

CONTROL 6

Análisis y enfoques Matemáticas II

VIERNES 31 de ENERO de 2025

NOMBRE: _____

APELLIDOS: _____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexas una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- **La puntuación máxima para esta prueba es de 10 puntos.**
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.

Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1,25 puntos]

1. La siguiente tabla muestra la población de Canadá t años después del año 2000

t (años después del año 2000)	0	5	10	15	20
p (población, en millones)	30,7	32,2	34	35,7	37,9

Una estudiante utiliza la regresión lineal para modelizar la población de Canadá con estos datos. El modelo de la estudiante es $p = at + b$.

a) (0,25 puntos) Escriba el coeficiente de correlación lineal de Pearson y el coeficiente de determinación lineal. Comente la fiabilidad del estudio de correlación lineal y entre qué años es más efectiva.

b) (0,25 puntos) Escriba el valor de a y de b en esta regresión. Comente si la regresión es directa e inversa y qué significa este hecho.

La estudiante utiliza este modelo para predecir la población que tendrá Canadá en el año 2030.

c) (0,25 puntos) Según los datos aportados, ¿qué estimación obtendrá la estudiante? Comente la fiabilidad de la estimación de la estudiante.

Suponga que, con los mismos datos, la estudiante quiere estimar ahora en cuántos años después del año 2000, la población de Canadá tendrá 36,3 millones de habitantes.

d) (0,5 puntos) Según los datos aportados, ¿qué modelo de regresión lineal deberá aplicar la estudiante?, ¿qué estimación obtendrá para los 36,3 millones de habitantes? Comente la fiabilidad de la estimación de la estudiante.

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

2. Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

- a) (0,25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea tipo B y no se dedique a la exportación.
- b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.
- c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto **NO** es destinado a la exportación.



LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m \\ 2 & m & -1 \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

- a) (0,75 puntos) Calcule algebraicamente los valores de m para los que la matriz A tiene matriz inversa.
- b) (0,75 puntos) Calcule algebraicamente el rango de la matriz B justificándolo por el método de los determinantes.



LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

4. En una clase de 21 alumnas, 9 estudian ruso, 7 practican algún deporte y tan solo 3 hacen ambas cosas. Si elegimos una alumna al azar en esta clase, y argumentando algebraicamente,
- a) (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que no practique deportes.
 - b) (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que practique algún deporte o estudie ruso.
 - c) (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que ni practique deporte ni estudie ruso.
 - d) (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que practique algún deporte pero no estudie ruso.
 - e) (0,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, si sabemos que estudia ruso, practique algún deporte?
 - f) (0,25 puntos) Los sucesos “estudiar ruso” y “practicar algún deporte” en esta clase, ¿son compatibles o incompatibles? ¿Son independientes o dependientes? Razone y respalde sus respuestas con un argumento matemático sólido

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 2,75 puntos]

5. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 8x + 3 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x - 1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) (0,5 puntos) Estudie algebraicamente la continuidad de la función en $x = 2$.
- b) (1,25 puntos) Calcule **algebraicamente** el área encerrada por la función y el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.
- c) (1 punto) Calcule **algebraicamente** el área encerrada por la función y el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

LA WEB DEL
PROFE DE MATE

LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,25$ y $P(A \cup B) = 0,625$. Responda de forma matemática y razonada o calcule lo que se pide en los siguientes casos:

- a) (0,25 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B . ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$? Razone algebraicamente.
- b) (0,25 puntos) ¿Son A y B independientes? Razone algebraicamente.
- c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ donde \bar{A} denota al suceso complementario de A y \bar{B} denota al suceso complementario de B .
- d) (0,5 puntos) Halle $P(\bar{B}/A)$



LA WEB DEL

PROFE DE MATHS

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CONTROL Nº 6 DE MATEMÁTICAS II

[Puntuación máxima: 1,25 puntos]

1. La siguiente tabla muestra la población de Canadá t años después del año 2000

t (años después del año 2000)	0	5	10	15	20
p (población, en millones)	30,7	32,2	34	35,7	37,9

Una estudiante utiliza la regresión lineal para modelizar la población de Canadá con estos datos. El modelo de la estudiante es $p = at + b$.

a) (0,25 puntos) Escriba el coeficiente de correlación lineal de Pearson y el coeficiente de determinación lineal. Comente la fiabilidad del estudio de correlación lineal y entre qué años es más efectiva.

b) (0,25 puntos) Escriba el valor de a y de b en esta regresión. Comente si la regresión es directa e inversa y qué significa este hecho.

La estudiante utiliza este modelo para predecir la población que tendrá Canadá en el año 2030.

c) (0,25 puntos) Según los datos aportados, ¿qué estimación obtendrá la estudiante? Comente la fiabilidad de la estimación de la estudiante.

Suponga que, con los mismos datos, la estudiante quiere estimar ahora en cuántos años después del año 2000, la población de Canadá tendrá 36,3 millones de habitantes.

d) (0,5 puntos) Según los datos aportados, ¿qué modelo de regresión lineal deberá aplicar la estudiante?, ¿qué estimación obtendrá para los 36,3 millones de habitantes? Comente la fiabilidad de la estimación de la estudiante.

a) (0,25 puntos) Escriba el coeficiente de correlación lineal de Pearson y el coeficiente de determinación lineal. Comente la fiabilidad del estudio de correlación lineal y entre qué años es más efectiva.

El coeficiente de correlación lineal es $r \approx 0,99783793$

El coeficiente de determinación es $r^2 \approx 0,99568054$

La fiabilidad del estudio es alta ya que los coeficientes son muy próximos a uno pero solo hay fiabilidad cuando tomamos valores entre 2000 y 2020

b) (0,25 puntos) Escriba el valor de a y de b en esta regresión. Comente si la regresión es directa e inversa y qué significa este hecho.

En la regresión $p = at + b$ tendremos que $a \approx 0,358$ y $b \approx 30,52$.

La regresión es directa ya que $r > 0$ ($o a > 0$). Eso significa que estimamos que al aumentar o disminuir el valor de la variable aleatoria número de años 2000 y hasta 2020, la población aumenta o disminuye respectivamente.

c) (0,25 puntos) Según los datos aportados, ¿qué estimación obtendrá la estudiante para predecir la población que tendrá Canadá en el año 2030? Comente la fiabilidad de la estimación de la estudiante.

Aplicando el modelo de regresión $p = at + b$ donde $a \approx 0,358$ y $b \approx 30,52$ y tomando $t = 30$, tendremos la estimación para la población de Canadá,

$$p(30) = 0,358 \cdot 30 + 30,52 = 41,26 \text{ millones de personas}$$

Hay baja fiabilidad en esta estimación para $t = 30$ ya que está fuera del rango de valores para los que se ha realizado el estudio ($0 \leq t \leq 20$) y, por tanto, se trata de una extrapolación para la que el coeficiente de determinación, no es significativo.

d) (0,25 puntos) Según los datos aportados, ¿qué modelo de regresión lineal deberá aplicar la estudiante?, ¿qué estimación obtendrá para los 36,3 millones de habitantes? Comente la fiabilidad de la estimación de la estudiante.

Tenemos que aplicar el modelo de regresión $t = a'p + b'$ donde $a' \approx 0,278123057$ $b' \approx -84,839962$ y tomando $p = 36,3$ millones de habitantes tendremos el año después de 2000 en que se produce este valor,

$$t(36,3) = 2,78123057 \cdot 36,3 - 84,839962 = 16,118707691 \text{ años después de 2000}$$

Hay alta fiabilidad para esta estimación en $p = 36,3$ ya que está dentro del rango de valores para los que se ha realizado el estudio ($30,7 \leq p \leq 37,9$) y el coeficiente de determinación, es significativo.

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

2. Una empresa comercializa tres tipos de productos A, B y C. Cuatro de cada siete productos son de tipo A, dos de cada siete productos son de tipo B y el resto lo son de tipo C. A la exportación se destina un 40 % de los productos tipo A, un 60 % de los productos tipo B y un 20 % de los productos tipo C. Elegido un producto al azar, se pide:

- (0,25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea tipo B y no se dedique a la exportación.
- (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.
- (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto **NO** es destinado a la exportación.

Consideramos los siguientes sucesos,

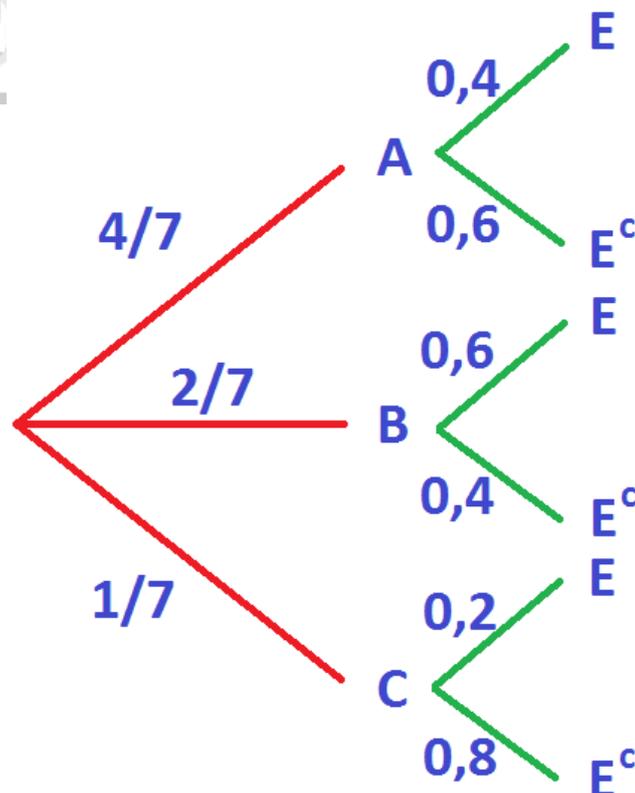
A = Se elige un producto tipo A

B = Se elige un producto tipo B

C = Se elige un producto tipo C

E = El producto se destina a la importación

El problema se puede representar mediante un diagrama de árbol según,



a) (0,25 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea tipo B y no se dedique a la exportación.

Se trata de calcular la *probabilidad del suceso* $B \cap E^c$. Aplicando el **teorema de probabilidad compuesta**, tendremos,

$$P(B \cap E^c) = P(B) \cdot P(E^c/B) = \frac{2}{7} \cdot 0,4 = \frac{8}{70} = \frac{4}{35} \approx 0,1142857$$

b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el producto sea destinado a la exportación.

Se trata de calcular la **probabilidad del suceso** E . Aplicando el **teorema de probabilidad total**, tendremos,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A) \cdot P(E/A) + P(B) \cdot P(E/B) + P(C) \cdot P(E/C) = \\ &= \frac{4}{7} \cdot 0,4 + \frac{2}{7} \cdot 0,6 + \frac{1}{7} \cdot 0,2 = \frac{3}{7} \approx 0,428571 \end{aligned}$$

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que sea del tipo C sabiendo que el producto NO es destinado a la exportación.

Se trata de calcular la **probabilidad del suceso** C/E^c . Aplicando el **teorema de Bayes**, tendremos,

$$P(C/E^c) = \frac{P(C \cap E^c)}{P(E^c)} = \frac{P(C) \cdot P(E^c/C)}{1 - p(E)} = \frac{1/7 \cdot 0,8}{1 - 3/7} = \frac{8/70}{4/7} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & m \\ 2 & m & -1 \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

- a) (0,75 puntos) Calcule algebraicamente los valores de m para los que la matriz A tiene matriz inversa.
- b) (0,75 puntos) Calcule algebraicamente el rango de la matriz B justificándolo por el método de los determinantes.

a) (0,75 puntos) Calcule algebraicamente los valores de m para los que la matriz A tiene matriz inversa.

Al ser una matriz cuadrada, tendrá inversa si su determinante es distinto de cero. Calculamos su determinante,

$$\begin{vmatrix} m & 0 & m \\ 2 & m & -1 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = m^3 - 2m - 0 - 2m^2 - m - 0 = m^3 - 2m^2 - 3m$$

Igualamos a cero el determinante y resolvemos la ecuación resultante para saber para qué valores no existe matriz inversa,

$$m^3 - 2m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow m \cdot (m^2 - 2m - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m^2 - 2m - 3 = 0 \end{cases}$$

$$m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{+2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{+2 \pm 4}{2} = \begin{cases} m = \frac{+2 + 4}{2} = +3 \\ m = \frac{+2 - 4}{2} = -1 \end{cases}$$

Concluimos que existe matriz inversa si $m \neq -1, m \neq 0, m \neq +3$, es decir,

$$\exists A^{-1} \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{-1, 0, +3\}.$$

b) (0,75 puntos) Calcule algebraicamente el rango de la matriz B justificándolo por el método de los determinantes.

El rango de la matriz no puede ser superior a 3. Buscamos el orden del mayor menor que tenga determinante distinto de cero. Comenzamos con los cuatro menores de orden 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 16 + 0 + 0 - 16 - 0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 30 - 24 + 0 - 0 - 16 + 10 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 0 - 0 - 0 - 0 - 20 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 0 - 32 - 48 - 0 + 60 = 0$$

Como todos los determinantes de orden 3 son nulos entonces $Rg(B) < 3$

Buscamos un menor de orden 2 que tenga determinante distinto de cero. Calculando el determinante del menor que señalamos en rojo

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Tendremos que,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8 \neq 0$$

Por lo tanto, $Rg(B) = 2$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

4. En una clase de 21 alumnas, 9 estudian ruso, 7 practican algún deporte y tan solo 3 hacen ambas cosas. Si elegimos una alumna al azar en esta clase, y argumentando algebraicamente,

- (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que no practique deportes.
- (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que practique algún deporte o estudie ruso.
- (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que ni practique deporte ni estudie ruso.
- (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que practique algún deporte pero no estudie ruso.
- (0,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, si sabemos que estudia ruso, practique algún deporte?
- (0,25 puntos) Los sucesos “estudiar ruso” y “practicar algún deporte” en esta clase, ¿son compatibles o incompatibles? ¿Son independientes o dependientes? Razone y respalde sus respuestas con un argumento matemático sólido

Consideramos los siguientes sucesos,

$$\begin{aligned} R &= \text{La alumna estudia ruso} \\ D &= \text{La alumna hace algún deporte} \end{aligned}$$

En ese caso el enunciado nos informa de que,

$$P(R) = \frac{9}{21} \quad P(D) = \frac{7}{21} \quad P(R \cap D) = \frac{3}{21}$$

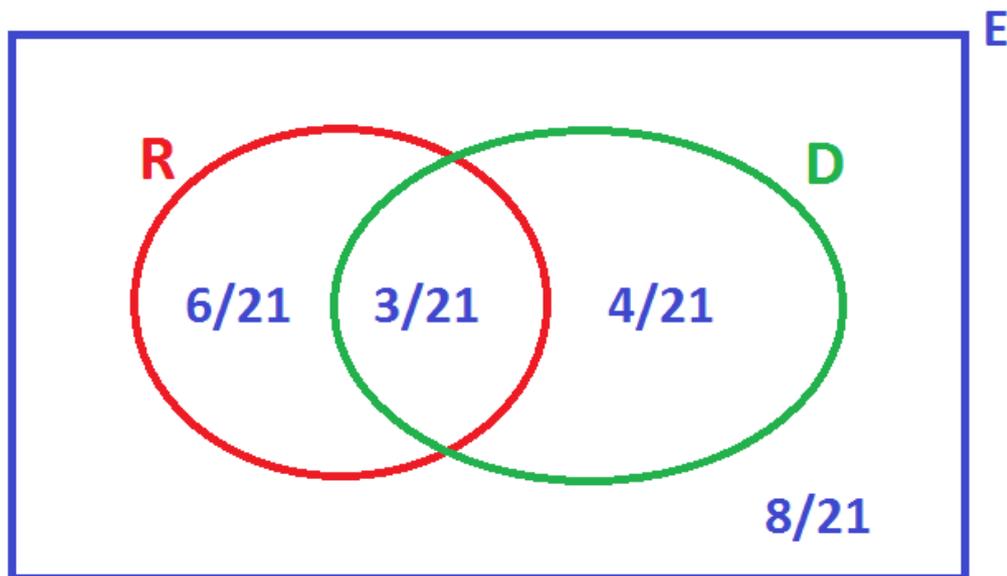
El enunciado anterior se puede representar mediante diagramas de Venn, donde las probabilidades de cada uno de los cuatro recintos se pueden calcular del siguiente modo,

$$P(R \cap D^c) = P(R) - P(R \cap D) = \frac{9}{21} - \frac{3}{21} = \frac{6}{21}$$

$$P(R^c \cap D) = P(D) - P(R \cap D) = \frac{7}{21} - \frac{3}{21} = \frac{4}{21}$$

$$\begin{aligned} P(R^c \cap D^c) &= P((R \cup D)^c) = 1 - P(R \cup D) = 1 - (P(R) + P(D) - P(R \cap D)) = \\ &= 1 - \left(\frac{9}{21} + \frac{7}{21} - \frac{3}{21} \right) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21} \end{aligned}$$

El diagrama de Venn sería el siguiente,



En tal caso,

a) (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que no practique deportes.

Se pide la probabilidad del suceso D^c . En ese caso,

$$P(D^c) = 1 - P(D) = 1 - \frac{7}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3} = 0,\overline{6}$$

b) (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que practique algún deporte o estudie ruso.

Se pide la probabilidad del suceso $D \cup R$. En ese caso,

$$P(R \cup D) = P(R) + P(D) - P(D \cap R) = \frac{9}{21} + \frac{7}{21} - \frac{3}{21} = \frac{13}{21} = 0,\overline{619047}$$

c) (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que ni practique deporte ni estudie ruso.

Se pide la probabilidad del suceso $D^c \cap R^c$. En ese caso,

$$P(R^c \cap D^c) = P((R \cup D)^c) = 1 - P(R \cup D) = 1 - \frac{13}{21} = \frac{8}{21} = 0,\overline{380952}$$

d) (0,25 puntos) Calcule la probabilidad de que practique algún deporte pero no estudie ruso.

Se pide la probabilidad del suceso $D \cap R^c$. En ese caso,

$$P(R^c \cap D) = P(D) - P(R \cap D) = \frac{7}{21} - \frac{3}{21} = \frac{4}{21} = 0,\overline{190476}$$

e) (0,25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, si sabemos que estudia ruso, practique algún deporte?

Se pide la probabilidad del suceso D/R . En ese caso,

$$P(D/R) = \frac{P(R \cap D)}{P(R)} = \frac{3/21}{9/21} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0,3$$

f) (0,25 puntos) Los sucesos “estudiar ruso” y “practicar algún deporte” en esta clase, ¿son compatibles o incompatibles? ¿Son independientes o dependientes? Razone y respalde sus respuestas con un argumento matemático sólido.

Los sucesos R y D son compatibles ya que $R \cap D \neq \emptyset$

Los sucesos R y D son independientes si,

$$P(R \cap D) = P(R) \cdot P(D)$$

Como,

$$P(R \cap D) = \frac{3}{21}, \quad P(R) \cdot P(D) = \frac{9}{21} \cdot \frac{7}{21} = \frac{63}{21^2} = \frac{3}{21}$$

Entonces los sucesos son independientes.

[Puntuación máxima: 2,75 puntos]

5. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 8x + 3 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{5x - 1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) (0,5 puntos) Estudie algebraicamente la continuidad de la función en $x = 2$.
b) (1,25 puntos) Calcule **algebraicamente** el área encerrada por la función y el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.
c) (1 punto) Calcule **algebraicamente** el área encerrada por la función y el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

a) (0,5 puntos) Estudie algebraicamente la continuidad de la función en $x = 2$.

La función $f(x)$ será continua en $x = 2$ si,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

Como,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4x^2 - 8x + 3) = 4 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{5x - 1} = \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$f(2) = \sqrt{5 \cdot 2 - 1} = \sqrt{9} = 3$$

Entonces podemos decir que $f(x)$ será continua en $x = 2$

b) (1 punto) Calcule algebraicamente el área encerrada por la función y el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Comprobamos si la función corta al eje OX entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

$$4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{2 \cdot 4} = \frac{+8 \pm \sqrt{64 - 48}}{8} =$$

$$= \frac{+8 \pm \sqrt{16}}{8} = \frac{+8 \pm 4}{8} = \frac{+2 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{+2 - 1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \\ \frac{+2 + 1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \end{cases}$$

Por tanto, hay un corte en $x = 1,5$ con el eje OX entre $x = 1$ y $x = 2$.

Si tomamos $x = 1$ y lo sustituimos en la función,

$$f(1) = 4 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 < 0$$

Por lo tanto, entre $x = 1$ y $x = 1,5$, la función está por debajo del eje OX.

Si tomamos $x = 2$ y lo sustituimos en la función,

$$f(2) = 4 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3 > 0$$

Por lo tanto, entre $x = 1,5$ y $x = 2$, la función está por encima del eje OX.

En ese caso, el área pedida se calcula,

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{1,5} (0 - (4x^2 - 8x + 3))dx + \int_{1,5}^2 ((4x^2 - 8x + 3) - 0)dx = \\ &= - \int_1^{1,5} (4x^2 - 8x + 3)dx + \int_{1,5}^2 (4x^2 - 8x + 3)dx = \\ &= - \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 3x \right]_1^{1,5} + \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} + 3x \right]_{1,5}^2 = \\ &= - \left(\frac{4 \cdot 1,5^3}{3} - \frac{8 \cdot 1,5^2}{2} + 3 \cdot 1,5 \right) + \left(\frac{4 \cdot 2^3}{3} - \frac{8 \cdot 2^2}{2} + 3 \cdot 2 \right) - \left(\frac{4 \cdot 1,5^3}{3} - \frac{8 \cdot 1,5^2}{2} + 3 \cdot 1,5 \right) = \\ &= -(4,5 - 4,5) + \left(\frac{4}{3} - 1 \right) + \left(\frac{32}{3} - 10 \right) - (4,5 - 4,5) = \\ &= -0 + (12 - 1 - 10) - 0 = 1 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

c) (1 punto) Calcule algebraicamente el área encerrada por la función y el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

La función es positiva por lo que el área pedida se calcula mediante,

$$\begin{aligned} A &= \int_2^3 \sqrt{5x-1} dx = \frac{1}{5} \cdot \int_2^3 5 \cdot (5x-1)^{1/2} dx = \frac{1}{5} \cdot \left[\frac{(5x-1)^{3/2}}{3/2} \right]_2^3 = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{(5 \cdot 3 - 1)^{3/2}}{3/2} - \frac{(5 \cdot 2 - 1)^{3/2}}{3/2} \right) = \\ &= \frac{2}{15} \cdot (14\sqrt{14} - 27) = \frac{28\sqrt{14} - 54}{15} \text{ u}^2 \approx 3,38442 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

Se consideran dos sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,25$ y $P(A \cup B) = 0,625$. Responda de forma matemática y razonada o calcule lo que se pide en los siguientes casos:

- a) (0,25 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B . ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$? Razone algebraicamente.
- b) (0,25 puntos) ¿Son A y B independientes? Razone algebraicamente.
- c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ donde \bar{A} denota al suceso complementario de A y \bar{B} denota al suceso complementario de B .
- d) (0,5 puntos) Halle $P(\bar{B}/A)$

a) (0,25 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B . ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$? Razone algebraicamente.

Calculamos la intersección de los sucesos C y $A \cup B$. Si es vacía los sucesos son incompatibles y si no es vacía son compatibles.

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$$

Como el suceso C es incompatible con A y con B entonces,

$$C \cap A = \emptyset \quad \text{y} \quad C \cap B = \emptyset$$

Y en ese caso,

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

Por lo tanto, **C y $A \cup B$ son incompatibles.**

b) (0,25 puntos) ¿Son A y B independientes? Razone algebraicamente.

Los sucesos A y B son independientes si ocurre que,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Por una parte tenemos que,

$$P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125$$

Por otra parte tenemos que,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,5 + 0,25 - 0,625 = 0,75 - 0,625 = 0,125$$

Por lo tanto,

$$P(A \cap B) = 0,125 = P(A) \cdot P(B)$$

Y concluimos que **los sucesos A y B son independientes.**

c) (0,5 puntos) Calcule la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ donde \bar{A} denota al suceso complementario de A y \bar{B} denota al suceso complementario de B .

Aplicando las leyes de Morgan,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$$

Y en ese caso,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,625 = 0,375$$

d) (0,5 puntos) Halle $P(\bar{B}/A)$

$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,5 - 0,125}{0,5} = 0,75$$