al menos un chico y una chica?

Restamos del total de 495 equipos calculados en el apartado primero, los grupos que solo tienen chicos o solo tienen chicas. En ese caso, solo hay un grupo de chicos y los grupos solo de chicas se consiguen eligiendo de las 8 chicas, cuatro de ellas,

$$\binom{12}{4} - \binom{4}{4} - \binom{8}{4} = 495 - 1 - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 495 - 1 - 70 = 424 \, equipos$$

(a3) (0,5 puntos) ¿De cuántas si el equipo debe incluir al menos un chico y dos chicas?

Solo hay dos posibilidades para que pueda ocurrir esto. Que haya 1 chico y 3 chicas o que haya 2 chicos y 2 chicas. En ese caso, de los cuatro chicos elegimos uno y de las 8 chicas elegimos 3 y sumamos la elección de 2 chicos de entre 4 y de dos chicas de entre 8.

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{3} + \binom{4}{2} \cdot \binom{8}{2} = 4 \cdot 56 + 6 \cdot 28 = 224 + 168 = 392 \, equipos$$

(b) (1 punto) En un puesto de mando, y para trasmitir señales, hay en línea recta, cuatro astas; en cada asta solamente se puede colocar una bandera. Las señales consisten en colocar banderas de distintos colores en dichas astas. Según el número de banderas colocadas, colores de las mismas y lugar que ocupen, la señal será distinta. Hallar el número de señales que se pueden trasmitir si se posee un juego de siete banderas con los colores del arco iris.

Tenemos que dividir el recuento en función del número de banderas que hay colocadas. Estas podrían ser:

- 4 banderas: En ese caso, se trata de un recuento en que importa el orden de las 4 banderas y no puede haber repetición. Por tanto, el número de posibilidades es,

$$V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840 \; señales$$

- 3 banderas: En ese caso, se trata de un recuento en que importa el orden de las 3 banderas y no puede haber repetición. Hay que elegir primero el asta que se queda sin bandera. Por tanto, el número de posibilidades es,

$$C_{4,1} \cdot V_{7,3} = \binom{4}{1} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840 \; señales$$

- 2 banderas: En ese caso, se trata de un recuento en que importa el orden de las 2 banderas y no puede haber repetición. Hay que elegir primero las dos astas que se quedan sin bandera. Por tanto, el número de posibilidades es,

$$C_{4,2} \cdot V_{7,2} = \binom{4}{2} \cdot 7 \cdot 6 = 6 \cdot 42 = 252 \; señales$$

- 1 banderas: En ese caso, se trata de un recuento en que importa el orden de las 1 banderas y no puede haber repetición. Hay que elegir primero las tres astas que se quedan sin bandera. Por tanto, el número de posibilidades es,

$$C_{4,3} \cdot V_{7,1} = \binom{4}{3} \cdot 7 = 4 \cdot 7 = 28 \; señales$$

- 0 banderas: Solo hay una señal.

Por tanto, el número de mensajes en total es,

$$\mathbf{840 + 840 + 252 + 28 + 1 = 1961} \; \boldsymbol{señales}$$

[Puntuación máxima: 2,25 puntos] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2024, P3, Ej.2)**

5. Se consideran en todos los apartados siguientes las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ cuyos coeficientes a, b y c se generan al azar tirando un dado equilibrado de seis caras tres veces y tomando el valor que aparece en la cara superior del dado.

Por ejemplo, si al tirar el dado saliera un 2, un 3 y un 5, la función cuadrática resultante sería $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

(a) Determine cuántas funciones cuadráticas distintas se pueden generar utilizando este método. (0,25 puntos)

(b) El conjunto de coeficientes $a = 1, b = 4, c = 4$ se ha generado al azar para dar lugar a la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x + 4$. Muestre algebraicamente que la función cuadrática tiene solo una intersección con el eje x. (0,25 puntos)

(c) Considerando el discriminante, o de cualquier otro modo, muestre que la probabilidad de que el gráfico de una función cuadrática generada al azar de esta manera tenga solo una intersección con el eje x es igual a $5/216$. (0,5 puntos)

Considere ahora las funciones cuadráticas generadas al azar cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x.

(d) Considerando el discriminante, determine el conjunto de posibles valores del producto ac. (0,5 puntos)

(e) (i) Para el caso en el que $ac = 1$, muestre que existen cuatro funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x. (0,25 puntos)

(ii) Para el caso en el que $ac = 2$, determine, argumentando su respuesta matemáticamente, el número de funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x. (0,5 puntos)

(a) Determine cuántas funciones cuadráticas distintas se pueden generar utilizando este método. (0,25 puntos)

Se trata de contar cuántos tríos de números tomados desde el 1 hasta al 6 podemos formar en los que puede haber repetición e importa el orden de elección. Por todo ello, utilizamos las variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 6 en 6. El número de funciones cuadráticas será,

$$VR_{6,3} = 6^3 = 216 \text{ funciones cuadráticas}$$

(b) El conjunto de coeficientes $a = 1, b = 4, c = 4$ se ha generado al azar para dar lugar a la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x + 4$. Muestre algebraicamente que la función cuadrática tiene solo una intersección con el eje x. (0,25 puntos)

Comprobamos que la función cuadrática solo tiene una intersección con el eje x comprobando que el discriminante de la función cuadrática es cero $\Delta = 0$.

Operando con $a = 1, b = 4, c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

Por lo tanto, la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x + 4$ solo tiene una intersección con el eje x.

(c) Considerando el discriminante, o de cualquier otro modo, muestre que la probabilidad de que el gráfico de una función cuadrática generada al azar de esta manera tenga solo una intersección con el eje x es igual a $5/216$. (0,5 puntos)

Para calcular la probabilidad aplicaremos la regla de Laplace. En ese caso, debemos contar el número de funciones cuadráticas que tienen discriminante cero, es decir, cuántas de las funciones,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Les ocurre que su discriminante es nulo,

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 4ac$$

En ese caso, deberá ocurrir que al cuadriplicar el valor del producto ac debemos obtener un cuadrado perfecto menor o igual a 36.

Mediante la siguiente tabla conde para cada (a, c), calculamos $4ac$, señalamos en color aquellos productos que son un cuadrado perfecto menor o igual a 36.

a \ c	1	2	3	4	5	6
1	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**
2	**8**	**16**	**24**	**32**	**40**	**48**
3	**12**	**24**	**36**	**48**	**60**	**72**
4	**16**	**32**	**48**	**64**	**80**	**96**
5	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**	**120**
6	**24**	**48**	**72**	**96**	**120**	**144**

Por lo tanto,

$$P(Una\ sola\ intersección\ con\ eje\ x) = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{5}{216}$$

(d) Considerando el discriminante, determine el conjunto de posibles valores del producto ac. (0,5 puntos)

Como el discriminante debe ser positivo, tendremos que,

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 > 4ac \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^2}{4} > ac$$

Como $b^2 \in \{1,4,9,16,25,36\}$entonces $\frac{b^2}{4} \in \left\{\frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{5}, 9\right\}$.
En ese caso, $ac < 9$ y entonces, por tanteo,

$$ac \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}.$$

(e) (i) Para el caso en el que $ac = 1$, muestre que existen cuatro funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x. (0,25 puntos)

Si $ac = 1$ entonces $a = c = 1$. Además,

$$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 > 4 \quad \Leftrightarrow \quad b \in \{3,4,5,6\}$$

En ese caso,

- Si $b = 3$ entonces tendemos el polinomio$p_{1,3,1}(x) = x^2 + 3x + 1$
- Si $b = 4$ entonces tendemos el polinomio$p_{1,4,1}(x) = x^2 + 4x + 1$
- Si $b = 5$ entonces tendemos el polinomio$p_{1,5,1}(x) = x^2 + 5x + 1$
- Si $b = 6$ entonces tendemos el polinomio$p_{1,6,1}(x) = x^2 + 6x + 1$

(ii) Para el caso en el que $ac = 2$, determine, argumentando su respuesta matemáticamente, el número de funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x. (0,5 puntos)

Si $ac = 2$ entonces $a = 1 \ \ y \ \ c = 2$ o $a = 2 \ \ y \ \ c = 1$. Además,

$$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 8 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 > 8 \quad \Leftrightarrow \quad b \in \{3,4,5,6\}$$

En ese caso, hay ocho funciones cuadráticas:

- Si $b = 3$ entonces tendemos los polinomios

$$p_{1,3,2}(x) = x^2 + 3x + 2 \quad , \quad p_{2,3,1}(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

- Si $b = 4$ entonces tendemos los polinomios

$$p_{1,4,2}(x) = x^2 + 4x + 2 \quad , \quad p_{2,4,1}(x) = 2x^2 + 4x + 1$$

- Si $b = 5$ entonces tendemos los polinomios

$$p_{1,5,2}(x) = x^2 + 5x + 2 \quad , \quad p_{2,5,1}(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

- Si $b = 6$ entonces tendemos los polinomios

$$p_{1,6,2}(x) = x^2 + 6x + 2 \quad , \quad p_{2,6,1}(x) = 2x^2 + 6x + 1$$