UNIVERSIDADES PUBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
SIMULACRO PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
Curso 2024-2025 – Control 7 – Fecha 21/02/25
MATERIA: MATEMATICAS II

lawebdelprofedemates.es

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
CALIFICACION: Cada bloque se calificara sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Ejercicio 1.1. Calificación máxima: 2,5 puntos

Sea λ un número real y considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Se pide,

a) (0,5 puntos) Estudiar algebraicamente si existe algún valor de λ para el cuál la matriz $\mathrm{A}^{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{A}$ NO tiene matriz inversa.

b) (0,5 puntos) Estudiar algebraicamente si existe algún valor de λ para el cuál la matriz $C = A \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{t}}$, NO tiene matriz inversa.

c) (0,75 puntos) Para $\lambda \in \mathbb{R}$ indeterminado, resuelva la ecuación $C \cdot X = I$, con I la matriz identidad de orden 2.

d) (1 punto) Estudiar algebraicamente el rango de la matriz B en función del parámetro a.

Ejercicio 1.2. Calificación máxima: 2,5 puntos

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

a) (0,75 puntos) Calcular razonadamente los valores de a para los que $Rg(A) = 2$.

b) (0´75 puntos) Para $a = 0$, y si existe, calcule algebraicamente A^{-1}. En caso de no existir justifique por qué.

c) (1 punto) Sabiendo que $|B| = 2$ y mediante las propiedades de los determinantes calcula $\begin{vmatrix} y & 2x & x+z \\ 3s & 6r & 3r+3t \\ e & 2d & d+f \end{vmatrix}$

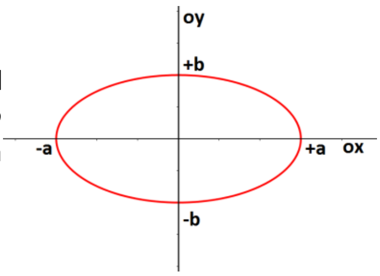
Bloque 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Ejercicio 2.1. Calificación máxima: 2,5 puntos

Resuelva algebraicamente las siguientes cuestiones,

a) (1,25 puntos) Calcule albebraicamente la siguiente integral $\int_3^5 \frac{17-x}{x^2+x-6} dx$

b) (1,25 puntos) Calcular algebraicamente el volumen del elipsoide que se genera al girar sobre el eje OX la elipse de centro $(0,0)$ y semiejes de longitudes a y b sobre el eje OX y OY respectivamente (figura adjunta) y que viene definida por la ecuación,



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ejercicio 2.2. Calificación máxima: 2,5 puntos

Resuelva las siguientes cuestiones independientes, dando una explicación algebraica correcta,

a) (1,25 puntos) Resuelva la integral siguiente $\int \frac{x^4}{x^3-x^2-x+1} dx$

b) (1,25 puntos) Calcule algebraicamente el volumen de revolución que genera la función $y = \ln x$ al girar sobre el eje OX entre los valores de abcisa $x = 1$ y $x = e$.

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Ejercicio 3.1. Calificación máxima: 2,5 puntos

Sabiendo que $P(A) = 0.5$, $P(A|B) = 0.625$ y $P(A \cup B) = 0.65$, se pide calcular:

a) (1.5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

b) (1 punto) $P(A\,|(A \cup B))$ y $P\big((A \cap B)\big|(A \cup B)\big)$.

Ejercicio 3.2. Calificación máxima: 2,5 puntos

En una mesa hay dos urnas: la urna A, que contiene 3 bolas rojas y 2 azules, y la urna B, que tiene 2 bolas rojas y 3 azules. Para seleccionar una bola al azar, primero determinaremos de qué urna extraerla mediante el siguiente proceso: Lanzaremos dos dados tetraédricos equilibrados, con sus caras numeradas del 1 al 4, y sumaremos los resultados obtenidos. Sea la variable aleatoria $X =$ "$suma\ de\ los\ dos\ dados$". Si la suma X es un número primo, tomaremos una bola al azar de la urna A y si la suma X no es un número primo, extraeremos una bola al azar de la urna B. Al realizar el experimento aleatorio,

a) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que la suma de los dados sea 5 y se extraiga bola roja.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que la suma de los dados sea un número primo.

c) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de elegir la urna B y en ella una bola azul.

d) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de elegir una bola roja.

e) (0,5 puntos) Sabiendo que se ha sacado bola azul, calcular la probabilidad de que la suma de los dados fuera un número primo.

Bloque 4. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Una variable aleatoria discreta X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$P(X = x) = \frac{ax}{21} \ \ para\ x \in \{3, 5, 9, 11\}$$

a) (0,5 puntos) Halle algebraicamente el valor de a.

b) (0,25 puntos) Calcular la probabilidad de que el valor de la variable sea <u>mayor que</u> 3.

c) (0,75 puntos) Sabiendo en una realización del experimento que la variable es <u>menor que</u> 9, ¿Cuál es la probabilidad de que sea <u>al menos</u> 5?

d) (0,25 + 0,75 puntos) Halle $E[X]$ y $\sigma(X)$.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº 7 DE MATEMÁTICAS II

Ejercicio 1.1. Calificación máxima: 2,5 puntos

Sea λ un número real y considérense las matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

Se pide,

a) **(0,5 puntos) Estudiar algebraicamente si existe algún valor de λ para el cuál la matriz $A^t \cdot A$ no tiene matriz inversa.**

b) **(0,5 puntos) Estudiar algebraicamente si existe algún valor de λ para el cuál la matriz $C = A \cdot A^t$ no tiene matriz inversa.**

c) **(0,75 puntos) Para $\lambda \in \mathbb{R}$ indeterminado, resuelva la ecuación matricial $C \cdot X = I$ con I la matriz identidad de orden 2**

d) **(1 punto) Estudiar algebraicamente el rango de la matriz B en función del parámetro a.**

Solución

a) **(0,5 puntos) Estudiar algebraicamente si existe algún valor de λ para el cuál la matriz $A^t \cdot A$ no tiene matriz inversa.**

Calculamos la matriz producto $A^t \cdot A$,

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & 1+\lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora el determinante de la matriz $A^t \cdot A$ según,

$$|A^t \cdot A| = \begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & 1+\lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1+\lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1+\lambda^2 & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 \cdot \left((\lambda^2+1)^2 + 0 + 0 - \lambda^2 \cdot (1+\lambda^2) - 0 - (\lambda^2+1)\right) =$$

$$= \lambda^2 \cdot \left((\lambda^2+1)^2 - \lambda^2 \cdot (1+\lambda^2) - (\lambda^2+1)\right) =$$

$$= \lambda^2 \cdot (1+\lambda^2) \cdot (\lambda^2 + 1 - \lambda^2 - 1) = 0$$

Como la matriz $A^t \cdot A$ tendrá inversa si su determinante es distinto de cero, concluimos que **no hay valores del parámetro λ para los que la matriz $A^t \cdot A$ tiene inversa**. Es decir,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \nexists (A^t \cdot A)^{-1}$$

b) **(0,5 puntos) Estudiar algebraicamente si existe algún valor de λ para el cuál la matriz $A \cdot A^t$ no tiene matriz inversa.**

Sea $C = A \cdot A^t$. Calculamos la matriz,

$$C = A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda^2+1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$$

En ese caso, vemos si la matriz C tiene matriz inversa comprobando que el determinante es no nulo,

$$|C| = \begin{vmatrix} 2\lambda^2+1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+1 \end{vmatrix} = (2\lambda^2+1)\cdot(\lambda^2+1)$$

Este determinante será nulo si,

$$|C| = (2\lambda^2+1)\cdot(\lambda^2+1) = \begin{cases} 2\lambda^2+1=0 & \Leftrightarrow \quad 2\lambda^2=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=\sqrt{-1/2}\notin\mathbb{R} \\ \lambda^2+1=0 & \Leftrightarrow \quad \lambda^2=-1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=\sqrt{-1}\notin\mathbb{R} \end{cases}$$

Por lo tanto, el determinante de C no se anula y **concluimos que para cualquier valor $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$, la matriz $\boldsymbol{C}$ tiene matriz inversa**. Es decir,

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \ , \ \exists (\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^{\mathrm{t}})^{-1}$$

c) (1 punto) Para $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$, resuelva la ecuación matricial $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A^tX}=\boldsymbol{I}$ con $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad de orden 2

Como En ese caso, resolvemos la ecuación del siguiente modo,

$$A\cdot A^tX = I \quad \Leftrightarrow \quad CX = I \quad \Leftrightarrow \quad C^{-1}\cdot CX = C^{-1}\cdot I \quad \Leftrightarrow \quad I\cdot X = C^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad X = C^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa C^{-1} mediante la fórmula,

$$C^{-1} = \frac{Adj(C^t)}{|C|}$$

La matriz traspuesta C^t es,

$$C^t = \begin{pmatrix} \lambda^2+1 & 0 \\ 0 & 2\lambda^2+1 \end{pmatrix}$$

Y la matriz adjunta de la matriz traspuesta es,

$$Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2+1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz inversa es,

$$C^{-1} = \frac{Adj(C^t)}{|C|} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\lambda^2+1}{(2\lambda^2+1)\cdot(\lambda^2+1)} & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda^2+1}{(2\lambda^2+1)\cdot(\lambda^2+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2+1 & 0 \\ 0 & 2\lambda^2+1 \end{pmatrix}$$

d) (1 punto) Estudiar algebraicamente el rango de la matriz B en función del parámetro $\boldsymbol{a}$.

Hacemos el determinante de orden 4, que genera la matriz B,

$$|B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a+3 \\ 1 & a & 1 & a+3 \\ 1 & 1 & a & a+3 \\ 1 & 1 & 1 & a+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a+3 \\ 1-a & a-1 & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -(a+3)\cdot \begin{vmatrix} 1-a & a-1 & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 \\ 1-a & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a+3)\cdot(a-1)\begin{vmatrix} 1-a & a-1 \\ 1-a & 0 \end{vmatrix} = (a+3)\cdot(a-1)^3$$

Igualando el determinante a cero obtenemos,

$$(a+3)\cdot(a-1)^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+3 \quad = 0 & \Leftrightarrow \quad a=-3 \\ (a-1)^3 = 0 & \Leftrightarrow \quad a=+1 \end{cases}$$

Por lo tanto,

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -3$ entonces $Rg(B) = 4$
- Si $a = 1$ entonces

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y como todas las filas y columnas son iguales entonces $Rg(B) = 1$

- Si $a = -3$ entonces

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

En ese caso,

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -27 - 1 - 1 + 3 + 3 + 3 = -20 \neq 0$$

Y, por tanto, $Rg(B) = 3$

Ejercicio 1.2. Calificación máxima: 2,5 puntos

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

a) (0,75 puntos) Calcular razonadamente los valores de a para los que $Rg(A) = 2$.

b) (0´75 puntos) Para $a = 0$, y si existe, calcule algebraicamente A^{-1}. En caso de no existir justifice por qué.

c) (1 punto) Sabiendo que $|B| = 2$ y mediante las propiedades de los determinantes calcula,

$$\begin{vmatrix} y & 2x & x+z \\ 3s & 6r & 3r+3t \\ e & 2d & d+f \end{vmatrix}$$

Solución

a) (0,75 puntos) Calcular razonadamente los valores de a para los que $Rg(A) = 2$.

Calculamos el determinante de A,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 0 - a^2 - a - 0 + 4 = -a^2 - a + 6$$

Igualamos el resultado a cero y resolvemos la ecuación,

$$-a^2 - a + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-2} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} a_1 = \dfrac{1+5}{-2} = \dfrac{6}{-2} = -3 \\ a_2 = \dfrac{1-5}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = +2 \end{cases}$$

En ese caso, para $a = -3$ y para $a = +2$ tendremos que $Rg(A) < 3$.

Además, puesto que el determinante del menor complementario de posiciones señaladas en rojo es,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

Concluimos que exclusivamente para los valores $a = -3$ y $a = +2$ el $Rg(A) = 2$.

b) (0´75 puntos) Para $a = 0$, y si existe, calcule A^{-1}. En caso de no existir justifique por qué.

Para $a = 0$, sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como, $|A| = -0^2 - 0 + 6 = 6 \neq 0$, la matriz inversa pedida existe.

Aplicando el método de los determinantes para calcular A^{-1}, tendremos que,

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{6} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/6 \\ -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

c) (1 punto) Sabiendo que $|B| = 2$ y mediante las propiedades de los determinantes calcula,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{y} & \boldsymbol{2x} & \boldsymbol{x+z} \\ \boldsymbol{3s} & \boldsymbol{6r} & \boldsymbol{3r+3t} \\ \boldsymbol{e} & \boldsymbol{2d} & \boldsymbol{d+f} \end{vmatrix}$$

Sacamos un 3 factor común de la fila segunda y un 2 de la columna segunda,

$$\begin{vmatrix} y & 2x & x+z \\ 3s & 6r & 3r+3t \\ e & 2d & d+f \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} y & 2x & x+z \\ s & 2r & r+t \\ e & 2d & d+f \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} y & x & x+z \\ s & r & r+t \\ e & d & d+f \end{vmatrix} =$$

Intercambiamos las columnas primera y segunda y separamos en dos determinantes por la columna tercera

$$3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} y & x & x+z \\ s & r & r+t \\ e & d & d+f \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} x & y & x+z \\ r & s & r+t \\ d & e & d+f \end{vmatrix} = -6 \cdot \begin{vmatrix} x & y & x \\ r & s & r \\ d & e & d \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ r & s & t \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

El primer determinante es 0 por tener dos columnas iguales y el segundo determinante es el determinante de B. Por tanto,

$$= -6 \cdot 0 - 6 \cdot 2 = -12$$

Ejercicio 2.1. Calificación máxima: 2,5 puntos

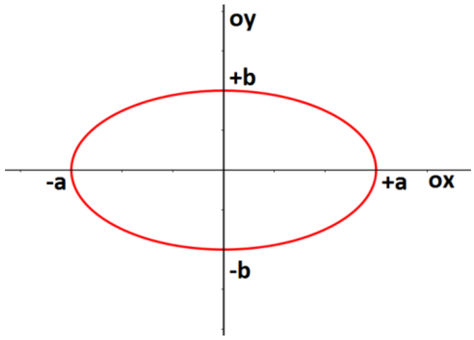
Resuelva algebraicamente las siguientes cuestiones,

a) (1,25 puntos) Calcule la siguiente integral definida,

$$\int_3^5 \frac{17-x}{x^2+x-6}dx$$

b) (1,25 puntos) Calcular el volumen del elipsoide que genera la elipse de centro $(0,0)$ y semiejes de longitudes a y b sobre el eje OX y OY respectivamente (figura adjunta) y que viene definida por la ecuación,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



Solución

a) (1,25 puntos) Calcule algebraicamente la siguiente integral definida, $\int_3^5 \frac{17-x}{x^2+x-6}dx$

Como

$$x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{-1+5}{2}=2\\ \frac{-1-5}{2}=-3\end{cases}$$

Entonces

$$\frac{17-x}{x^2+x-6}=\frac{17-x}{(x-2)\cdot(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

En ese caso,

$$17-x=A\cdot(x+3)+B\cdot(x-2)$$

- Si $x=2$ entonces,

$$17-2=A\cdot(2+3)+B\cdot(2-2) \quad \Leftrightarrow \quad 15=5A \quad \Leftrightarrow \quad 3=A$$

- Si $x=-3$ entonces,

$$17+3=A\cdot(-3+3)+B\cdot(-3-2) \quad \Leftrightarrow \quad 20=-5B \quad \Leftrightarrow \quad -4=B$$

Por lo tanto,

$$\frac{17-x}{x^2+x-6}=\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x+3}$$

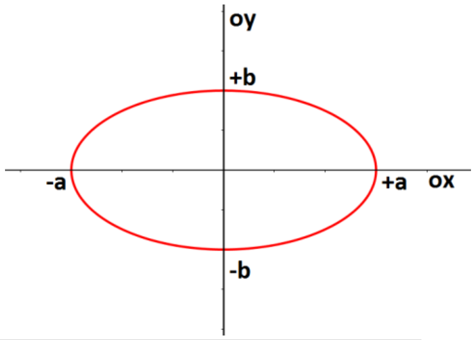
Y entonces,

$$\int_3^5 \frac{17-x}{x^2+x-6}dx = \int_3^5 \frac{3}{x-2}dx - \int_3^5 \frac{4}{x+3}dx = [3\cdot ln|x-2| - 4\cdot ln|x+3|]_3^5 =$$

$$= 3\cdot ln\,3 - 4\cdot ln\,8 - 3\cdot ln\,1 + 4\cdot ln\,6 = \ln\left(\frac{3^3\cdot 6^4}{8^4}\right) = \ln\left(\frac{3^3\cdot 2^4\cdot 3^4}{2^{12}}\right) = \ln\left(\frac{3^7}{2^8}\right) \approx 2.145$$

b) (1,25 puntos) Calcular el volumen del elipsoide que genera la elipse de centro $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ y semiejes de longitudes $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{b}$ sobre el eje $\boldsymbol{OX}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{OY}$ respectivamente (figura adjunta) y que viene definida por la ecuación,

$$\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{\boldsymbol{y^2}}{\boldsymbol{b^2}} = \mathbf{1}$$



Si despejamos la variable dependiente y en la ecuación,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad y^2=b^2\cdot\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad y=\pm b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

Donde el dominio de la curva es $x\in[-a,+a]$.

Al tratarse de una curva simétrica respecto de los dos ejes, el volumen será el doble del volumen del giro de la curva en el intervalo $x\in[0,+a]$. . Este vendrá dado por,

$$V = 2\pi\cdot\int_0^a y^2\,dx = 2\pi\cdot\int_0^a\left(b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx = 2\pi b^2\cdot\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx =$$

$$= 2\pi b^2\cdot\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 2\pi b^2\cdot\left(a-\frac{a^3}{3a}-0+0\right) = 2\pi b^2\cdot\left(a-\frac{a}{3}\right) = \frac{4\pi b^2}{3}\ \ u^3$$

Ejercicio 2.2. Calificación máxima: 2,5 puntos

Resuelva las siguientes cuestiones independientes, dando una explicación algebraica correcta,

a) (1,25 puntos) Resuelva la integral siguiente $\int \frac{x^4}{x^3-x^2-x+1}dx$

b) (1,25 puntos) Calcule algebraicamente el volumen de revolución que genera la función $y = \ln x$ al girar sobre el eje OX entre los valores de abcisa $x = 1$ y $x = e$.

Solución

a) Resuelva la integral siguiente $\int \frac{x^4}{x^3-x^2-x+1}dx$

Dividimos el numerador entre el denominador,

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & & & & & x^3-x^2-x+1 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +x^3 & +x^2 & -x & & x+1 \\ \cline{1-4}
 & +x^3 & +x^2 & -x & & \\
 & -x^3 & +x^2 & +x & -1 & \\ \cline{2-5}
 & & 2x^2 & & -1 &
\end{array}$$

Obtenemos entonces que,

$$\frac{x^4}{x^3-x^2-x+1} = x+1+\frac{2x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$$

Calculamos las raíces del polinomio divisor,

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & +1 & -1 & -1 & +1 \\
+1 & & +1 & +0 & -1 \\ \hline
 & +1 & +0 & -1 & +0
\end{array}$$

Una de las raíces es $x = 1$. El resto son,

$$x^2-1=0 \iff x^2=1 \iff x=\pm 1$$

Por lo tanto,

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2\cdot(x+1)$$

Procedemos a descomponer en fracciones simples a la fracción resultante según,

$$\frac{2x^2-1}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1}{(x-1)^2\cdot(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

de donde

$$2x^2-1=A\cdot(x-1)^2+B\cdot(x+1)\cdot(x-1)+C\cdot(x+1)$$

Calculamos los valores de $A, B\ y\ C$ dando valores a la incógnita,

- Si $x = 1$ entonces,

  $$2\cdot 1^2 - 1 = A\cdot(1-1)^2 + B\cdot(1+1)\cdot(1-1) + C\cdot(1+1) \Leftrightarrow 1 = 2C \Leftrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{C}.$$

- Si $x = -1$ entonces,

  $$2\cdot(-1)^2 - 1 = A\cdot(-1-1)^2 + B\cdot(-1+1)\cdot(-1-1) + C\cdot(-1+1) \Leftrightarrow$$

  Es decir, $1 = 4A \quad \Leftrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \boldsymbol{A}.$

- Si $x = 0$ entonces,

  $$2\cdot 0^2 - 1 = A\cdot(0-1)^2 + B\cdot(0+1)\cdot(0-1) + C\cdot(0+1) \Leftrightarrow$$
  $$-1 = A - B + C \quad \Leftrightarrow \quad B = A + C + 1$$

  Es decir, $B = A + C + 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}.$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^4}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \int (x+1)\,dx + \int \frac{1/4}{x+1}\,dx + \int \frac{7/4}{x-1}\,dx + \int \frac{1/2}{(x-1)^2}\,dx$$

Entonces,

$$\int \frac{x^4}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{7}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int (x-1)^{-2}\,dx + K$$

Es decir,

$$\int \frac{x^4}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{4}\cdot\ln|x+1| + \frac{7}{4}\cdot\ln|x-1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C$$

En conclusión,

$$\int \frac{x^4}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{4}\cdot\ln|x+1| + \frac{7}{4}\cdot\ln|x-1| - \frac{1}{2x-2} + C$$

b) (1,25 puntos) Calcule algebraicamente el volumen de revolución que genera la función $y = \ln x$ al girar sobre el eje OX entre los valores de abcisa $x = 1$ y $x = e$.

El volumen vendrá dado por,

$$V = \pi\cdot\int_1^e (\ln x)^2\,dx$$

Actuando mediante integración por partes,

$$\begin{aligned} u &= (\ln x)^2 \quad & du &= 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ dv &= 1dx & v &= x \end{aligned}$$

Tendremos que,

$$V = \pi \cdot \int_1^e (\ln x)^2 \, dx = \pi \cdot [x \cdot (\ln x)^2]_1^e - \pi \cdot \int_1^e 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x dx =$$

$$= \pi \cdot (e \cdot (\ln e)^2 - (\ln 1)^2) - 2\pi \cdot \int_1^e \ln x \, dx = \pi \cdot e - 2\pi \cdot \int_1^e \ln x \, dx =$$

Volviendo a actuar por partes,

$$\begin{aligned} u &= \ln x \quad & du &= \frac{1}{x} dx \\ dv &= 1dx & v &= x \end{aligned}$$

Tendremos que,

$$= \pi \cdot e - 2\pi \cdot \int_1^e \ln x \, dx = \pi \cdot e - 2\pi \cdot [x \cdot \ln x]_1^e + 2\pi \cdot \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x \, dx =$$

$$= \pi \cdot e - 2\pi \cdot (e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1) + 2\pi \cdot \int_1^e 1 \, dx = \pi \cdot e - 2\pi e + 2\pi \cdot [x]_1^e =$$

$$= -\pi \cdot e + 2\pi e - 2\pi = \pi \cdot (e - 2) \approx 2{,}2565 \, u^3$$

Ejercicio 3.1. Calificación máxima: 2,5 puntos

Sabiendo que $P(A) = 0.5, P(A|B) = 0.625$ y $P(A \cup B) = 0.65$, se pide calcular:

a) (1.5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

b) (1 punto) $P(A\,|(A \cup B))$ y $P\big((A \cap B)\big|(A \cup B)\big)$.

Solución

a) (1.5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

Como $P(A|B) = 0.625$ entonces,

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}625 = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}625 \cdot P(B) = P(A\cap B)$$

Por otra parte, como $P(A \cup B) = 0.65$ entonces,

$$P(A \cup B) = 0.65 \quad \Leftrightarrow \quad P(A) + P(B) - P(P(A\cap B) = 0{,}65$$

Y como $P(A) = 0.5$ entonces,

$$P(A) + P(B) - P(P(A\cap B) = 0{,}65 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}5 + P(B) - P(P(A\cap B) = 0{,}65 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad P(B) - P(P(A\cap B) = 0{,}65 - 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}5 + P(B) - P(P(A\cap B) = 0{,}15$$

Sustituyendo $P(A\cap B) = 0{,}625 \cdot P(B)$ en la expresión anterior podemos despejar $P(B)$,

$$P(A) + P(B) - P(P(A\cap B) = 0{,}15 \quad \Leftrightarrow \quad P(B) - 0{,}625 \cdot P(B) = 0{,}15 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad P(B)\cdot(1 - 0{,}625) = 0{,}15 \quad \Leftrightarrow \quad P(B)\cdot 0{,}375 = 0{,}15 \quad \Leftrightarrow \quad P(B) = \frac{0{,}15}{0{,}375} = 0{,}4$$

Y entonces,

$$P(A\cap B) = 0{,}625 \cdot P(B) = 0{,}625 \cdot 0{,}4 = 0{,}25$$

b) (1 punto) $P(A\,|(A \cup B))$ y $P\big((A \cap B)\big|(A \cup B)\big)$.

$$P\big(A\,|(A \cup B)\big) = \frac{P\big(A\cap(A \cup B)\big)}{P(A\cup B)} = \frac{P(A)}{P(A\cup B)} = \frac{0{,}5}{0{,}65} = \frac{1}{13} = 0{,}76923 \approx 0{,}77$$

$$P\big((A \cap B)\,|(A \cup B)\big) = \frac{P\big((A \cap B)\cap(A \cup B)\big)}{P(A\cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A\cup B)} = \frac{0{,}25}{0{,}65} = \frac{5}{13} = 0{,}3846 \approx 0{,}38$$

Ejercicio 3.2. Calificación máxima: 2,5 puntos

En una mesa hay dos urnas: la urna A, que contiene 3 bolas rojas y 2 azules, y la urna B, que tiene 2 bolas rojas y 3 azules. Para seleccionar una bola al azar, primero determinaremos de qué urna extraerla mediante el siguiente proceso: Lanzaremos dos dados tetraédricos equilibrados, con sus caras numeradas del 1 al 4, y sumaremos los resultados obtenidos. Sea la variable aleatoria $X =$ "*suma de los dos dados*". Si la suma X es un número primo, tomaremos una bola al azar de la urna A y si la suma X no es un número primo, extraeremos una bola al azar de la urna B. Al realizar el experimento aleatorio,

a) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que la suma de los dados sea 5 y se extraiga bola roja.

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que la suma de los dados sea un número primo.

c) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de elegir la urna B y en ella una bola azul.

d) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de elegir una bola roja.

e) (0,5 puntos) Sabiendo que se ha sacado bola azul, calcular la probabilidad de que la suma de los dados fuera un número primo.

Solución. Sea la variable aleatoria $X =$ "*Suma de los dos dados*" y los sucesos, $p =$ "*Salir número primo*" $R =$ "*Salir bola roja*" y $A =$ "*Salir bola azul*".

La variable aleatoria tiene las siguientes probabilidades en función de la siguiente tabla,

		Dado 1			
		1	2	3	4
Dado 2	1	2	3	4	5
	2	3	4	5	6
	3	4	5	6	7
	4	5	6	7	8

$$P(X=2)=P(X=8)=\frac{1}{16}$$
$$P(X=3)=P(x=7)=\frac{2}{16}$$
$$P(X=4)=P(X=6)=\frac{3}{16}$$
$$P(X=5)=\frac{4}{16}$$

Además,

$$P(p)=\frac{9}{16} \qquad P(p^c)=\frac{7}{16}$$

a) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que la suma de los dados sea 5 y se extraiga bola roja.

Se trata de calcular la probabilidad del suceso$(X=5)\cap R$,

$$P\big((X=5)\cap R\big)=P(X=5)\cdot P(R/p)=\frac{4}{16}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{20}=0{,}15=15\%$$

b) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de que la suma de los dados sea un número primo.

Se trata de calcular la probabilidad del suceso p,

$$P(p) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 7) =$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} = \frac{9}{16} = 0{,}5625 = 56{,}25\ \%$$

c) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de elegir la urna B y en ella una bola azul.

La probabilidad de elegir la urna B es equivalente a que salga número compuesto. Por tanto,

$$P(p^c \cap A) = P(p^c) \cdot P(A/p^c) = \frac{7}{16} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{80} = 0{,}2625 = 26{,}25\ \%$$

d) (0,5 puntos) Calcular la probabilidad de elegir una bola roja.

Mediante el teorema de la probabilidad total tendremos que,

$$P(R) = P(p^c) \cdot P(R/p^c) + P(p) \cdot P(R/p) = \frac{7}{16} \cdot \frac{2}{5} + \frac{9}{16} \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{14 + 27}{80} = \frac{41}{80} = 0{,}5125 = 51{,}25\ \%$$

e) (0,5 puntos) Sabiendo que se ha sacado bola azul, calcular la probabilidad de que la suma de los dados fuera un número primo.

Mediante el teorema de Bayes tendremos que,

$$P(p/A) = \frac{P(p \cap A)}{P(A)} = \frac{P(p \cap A)}{1 - P(R)} = \frac{P(p) \cdot P(A/p)}{1 - \frac{41}{80}} =$$

$$= \frac{\frac{9}{16} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{39}{80}} = \frac{\frac{18}{80}}{\frac{39}{80}} = \frac{18}{39} = \frac{6}{13} = 0{,}46154 = 46{,}154\ \%$$

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2,5 puntos

Una variable aleatoria discreta X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

$$\boldsymbol{P(X = x) = \frac{ax}{21} \ \ para\ x \in \{3, 5, 9, 11\}}$$

a) (0,5 puntos) Halle algebraicamente el valor de a.

b) (0,25 puntos) Calcular la probabilidad de que el valor de la variable sea mayor que 3.

c) (0,75 puntos) Sabiendo en una realización del experimento que la variable es menor que 9, ¿Cuál es la probabilidad de que sea al menos 5?

d) (0,25 + 0,75 puntos) Halle $E[X]$ y $\sigma(X)$.

Solución

a) (0,5 puntos) Halle algebraicamente el valor de a.

La suma de la probabilidad de todos los sucesos elementales es 1. Por lo tanto,

$$1 = P(X = 3) + P(X = 5) + P(X = 9) + P(X = 11)$$

En ese caso,

$$\boxed{1 = \frac{3a}{21} + \frac{5a}{21} + \frac{9a}{21} + \frac{11a}{21} \Leftrightarrow 1 = \frac{28a}{21} \Leftrightarrow \frac{21}{28} = a \Leftrightarrow \frac{3}{4} = a}$$

b) (0,25 puntos) Calcular la probabilidad de que el valor de la variable sea mayor que 3.

$$P(X > 3) = P(X = 5) + P(X = 9) + P(X = 11) = 1 - P(X = 3) =$$

$$= 1 - \frac{3 \cdot (3/4)}{21} = 1 - \frac{9}{84} = \frac{75}{84} = \frac{25}{28} = 0{,}89286$$

c) (0,75 puntos) Sabiendo en una realización del experimento que la variable es menor que 9, ¿Cuál es la probabilidad de que sea al menos 5?

Se nos pide la probabilidad del suceso condicionado $X \geq 6{,}5/X < 9$. La calculamos,

$$P(X \geq 5/X < 9) = \frac{P(5 \leq X < 9)}{P(X < 9)} = \frac{P(X = 5)}{P(X = 3) + P(X = 5)} =$$

$$= \frac{\frac{5a}{21}}{\frac{3a}{21} + \frac{5a}{21}} = \frac{5}{3 + 5} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

d) (0,25 + 0,75 puntos) Halle $E[X]$ y $\sigma(X)$.

Calculamos la esperanza de la variable aleatoria,

$$E[X]=\sum x_i\cdot P(X=x_i)=3\cdot\frac{3\cdot 3/4}{21}+5\cdot\frac{5\cdot 3/4}{21}+9\cdot\frac{9\cdot 3/4}{21}+11\cdot\frac{11\cdot 3/4}{21}=$$

$$\frac{3\cdot(9+25+81+121)}{84}=\frac{236}{28}=\frac{59}{7}\approx 8{,}4286$$

Calculamos la varianza,

$$V(X)=E[X^2]-(E[X])^2$$

Calculamos la esperanza de la variable al cuadrado,

$$E[X^2]=\sum x_i^2\cdot P(X=x_i)=3^2\cdot\frac{3\cdot 3/4}{21}+5^2\cdot\frac{5\cdot 3/4}{21}+9^2\cdot\frac{9\cdot 3/4}{21}+11^2\cdot\frac{11\cdot 3/4}{21}=$$

$$\frac{3\cdot(27+125+729+1331)}{84}=\frac{2212}{28}=\frac{553}{7}=79$$

Por lo tanto,

$$V(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{553}{7}-\left(\frac{59}{7}\right)^2=\frac{390}{49}\approx 7{,}9592$$

Y la desviación típica de la variable es,

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{390}{49}}=\frac{\sqrt{390}}{7}\approx 2.8212$$