Micro Examen Matemáticas II **Fecha: J20/02/25** **Curso 2024-2025**

Nombre y apellidos:____

lawebdelprofedemates.es

Ejercicios

1. Se lanzan dos dados cúbicos con valores de un valor distinto entre el 1 a 6 en cada una de sus caras. Uno de los dados es azul y el otro rojo. Se considera la variable X que hace lo siguiente:

   - Si el dado azul es impar, suma el triple de su puntuación con la del dado rojo
   - Si el dado azul es par, suma las puntuaciones de los dos dados sin más.

   Se lanzan 50 veces dos dados, uno azul y otro rojo en las condiciones impuestas. Se obtienen las siguientes frecuencias absolutas de las sumas de los dos dados que han aparecido en los 50 lanzamientos pero … hemos perdido algunas frecuencias.

X	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F	2		7		6		7		5	

X	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
F	3		1							

   a) ¿Se puede estimar que, con solo esos 50 datos, los dados son equilibrados según un modelo de correlación lineal? Para ello, haga las operaciones pertinentes para comparar linealmente el modelo probabilístico con el modelo frecuencial y razone su respuesta mediante tal modelo de correlación lineal. (2,5 puntos)

   b) Si, según su estudio de correlación, los dados fueran equilibrados, ¿Qué estimación de aparición según el modelo de regresión correspondiente deberían tener cada una de las sumas pares de esos 50 lanzamientos? Aproxime las estimaciones mediante regresión lineal a un número lógico dentro del experimento que se realiza (número natural) teniendo en cuenta que se lanzaron 50 veces los dados. (2,5 puntos)

2. Resuelve algebraicamente la integral, (2,5 puntos)

$$\int_1^2 \frac{2dx}{x^3+2x^2+x}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x^2-3x-2}$$

Soluciones

1. Se lanzan dos dados cúbicos con valores de un valor distinto entre el 1 a 6 en cada una de sus caras. Uno de los dados es azul y el otro rojo. Se considera la variable X que hace lo siguiente:

- **Si el dado azul es impar, suma el triple de su puntuación con la del dado rojo**
- **Si el dado azul es par, suma las puntuaciones de los dos dados sin más.**

Se lanzan 50 veces dos dados, uno azul y otro rojo en las condiciones impuestas. Se obtienen las siguientes frecuencias absolutas de las sumas de los dos dados que han aparecido en los 50 lanzamientos pero … hemos perdido algunas frecuencias.

X	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F	2		7		6		7		5	

X	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
F	3		1							

a) ¿Se puede estimar que, con solo esos 50 datos, los dados son equilibrados según un modelo de correlación lineal? Para ello, haga las operaciones pertinentes para comparar linealmente el modelo probabilístico con el modelo frecuencial y razone su respuesta mediante tal modelo de correlación lineal. (2,5 puntos)

Mediante la siguiente tabla de doble entrada podemos calcular todas las sumas X de los dos dados,

	Dado rojo						
	X suma	1	2	3	4	5	6
Dado azul	1	4	5	6	7	8	9
	2	3	4	5	6	7	8
	3	10	11	12	13	14	15
	4	5	6	7	8	9	10
	5	16	17	18	19	20	21
	6	7	8	9	10	11	12

Por lo tanto, las probabilidades de las distintas sumas son,

$P(3)=\frac{1}{36}$	$P(4)=\frac{2}{36}$	$P(5)=\frac{3}{36}$	$P(6)=\frac{3}{36}$	$P(7)=\frac{4}{36}$	$P(8)=\frac{4}{36}$
$P(9)=\frac{3}{36}$	$P(10)=\frac{3}{36}$	$P(11)=\frac{2}{36}$	$P(12)=\frac{2}{36}$	$P(13)=\frac{1}{36}$	$P(14)=\frac{1}{36}$
$P(15)=\frac{1}{36}$	$P(16)=\frac{1}{36}$	$P(17)=\frac{1}{36}$	$P(18)=\frac{1}{36}$	$P(19)=\frac{1}{36}$	$P(20)=\frac{1}{36}$
$P(21)=\frac{1}{36}$					

En ese caso, si hacemos una correlación entre las probabilidades y las frecuencias de los valores que tenemos,

X	3	5	7	9	11	13	15
Probabilidades (P)	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
Frecuencias relativas (F)	$\frac{2}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{5}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{1}{50}$

Obtenemos como coeficiente de correlación lineal y como coeficiente de determinación,

Coeficiente de correlación lineal de Pearson	$r=0{,}876$
Coeficiente de determinación	$r^2=0{,}767$

Al ser ambos valores próximos a 1 pero no lo suficiente podemos decir que hay cierta posibilidad de que los dados sean equilibrados pero no se considera una posibilidad (correlación) fuerte. Las estimaciones que se pudieran derivar de esta correlación pueden inducir con bastante posibilidad a error.

También existe la posibilidad de que, aun siendo los dados equilibrados, el número de lanzamientos de los dados sea lo suficientemente bajo como para que la correlación no sea fuerte.

b) Si, según su estudio de correlación, los dados fueran equilibrados, ¿Qué estimación de aparición según el modelo de regresión correspondiente deberían tener cada una de las sumas pares de esos 50 lanzamientos? Aproxime las estimaciones mediante regresión lineal a un número lógico dentro del experimento que se realiza (número natural) teniendo en cuenta que se lanzaron 50 veces los dados. (2,5 puntos)

Volviendo a repetir que esta estimación no es muy fiable, hacemos la estimación pedida utilizando la recta de regresión

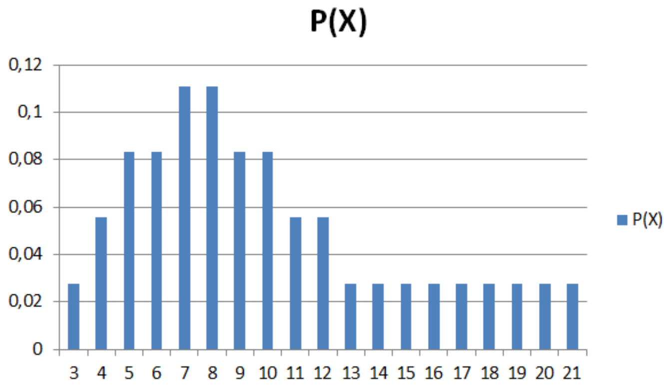
$$F = 1{,}26580645 \cdot P + 0{,}0132258$$

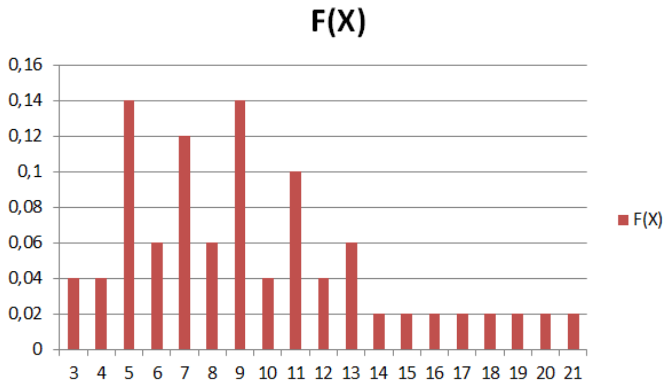
podríamos tener una cierta estimación de la frecuencia relativa de cada suma par. Si a esta la multiplicamos por 50, obtendríamos la estimación del número de veces que ha aparecido tal suma. Lo aproximamos a cifra natural en función de que la suma de todas las frecuencias absolutas debe ser 50 y como conocemos 31, nos faltan 19 por estimar.

X	P(X)	Frecuencia estimada	Valor estimado en 50 lanzamientos	Aproximación número de sumas en 50 lanzamientos sobre 19	Estimación número de sumas sobre 21
4	0,05555556	0,08354838	4,177419028	1,769507387	2
6	0,08333333	0,11870967	5,935483542	2,514203604	3
8	0,11111111	0,15387096	7,693548056	3,258899821	3
10	0,08333333	0,11870967	5,935483542	2,514203604	2
12	0,05555556	0,08354838	4,177419028	1,769507387	2
14	0,02777778	0,04838709	2,419354514	1,024811171	1
16	0,02777778	0,04838709	2,419354514	1,024811171	1
17	0,02777778	0,04838709	2,419354514	1,024811171	1
18	0,02777778	0,04838709	2,419354514	1,024811171	1
19	0,02777778	0,04838709	2,419354514	1,024811171	1
20	0,02777778	0,04838709	2,419354514	1,024811171	1
21	0,02777778	0,04838709	2,419354514	1,024811171	1
		0,8970967	44,85483479	19	19

En el caso $X = 6$ se estima una unidad de frecuencia absoluta más ya que, teniendo en cuenta la forma de la tabla de frecuencias, parece más lógico darle esa unidad al valor 14 que dársela a ningún otro.

Se observa que hay deficiencias graves en esta estimación que señalan que la correlación no es fuerte. Se puede comprobar en el siguiente diagrama de barras comparadas.





2. Resuelve algebraicamente la integral, (2,5 puntos)

$$\int_1^2 \frac{2dx}{x^3+2x^2+x}$$

Solución. Como,

$$\frac{2}{x^3+2x^2+x}=\frac{2}{x\cdot(x^2+2x+1)}=\frac{2}{x\cdot(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

Calculamos los valores de las constantes,

$$\frac{2}{x\cdot(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2} \quad\Leftrightarrow\quad 2=A\cdot(x+1)^2+B\cdot x\cdot(x+1)+C\cdot x$$

- Si $x=0$ entonces,

$$2=A\cdot(0+1)^2+B\cdot 0\cdot(0+1)+C\cdot 0 \quad\Leftrightarrow\quad 2=A$$

- Si $x=-1$ entonces,

$$2=2\cdot(-1+1)^2+B\cdot(-1)\cdot(-1+1)+C\cdot(-1) \quad\Leftrightarrow\quad 2=-C \quad\Leftrightarrow\quad C=-2$$

- Si $x=1$ entonces,

$$2=2\cdot(1+1)^2+B\cdot 1\cdot(1+1)-2\cdot 1 \quad\Leftrightarrow\quad 4=8+2B\Leftrightarrow\quad -2=B$$

En ese caso,

$$\frac{2}{x\cdot(x+1)^2}=\frac{2}{x}-\frac{2}{(x+1)}-\frac{2}{(x+1)^2}$$

Y entonces,

$$\int_1^2 \frac{2}{x\cdot(x+1)^2}dx = 2\cdot\left(\int_1^2 \frac{1}{x}dx - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)}dx - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx\right) =$$

$$= 2\cdot\left[\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{(x+1)}\right]_1^2 = 2\cdot\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{(x+1)}\right]_1^2 =$$

$$= 2\cdot\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) = 2\ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{3} \approx 0{,}24203$$

Resuelve algebraicamente la integral, (2,5 puntos)

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x^2-3x-2}$$

Solución. Como,

$$2x^2-3x-2=0 \iff x = \frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2} = \frac{+3\pm\sqrt{9+16}}{4} =$$

$$= \frac{+3\pm 5}{4} = \begin{cases} x = \dfrac{+3+5}{4} = +2 \\ x = \dfrac{+3-5}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2x^2-3x-2} = \frac{1}{2\cdot(x-2)\cdot(x+1/2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1/2)}$$

Calculamos los valores de las constantes,

$$\frac{1}{2x^2-3x-2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+1/2)} \iff 1 = 2A\cdot(x+1/2) + 2B\cdot(x-2)$$

- Si $x=2$ entonces,

$$1 = 2A\cdot(2+1/2) + 2B\cdot(2-2) \iff 1 = 5A \iff A = \frac{1}{5}$$

- Si $x=-1/2$ entonces,

$$1 = 2A\cdot(-1/2+1/2) + 2B\cdot(-1/2-2) \iff 1 = -5B \iff B = -\frac{1}{5}$$

En ese caso,

$$\frac{1}{2x^2-3x-2}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{(x+1/2)}\right)$$

Entonces,

$$\int_0^1 \frac{1}{2x^2-3x-2}dx=\frac{1}{5}\cdot\left(\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx-\int_0^1 \frac{1}{(x+1/2)}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot[\ln|x-2|-\ln|x+1/2|]_0^1=\frac{1}{5}\cdot\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+1/2}\right|\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)-\ln(4)\right)=\frac{1}{5}\cdot\ln\left(\frac{1}{6}\right)\approx -0{,}35835$$