UNIVERSIDADES PUBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID SIMULACRO PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 – Control 8 – Fecha 21/03/25 MATERIA: MATEMATICAS II	LA WEB DEL PROFE DE MATES lawebdelprofedemates.es

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
CALIFICACION: Cada bloque se calificara sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

1.1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & m & 2 \\ m & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide,

a) (0,5 puntos) Calcular los valores de $m \in \mathbb{R}$ para los cuales B no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $m = 1$, calcular la inversa de la matriz B .

c) (1 punto) Para $m = 0$, resolver algebraicamente la ecuación matricial $AX + B = A - X$.

1.2. Consideramos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Se pide,

a) (1,25 puntos) Encontrar los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los que la matriz B es inversible. En ese caso, encontrar los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $BCB^{-1} = A$.

b) (0,75 puntos) Calcular el determinante de la matriz $A \cdot A^t$.

c) (0,5 puntos) Resolver matricialmente el sistema $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

Bloque 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

2.1. Sea la función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$

a) (1,25 puntos) Calcular algebraicamente el área de la región delimitada por la función $f(x)$ su asíntota horizontal, calculando previamente dicha asíntota.

b) (1,25 puntos) Calcular el volumen de revolución generado por la función $f(x)$ al girar sobre el eje OX entre las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

2.2. Responda argumentando algebraicamente a las siguientes cuestiones:

a) (1,25 puntos) **<u>Elija una</u>** de las siguientes integrales indefinidas y calcule correctamente su primitiva,

$$a1) \int e^x \cdot sen(x)dx \qquad\qquad a2) \int \frac{x+1}{x^{\cdot 3} - 2x^2}dx$$

b) (1,25 puntos) Calcule el volumen de revolución que genera la función $f(x) = sen^{3/2}(x)$ al girar sobre el eje OX entre $x = 0$ y $x = \pi$.

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

3.1. Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el numero obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un numero par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

3.2. Se realizaron dos debates electorales, uno el lunes y otro el martes. Se hizo una encuesta a 1500 personas para estimar la audiencia, de las cuales: 1100 personas vieron el debate del lunes, 1000 vieron el debate del martes y 300 no vieron ninguno. Eligiendo al azar a uno de los encuestados:

a) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que viera solo uno de los dos debates.

b) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que al menos viera uno de los debates.

c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que viera los dos debates.

d) (0,25 puntos) Compruebe si los sucesos “Ver el debate el lunes” y “Ver el debate el martes” son independientes.

e) (0,75 puntos) Si vio el debate del lunes, calcule la probabilidad de que viera el del martes.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda la siguiente pregunta:

4.1. Lanzamos un dado equilibrado de seis caras, todas ellas numeradas con números distintos del 1 y hasta el 6 hasta que aparezca un 5. Sea la variable aleatoria X = “Número de veces que lanzamos el dado para que aparezca el primer 5”.

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que aparezca el primer cinco en el 2º lanzamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca el primer cinco en el 3er lanzamiento? ¿Cuál es la probabilidad de que el primer cinco aparezca en el k-ésimo lanzamiento?

b) (0,5 puntos) Sabiendo que el primer cinco salió después del 2º lanzamiento, calcular la probabilidad de que el primer cinco haya salido como máximo en el 4º lanzamiento.

c) (0,5 puntos) Sabiendo que para $|x| < 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$$

Derive respecto de x en la igualdad anterior simplificando al máximo el segundo miembro.

d) (0,75 puntos) A partir de lo anterior y argumentado algebraicamente, calcule el número esperado de veces que habrá que lanzar el dado para obtener el primer cinco.

SOLUCIONES A LOSPROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº 8 DE MATEMÁTICAS II

1.1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-2\\1&1&-1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&0&4\\1&m&2\\m&2&1\end{pmatrix}$. Se pide,

a) (0,5 puntos) Calcular los valores de $m\in\mathbb{R}$ para los cuales B no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $m=1$, calcular la inversa de la matriz B .

c) (1 punto) Para $m=0$, resolver algebraicamente la ecuación matricial $AX+B=A-X$.

Solución

a) (0,5 puntos) Calcular los valores de $m\in\mathbb{R}$ para los cuales B no tiene inversa.

Calculamos el determinante de B,

$$\begin{vmatrix}0&0&4\\1&m&2\\m&2&1\end{vmatrix}=0+8+0-4m^2-0-0=8-4m^2$$

Igualamos a cero y obtenemos los valores para los que no existe inversa de B.

$$8-4m^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 8=4m^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2=m^2 \quad\Leftrightarrow\quad m=\pm\sqrt{2}$$

Por tanto, los valores para los cuáles no tiene inversa la matriz B son,

$$m=-\sqrt{2}\quad,\quad m=+\sqrt{2}$$

b) (1 punto) Para $m=1$, calcular la inversa de la matriz B .

Para $m=1$,

$$B=\begin{pmatrix}0&0&4\\1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$$

Y su determinante es,

$$|B|=8-4\cdot 1^2=8-4=4\neq 0$$

Por tanto, tiene inversa. Su inversa viene dada por,

$$B^{-1}=\frac{Adj(B^t)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&2\\4&2&1\end{pmatrix}}{4}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-3&8&-4\\1&-4&4\\1&0&0\end{pmatrix}}{4}=\begin{pmatrix}-3/4&2&-1\\1/4&-1&1\\1/4&0&0\end{pmatrix}$$

c) (1 punto) Para $m=2$, resolver algebraicamente la ecuación matricial $AX+B=A-X$.

Resolvemos,

$$AX+B=A-X \quad\Leftrightarrow\quad AX+X=A-B \quad\Leftrightarrow\quad (A+I)\cdot X=A-B \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad (A+I)^{-1}\cdot(A+I)\cdot X=(A+I)^{-1}\cdot(A-B)$$
$$\Leftrightarrow\quad I\cdot X=(A+I)^{-1}\cdot(A-B) \quad\Leftrightarrow\quad X=(A+I)^{-1}\cdot(A-B)$$

Para $m = 0$ tendremos que,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por un lado,

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado,

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y su determinante es,

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 - 2 - 1 + 4 - 0 = 2$$

Calculamos la inversa de $A + I$,

$$(A + I)^{-1} = \frac{Adj((A + I)^t)}{|A + I|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$X = (A + I)^{-1} \cdot (A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ -1 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & -2 \\ 3/2 & -7/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Consideramos las matrices reales $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix}b & 2b & b\\ 2b & 3b & b\\ b & b & b\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$**. Se pide,**

a) (1,25 puntos) Encontrar los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los que la matriz B es inversible. En ese caso, encontrar los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $BCB^{-1}=A$.

b) (0,75 puntos) Calcular el determinante de la matriz $A \cdot A^t$.

c) (0,5 puntos) Resolver matricialmente el sistema $B \cdot \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ para $b=1$.

Solución

a) (1,25 puntos) Encontrar los valores de $b \in \mathbb{R}$ para los que se verifica que $BCB^{-1}=A$.

Como,

$$|B|=b^3 \cdot \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=b^3 \cdot (3+2+2-3-1-4)=-b^3$$

Por lo tanto, si $b \neq 0$ la matriz B es inversible.

En esta situación, si $BCB^{-1}=A$ entonces

$$BCB^{-1}=A \quad \Leftrightarrow \quad BCB^{-1}\cdot B=A\cdot B \quad \Leftrightarrow \quad BC\cdot I=AB \quad \Leftrightarrow \quad BC\cdot I=AB$$

Como

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}b & 2b & b\\ 2b & 3b & b\\ b & b & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=b\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=b\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 4 & 6 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b & 2b & b\\ 2b & 3b & b\\ b & b & b\end{pmatrix}=b\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$b\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 4 & 6 & 3\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, para $b \neq 0$ se da la igualdad.

b) (0,75 puntos) Calcular el determinante de la matriz $A \cdot A^t$.

Como el determinante de A es,

$$|A| = 9 - 1 - 1 - 1 + 3 + 3 = 12$$

Y sabemos que $|A^t| = |A|$ entonces,

$$|A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A|^2 = 12^2 = 144$$

c) (0,5 puntos) Resolver matricialmente el sistema $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

Como,

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B^{-1} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa de la matriz B para $b = 1$.

Como, por el apartado a),

$$|B| = -b^3$$

Entonces para $b = 1$,

$$|B| = -1$$

En ese caso,

$$B^{-1} = \frac{Adj(B^t)}{|B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En ese caso,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.1. Sea la función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$

a) (1,25 puntos) Calcular algebraicamente el área de la región delimitada por la función $f(x)$ su asíntota horizontal, calculando previamente dicha asíntota.

b) (1,25 puntos) Calcular el volumen de revolución generado por la función $f(x)$ al girar sobre el eje OX entre las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

Solución

a) (1,25 puntos) Calcular algebraicamente el área de la región delimitada por la función $f(x)$ su asíntota horizontal, calculando previamente dicha asíntota.

$$f(-x) = \frac{|-x|}{\sqrt{(-x)^2+4}} = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}} = f(x)$$

Calculamos su asíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Entonces la asíntota horizontal es $y = 1$.

Como

$$f(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \sqrt{x^2+4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = x^2+4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 4$$

Entonces la asíntota y la función no se cortan.

Además, como,

$$f(0) = 0 < 1$$

La función siempre está por debajo de la asíntota. En ese caso, el área vendrá dada por,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right) dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{+\infty} \left(1 - x \cdot (x^2+4)^{-1/2}\right) dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{2x}{2} \cdot (x^2+4)^{-1/2}\right) dx =$$

$$= 2 \cdot \left[x - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+4)^{+1/2}}{1/2}\right]_0^{+\infty} = 2 \cdot \left[x - \sqrt{x^2+4}\,\right]_0^{+\infty} =$$

$$= 2 \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2+4}\right) - \left(0 - \sqrt{0^2+4}\right)\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2+4}\right) \cdot \left(x + \sqrt{x^2+4}\right)}{x + \sqrt{x^2+4}} + 2\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 - 4}{x + \sqrt{x^2+4}} + 2\right) = 2 \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{-4}{x + \sqrt{x^2+4}} + 2\right) = 2 \cdot (0+2) = 4\,u^2$$

b) (1,25 puntos) Calcular el volumen de revolución generado por la función $f(x)$ al girar sobre el eje OX entre las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

El volumen vendrá dado por la integral,

$$V = \pi \cdot \int_{-2}^{+2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-2}^{+2} \frac{x^2}{x^2+4}\, dx$$

Dividimos el numerador entre el denominador,

$$= \pi \cdot \int_{-2}^{+\sqrt{3}} 1 - \frac{4}{x^2+4}\, dx = \pi \cdot \left(\int_{-\sqrt{3}}^{+2} 1dx - \int_{-2}^{+2} \frac{4}{x^2+4}\, dx\right) =$$

$$= \pi \cdot \left(\int_{-2}^{+2} 1dx - \int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} \frac{1}{1+\frac{x^2}{4^2}}\, dx\right) = \pi \cdot \left(\int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} 1dx - \int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx\right) =$$

$$= \pi \cdot \left(\int_{-2}^{+2} 1dx - 2 \cdot \int_{-2}^{+2} \frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx\right) = \pi \cdot \left([x]_{-2}^{+2} - 2 \cdot \left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{+2}\right) =$$

$$= \pi \cdot \left(2 + 2 - 2 \cdot \arctan\left(\frac{2}{2}\right) + 2 \cdot \arctan\left(\frac{-2}{2}\right)\right) =$$

$$= \pi \cdot \left(4 - \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \pi \cdot (4 - \pi)\, u^3 \approx 0{,}8504\, u^3$$

2.2. Responda argumentando algebraicamente a las siguientes cuestiones:

a) (1,25 puntos) Elija una de las siguientes integrales indefinidas y calcule correctamente una primitiva,

$$\boldsymbol{a1)} \quad \int e^x \cdot sen(x) dx \qquad\qquad \boldsymbol{a2)} \quad \int \frac{x+1}{x^{\cdot 3} - 2x^2} dx$$

b) (1,25 puntos) Calcule el volumen de revolución que genera la función $f(x) = sen^{3/2}(x)$ al girar sobre el eje OX entre $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución

a) (1,25 puntos) Elija una de las siguientes integrales indefinidas y calcule correctamente una primitiva,

$$\boldsymbol{a)} \quad \int e^x \cdot sen(x) dx$$

Aplicamos integración por partes,

$$u = e^x \qquad\qquad du = e^x dx$$
$$dv = sen(x)dx \qquad v = \int sen(x)dx = -\cos(x)$$

Por lo tanto,

$$\int e^x \cdot sen(x)dx = -e^x \cdot cos(x) + \int e^x \cdot cos(x)dx \quad (1)$$

Volvemos a aplicar integración por partes sobre la integral que aparece,

$$u = e^x \qquad du = e^x dx$$
$$dv = cos(x)dx \qquad v = \int cos(x)dx = \text{sen}(x)$$

Por lo tanto,

$$\int e^x \cdot cos(x)dx = e^x \cdot sen(x) - \int e^x \cdot sen(x)dx$$

Entonces, sustituyendo este resultado en (1) obtenemos,

$$\int e^x \cdot sen(x)dx = -e^x \cdot cos(x) + \int e^x \cdot cos(x)dx \iff$$

$$\iff \int e^x \cdot sen(x)dx = -e^x \cdot cos(x) + e^x \cdot sen(x) - \int e^x \cdot sen(x)dx \iff$$

Despejamos la integral pedida según,

$$\iff 2 \cdot \int e^x \cdot sen(x)dx = -e^x \cdot cos(x) + e^x \cdot sen(x) \iff$$

$$\iff \int e^x \cdot sen(x)dx = \frac{-e^x \cdot cos(x) + e^x \cdot sen(x)}{2} + K$$

$\boldsymbol{a2)}$ $\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{x^3 - 2x^2}} \boldsymbol{dx}$

Se trata de una integral de una fracción algebraica con grado del numerador menor que el del denominador. Por lo tanto, vamos a aplicar el método de descomposición en fracciones simples. Para ello factorizamos el denominador según,

$$x^3 - 2x^2 = x^2 \cdot (x-2)$$

Descomponemos en fracciones simples según,

$$\frac{x+1}{x^2 \cdot (x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

En ese caso,

$$x + 1 = A \cdot x \cdot (x-2) + B \cdot (x-2) + C \cdot x^2$$

Damos valores para obtener los valores de A, B y C,

- **Si $x = 0$ entonces**

$$0 + 1 = A \cdot 0 \cdot (0 - 2) + B \cdot (0 - 2) + C \cdot 0^2 \quad \Leftrightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$$

- **Si $x = 2$ entonces**

$$2 + 1 = A \cdot 2 \cdot (2 - 2) + B \cdot (2 - 2) + C \cdot 2^2 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{3}{4}$$

- **Si $x = 1$ entonces**

$$1 + 1 = A \cdot 1 \cdot (1 - 2) - \frac{1}{2} \cdot (1 - 2) + \frac{3}{4} \cdot 1^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$2 = -A + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - 2 = -\frac{3}{4}$$

Por lo tanto,

$$\frac{x+1}{x^2 \cdot (x-2)} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-2}$$

Y en ese caso,

$$\int \frac{x+1}{x^2 \cdot (x-2)} = -\frac{3}{4} \cdot \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x^2} dx + \frac{3}{4} \cdot \int \frac{1}{x-2} dx =$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot \ln|x| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{3}{4} \cdot \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|^{3/4} + \frac{1}{2x} + C$$

b) (1,25 puntos) Calcule el volumen de revolución que genera la función $f(x) = sen^{3/2}(x)$ al girar sobre el eje OX entre $x = 0$ y $x = \pi$.

El volumen pedido viene dado por,

$$V = \pi \cdot \int_0^\pi \left(sen^{3/2}(x)\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^\pi sen^3(x)\, dx$$

Aplicamos una transformación trigonométrica según,

$$\pi \cdot \int_0^\pi sen^3(x)\, dx = \pi \cdot \int_0^\pi sen^2(x) \cdot sen(x)\, dx = \pi \cdot \int_0^\pi \left(1 - cos^2(x)\right) \cdot sen(x)\, dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\int_0^\pi sen(x)\, dx - \int_0^\pi \cos^2 x \cdot sen(x)\, dx\right) = \pi \cdot \left[-\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3}\right]_0^\pi =$$

$$= \pi \cdot \left(-\cos(\pi) + \frac{\cos^3(\pi)}{3} - \left(-\cos(0) + \frac{\cos^3(0)}{3}\right)\right) = \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}\ u^2$$

3.1. Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el numero obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:´

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un numero par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

Solución

Establecemos las sumas que se realizarían en función del número de cada dado.

		Dado rojo					
		1	2	3	4	5	6
Dado azul	1	2	3	4	5	6	7
	2	4	6	8	10	12	14
	3	4	5	6	7	8	9
	4	6	8	10	12	14	16
	5	6	7	8	9	10	11
	6	8	10	12	14	16	18

Sea la variable aleatoria $X = \text{Suma obtenida}$.

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

Si se trata de calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10, entonces calcularemos la probabilidad de que $X = 10$. En función de la tabla anterior tendremos que,

$$P(X = 10) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0,\widehat{1}$$

Sea ahora el suceso $A = "La\ suma\ es\ impar"$. Se trata ahora de calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar. En ese caso la probabilidad vendrá dada por,

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \approx 0,25$$

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un numero par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

Sea el suceso $B=$ "$Se\ obtiene\ puntuación\ par\ en\ el\ dado\ azul$". Se trata de calcular la probabilidad condicionada siguiente,

$$P(B/X=8)=\frac{P(B\cap\{X=8\})}{P(X=8)}=\frac{3/36}{5/36}=\frac{3}{5}=0{,}6$$

Sea ahora el suceso $C=$ "$Se\ obtiene\ puntuación\ impar\ en\ el\ dado\ rojo$". Se trata de calcular la probabilidad condicionada siguiente,

$$P(C/A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{18/36}{27/36}=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}=0,\hat{6}$$

(Calificación máxima: 2,5 puntos) **(Matemáticas II, Extremadura Septiembre 2010)**

3.2. Se realizaron dos debates electorales, uno el lunes y otro el martes. Se hizo una encuesta a 1500 personas para estimar la audiencia, de las cuales: 1100 personas vieron el debate del lunes, 1000 vieron el debate del martes y 300 no vieron ninguno. Eligiendo al azar a uno de los encuestados:

a) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que viera solo uno de los dos debates.

b) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que al menos viera uno de los debates.

c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que viera los dos debates.

d) (0,25 puntos) Compruebe si los sucesos "Ver el debate el lunes" y "Ver el debate el martes" son independientes.

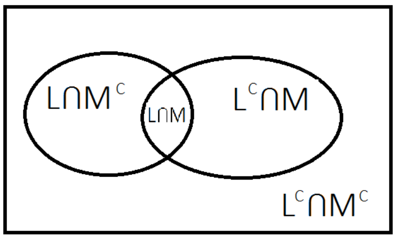
e) (0,75 puntos) Si vio el debate del lunes, calcule la probabilidad de que viera el del martes.

Solución

Consideremos los sucesos,

$$L=\text{"Ve el debate del lunes"} \qquad ; \qquad M=\text{"}Ve\ el\ debate\ del\ Martes\text{"}$$

Los sucesos podrían representarse con el siguiente diagrama de Venn,



En ese caso, y según los datos del enunciado,

$$P(L^c\cap M^c)=\frac{300}{1500}=\frac{1}{5}$$

Y por tanto,

$P(L \cup M) = P((L^c \cap M^c)^c) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$Como

$$P(L) = \frac{1100}{1500} = \frac{11}{15} \quad y \quad P(M) = \frac{1000}{1500} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Entonces,

$$P(L \cap M^c) = P(L \cup M) - P(M) = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12 - 10}{15} = \frac{2}{15}$$

$$P(L^c \cap M) = P(L \cup M) - P(L) = \frac{4}{5} - \frac{11}{15} = \frac{12 - 11}{15} = \frac{1}{15}$$

a) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que viera solo uno de los dos debates.

La probabilidad de que viera solo un debate es,

$$P\big((L \cap M^c) \cup (L^c \cap M)\big) = P(L \cap M^c) + P(L^c \cap M) = \frac{2}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

b) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que al menos viera uno de los debates.

La probabilidad de que viera solo un debate es,

$$P(L \cup M) = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad de que viera los dos debates.

La probabilidad de que viera los dos debates es,

$$P(L \cap M) = P(L \cup M) - P(L \cap M^c) - P(L^c \cap M) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

d) (0,25 puntos) Compruebe si los sucesos "Ver el debate el lunes" y "Ver el debate el martes" son independientes.

Serán independientes si,

$$P(L \cap M) = P(L) \cdot P(M)$$

Como,

$$P(L) \cdot P(M) = \frac{11}{15} \cdot \frac{2}{3} = \frac{22}{45} = 0{,}4\hat{8} \neq 0{,}6 = P(L \cap M)$$

Por tanto, los sucesos no son independientes.

e) (0,75 puntos) Si vio el debate del lunes, calcule la probabilidad de que viera el del martes.

Se trata de una probabilidad condicionada,

$$P(M/L) = \frac{P(L \cap M)}{P(L)} = \frac{3/5}{11/15} = \frac{45}{55} = \frac{9}{11} \approx 0,\widehat{81}$$

4.1. Lanzamos un dado equilibrado de seis caras, todas ellas numeradas con números distintos del 1 y hasta el 6 hasta que aparezca un 5. Sea la variable aleatoria X = "Número de veces que lanzamos el dado para que aparezca el primer 5".

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que aparezca el primer cinco en el 2º lanzamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca el primer cinco en el 3er lanzamiento? ¿Cuál es la probabilidad de que el primer cinco aparezca en el k-ésimo lanzamiento?

b) (0,5 puntos) Sabiendo que el primer cinco salió después del 2º lanzamiento, calcular la probabilidad de que el primer cinco haya salido como máximo en el 4º lanzamiento.

c) (0,5 puntos) Sabiendo que para $|x| < 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$$

Derive respecto de x en la igualdad anterior simplificando al máximo el segundo miembro.

d) (0,75 puntos) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo correcto y argumentado algebraicamente, calcule el número esperado de veces que habrá que lanzar el dado para obtener el primer cinco.

Solución

a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que aparezca el primer cinco en el 2º lanzamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca el primer cinco en el 3er lanzamiento? ¿Cuál es la probabilidad de que el primer cinco aparezca en el k-ésimo lanzamiento?

La probabilidad de que aparezca el primer 5 en el segundo lanzamiento es la probabilidad de $X = 2$. La calculamos,

$$P(X=2) = \left(\frac{5}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}$$

La probabilidad de que aparezca el primer 5 en el tercer lanzamiento es la probabilidad de $X = 3$. La calculamos,

$$P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{216}$$

La probabilidad de que aparezca el primer 5 en el k-ésimo lanzamiento es la probabilidad de $X = k$. La calculamos,

$$P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5^{k-1}}{6^k}$$

b) (0,5 puntos) Sabiendo que el primer cinco salió después del 2º lanzamiento, calcular la probabilidad de que el primer cinco haya salido como máximo en el 4º lanzamiento.

Se trata de calcular la probabilidad condicionada,

$$P(x \leq 4/X > 2) = \frac{P(2 < X \leq 4)}{P(X > 2)} = \frac{P(X = 3) + P(X = 4)}{1 - P(X \leq 2)} =$$

$$= \frac{P(X = 3) + P(X = 4)}{1 - P(X = 1) - P(X = 2)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}} =$$

$$= \frac{\frac{25}{216} + \frac{125}{1296}}{1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{36}} = \frac{\frac{150}{1296} + \frac{125}{1296}}{\frac{36}{36} - \frac{6}{36} - \frac{5}{36}} = \frac{\frac{275}{1296}}{\frac{25}{36}} = \frac{275}{36 \cdot 25} = \frac{275}{900} = \frac{11}{36} \approx 0{,}30\hat{5}$$

c) (0,5 puntos) Sabiendo la fórmula de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón x con $|x| < 1$, que es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1 - x}$$

derive respecto de x en la igualdad anterior simplificando al máximo el segundo miembro.

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1 - x} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1 \cdot (1 - x) - x \cdot (-1)}{(1 - x)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1 - x) - x \cdot (-1)}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

d) (0,75 puntos) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo correcto y argumentado algebraicamente, calcule el número esperado de veces que habrá que lanzar el dado para obtener el primer cinco.

La esperanza de la variable X es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} =$$

Aplicando el resultado del apartado anterior con x = $x = \frac{5}{6}$ tendremos que,

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 6\ lanzamientos$$