CUADERNILLO 4

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Entrega límite **JUEVES, 16 de ENERO de 2025 (hora de inicio de clase)**

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de **11 puntos.**
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$Nota\ def. =\ Notal\ total/(Días\ de\ retraso + 1)$$

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 2,5 puntos = 0,5 + 0,75 + 1 puntos]

1. Calcula las siguientes integrales,

$$a)\ \int_0^{\pi/3} \frac{5\cdot sen(x)}{\sqrt{9-4\cos^2 x}}\,dx \qquad b)\ \int_1^{e} (x+2)\cdot \ln(x)\,dx \qquad c)\ \int_0^{\pi/2} e^x\cdot \cos(x)\,dx$$

[Puntuación máxima: 1 punto]

2. Sea la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$. Se considera la función $g(x) = f(-x)$. Calcular algebraicamente el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

[Puntuación máxima: 1 punto]

3. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, calcular el área de la región delimitada por las funciones $f(x)$ y $g(x) = x \cdot (x - 3)$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

4. Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{1+x^2}$, calcular algebraicamente el área de la región acotada delimitada por la recta $y = \frac{1}{2}$ y la gráfica de $f(x)$.

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

5. i) (0,5 puntos) Dado $a \neq 0$ con $\frac{2}{a} \neq \frac{k\pi}{2}$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, demuestre algebraicamente, a partir de cálculos trigonométricos, que

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \pm\sqrt{\frac{a^2}{a^2+4}}$$

ii) (0,5 puntos) A partir de lo anterior demuestre que

$$\text{sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \pm\sqrt{\frac{4}{a^2+4}}$$

ii) (1,5 puntos) Sea la región R del plano definida por la parte positiva de los ejes coordenados y la curva $y = 2\cos x$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Halle algebraicamente sin usar la calculadora, el valor del parámetro a para el que la curva $y = a \cdot sen\, x$ divide la región R en dos regiones de igual área.

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

Construya cada ejemplo que se le pide algebraicamente, sin representar ni utilizar la calculadora.

a) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.

b) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1, 1)$.

c) (0.5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CUADERNO Nº 4 DE MATEMÁTICAS II

[Puntuación máxima: 2,5 puntos = 0,5 + 0,75 + 1 puntos]

1. Calcula las siguientes integrales,

$$a)\quad \int_0^{\pi/3} \frac{5\cdot sen(x)}{\sqrt{9-4\cos^2 x}}\,dx \qquad b)\quad \int_1^{e} (x+2)\cdot \ln(x)\,dx \qquad c)\quad \int_0^{\pi/2} e^x\cdot \cos(x)\,dx$$

$$\boldsymbol{a)}\quad \int_0^{\pi/3} \frac{\mathbf{5\cdot sen(x)}}{\sqrt{\mathbf{9-4\cos^2 x}}}\,\boldsymbol{dx}$$

Se trata de una integral arcoseno,

$$\int_0^{\pi/3} \frac{5\cdot sen(x)}{\sqrt{9-4\cos^2 x}}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{5\cdot sen(x)}{\sqrt{9\cdot\left(1-\frac{4\cos^2 x}{9}\right)}}\,dx = \frac{5}{3}\cdot\int_0^{\pi/3} \frac{sen(x)}{\sqrt{1-\frac{4\cos^2 x}{9}}}\,dx =$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\int_0^{\pi/3} \frac{sen(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{2\cos x}{3}\right)^2}}\,dx = \frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\int_0^{\pi/3} \frac{-\frac{2}{3}\cdot sen(x)}{\sqrt{1-\left(\frac{2\cos x}{3}\right)^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{5}{2}\cdot\left[arcsen\left(\frac{2\cos x}{3}\right)\right]_0^{\pi/3} = -\frac{5}{2}\cdot\left(arcsen\left(\frac{2\cos(\pi/3)}{3}\right)-arcsen\left(\frac{2\cos 0}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\left(-arcsen\left(\frac{1}{3}\right)+arcsen\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{b)}\quad \int_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{e}} (\boldsymbol{x}+\mathbf{2})\cdot \mathbf{ln}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{dx}$$

Actuamos mediante integración por partes,

$$u = ln(x) \qquad\qquad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = (x+2)dx \quad v = \int (x+2)dx = \frac{(x+2)^2}{2}$$

En ese caso,

$$\int_1^e (x+2)\cdot\ln(x)\,dx = \left[\frac{(x+2)^2\cdot ln(x)}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{(x+2)^2}{2x}dx$$

Operando

$$\int_1^e (x+2)\cdot \ln(x)\,dx = \left[\frac{(x+2)^2\cdot ln(x)}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{(x+2)^2}{2x}\,dx =$$

$$= \frac{(e+2)^2\cdot ln(e)}{2} - \frac{(1+2)^2\cdot ln(1)}{2} - \frac{1}{2}\cdot\int_1^e \frac{x^2+4x+4}{x}\,dx =$$

$$= \frac{(e+2)^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\int_1^e \left(x+4+\frac{4}{x}\right)dx = \frac{(e+2)^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x^2}{2}+4x+4\cdot\ln|x|\right]_1^e =$$

$$= \frac{(e+2)^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^2}{2}+4e+4\cdot\ln e - \left(\frac{1^2}{2}+4\cdot 1+4\cdot\ln 1\right)\right) =$$

$$= \frac{e^2+4+4e}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e^2}{2}+4e+4-\frac{1}{2}-4\right) = \frac{e^2}{2}+2+2e-\frac{e^2}{4}-2e+\frac{1}{4} = \frac{e^2+9}{4}$$

c) $\displaystyle \int_0^{\pi/2} \boldsymbol{e^x\cdot \cos(x)\,dx}$

Actuamos mediante integración por partes,

$$u = e^x \qquad du = e^x dx$$
$$dv = \cos(x)\,dx \quad v = \int cos(x)\,dx = sen(x)$$

En ese caso,

$$\int_0^{\pi/2} e^x\cdot\cos(x)\,dx = [e^x\cdot sen(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x\cdot \text{sen}(x)\,dx =$$

$$= e^{\pi/2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - e^0\cdot sen\,0 - \int_0^{\pi/2} e^x\cdot\text{sen}(x)\,dx = e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x\cdot\text{sen}(x)\,dx$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\pi/2} e^x\cdot\cos(x)\,dx = e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x\cdot\text{sen}(x)\,dx$$

Actuamos nuevamente mediante integración por partes,

$$u = e^x \qquad\qquad du = e^x dx$$
$$dv = \text{sen}(x)\, dx \quad v = \int sen(x)\, dx = -\cos(x)$$

En ese caso,

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx = e^{\pi/2} - \left(\left[e^x \cdot (-cos(x)) \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cdot (-\cos(x)) dx \right) =$$

$$= e^{\pi/2} - \left(-e^{\pi/2} \cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + e^0 \cdot \cos(0) + \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx \right) =$$

$$= e^{\pi/2} - 1 - \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx = e^{\pi/2} - 1 - \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx$$

Y despejando la integral que queremos calcular, obtenemos,

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx = e^{\pi/2} - 1 - \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx + \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx = e^{\pi/2} - 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx = e^{\pi/2} - 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos(x)\, dx = \frac{e^{\pi/2} - 1}{2}$$

[Puntuación máxima: 1 punto]

2. Sea la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$. Se considera la función $g(x) = f(-x)$. Calcular algebraicamente el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

La función $g(x)$ tiene por expresión analítica,

$$g(x) = f(-x) = (-x)^4 + \pi \cdot (-x)^3 + \pi^2 \cdot (-x)^2 + \pi^3 \cdot (-x) + \pi^4$$

$$= x^4 - \pi \cdot x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$$

Igualamos las dos funciones $f(x)$y $g(x)$para calcular sus puntos de corte,

$$f(x) = g(x) \iff x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 = x^4 - \pi \cdot x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4 \iff$$

$$\iff 2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 0 \iff 2\pi x \cdot (x^2 + 1) = 0 \iff x = 0$$

Además, como,

$$f(1) = 1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \pi^4 \quad y \quad g(1) = 1 - \pi + \pi^2 - \pi^3 + \pi^4$$

Entonces $f(x) > g(x)\ \forall\, x \in (0, \pi)$.

En ese caso, el área pedida viene dada por,

$$Área = \int_0^\pi \big(f(x) - g(x)\big)\, dx =$$

$$\int_0^\pi \big((x^4 + \pi \cdot x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4) - (x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4)\big) dx =$$

$$= \int_0^\pi (2\pi \cdot x^3 + 2\pi^3 x) dx = \left[2\pi \cdot \frac{x^4}{4} + 2\pi^3 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^\pi =$$

$$= \left[\pi \cdot \frac{x^4}{2} + \pi^3 \cdot x^2\right]_0^\pi = \left(\pi \cdot \frac{\pi^4}{2} + \pi^3 \cdot \pi^2\right) - \left(\pi \cdot \frac{0^4}{2} + \pi^3 \cdot 0^2\right) =$$

$$= \frac{\pi^5}{2} + \pi^5 = \frac{3\pi^5}{2}\ u^2 \approx 459.02952\ u^2$$

[Puntuación máxima: 1 punto]

3. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, calcular el área de la región delimitada por las funciones $f(x)$ y $g(x) = x \cdot (x-3)$

Igualamos las dos funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = x \cdot (x-3)$ para calcular sus puntos de corte,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 3x = x \cdot (x-3) \Leftrightarrow x^3 - 3x = x^2 - 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, las funciones $f(x)\ y\ g(x)$ crean una región limitada en el intervalo $[0, +1]$.

Como,

$$f(0{,}5) = 0{,}5^3 - 3 \cdot 0{,}5 = 0{,}125 - 1{,}5 = -1{,}375$$

$$g(0{,}5) = 0{,}5^2 - 3 \cdot 0{,}5 = 0{,}25 - 1{,}5 = -1{,}25$$

Entonces $f(x) \leq g(x)\ \ \forall x \in [0, +1]$.

En ese caso, el área pedida viene dada por,

$$Área = \int_0^1 \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_0^1 \big(x^2 - 3x - (x^3 - 3x)\big)dx =$$

$$\int_0^1 (x^2 - 3x - x^3 + 3x)dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}\ u^2$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

4. Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{1+x^2}$, calcular algebraicamente el área de la región acotada delimitada por la recta $y = \frac{1}{2}$ y la gráfica de $f(x)$.

Igualamos las dos funciones $f(x) = \frac{|x|}{1+x^2}$ y $g(x) = \frac{1}{2}$ para calcular sus puntos de corte,

$$f(x) = g(x) \iff \frac{|x|}{1+x^2} = \frac{1}{2}$$

- Si $x \geq 0$ entonces
$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \iff 2x = 1 + x^2 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$$

- Si $x < 0$ entonces
$$\frac{-x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \iff -2x = 1 + x^2 \iff x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x = -1$$

Por lo tanto, las funciones $f(x)$y $g(x)$ crean una región limitada en el intervalo $[-1, +1]$.

Como,

$$f(0) = 0 \quad , \quad g(0) = \frac{1}{2}$$

Entonces $g(x) \geq f(x) \;\; \forall x \in [-1, +1]$.

En ese caso, el área pedida viene dada por,

$$Área = \int_{-1}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{|x|}{1+x^2}\right)dx$$

Como $f(x)$ es una función par ya que,

$$f(-x) = \frac{|-x|}{1+(-x)^2} = \frac{|x|}{1+x^2} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Entonces,

$$Área = 2 \cdot \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = 2 \cdot \left(\int_{0}^{1} \frac{1}{2}dx - \int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^2}dx\right)$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln|1+x^2|\right]_0^1 = [\, x - \ln|1+x^2|]_0^1 =$$

$$= (1 - \ln|1+1^2|) - (0 - \ln|1+0^2|) = 1 - \ln(2)\ u^2 \approx 0.3069\, u^2$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

5. i) (0,5 puntos) Dado $a \neq 0$ con $\frac{2}{a} \neq \frac{k\pi}{2}$ $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, demuestre algebraicamente, a partir de cálculos trigonométricos, que

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \pm\sqrt{\frac{a^2}{a^2+4}}$$

ii) (0,5 puntos) A partir de lo anterior demuestre que

$$\operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \pm\sqrt{\frac{4}{a^2+4}}$$

ii) (1,5 puntos) Sea la región R del plano definida por la parte positiva de los ejes coordenados y la curva $y = 2\cos x$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Halle algebraicamente sin usar la calculadora, el valor del parámetro a para el que la curva $y = a \cdot sen\, x$ divide la región R en dos regiones de igual área.

i) (0,5 puntos) Dado $\boldsymbol{a \neq 0}$ con $\frac{2}{a} \neq \frac{k\pi}{2}$ $\forall\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$, demuestre algebraicamente, a partir de cálculos trigonométricos, que

$$\boldsymbol{\cos\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \pm\sqrt{\frac{a^2}{a^2+4}}}$$

Como,

$$1 + tan^2\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \frac{1}{cos^2\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right)}$$

Entonces,

$$1 + \left[tan\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right)\right]^2 = \frac{1}{cos^2\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right)} \iff 1 + \left(\frac{2}{a}\right)^2 = \frac{1}{cos^2\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right)}$$

Por lo tanto,

$$cos^2\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{a}\right)^2} \iff cos^2\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \frac{a^2}{a^2+4}$$

$$\iff cos\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \pm\sqrt{\frac{a^2}{a^2+4}}$$

ii) (0,5 puntos) A partir de lo anterior demuestre que

$$\mathbf{sen}\left(\mathbf{arctan}\left(\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{a}}\right)\right) = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{a}^{2}+\mathbf{4}}}$$

Como,

$$sen\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \sqrt{1 - cos^{2}\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right)}$$

Entonces,

$$sen\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \pm\sqrt{1 - cos^{2}\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right)} = \pm\sqrt{1 - \frac{a^{2}}{a^{2}+4}}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{a^{2}+4-a^{2}}{a^{2}+4}}$$

Por lo tanto,

$$sen\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) = \pm\sqrt{\frac{4}{a^{2}+4}}$$

ii) (1,5 puntos) Sea la región $\boldsymbol{R}$ del plano definida por la parte positiva de los ejes coordenados y la curva $\boldsymbol{y = 2\cos x}$ para $\boldsymbol{0 \le x \le \frac{\pi}{2}}$. Halle algebraicamente sin usar la calculadora, el valor del parámetro $\boldsymbol{a}$ para el que la curva $\boldsymbol{y = a \cdot sen\, x}$ divide la región $\boldsymbol{R}$ en dos regiones de igual área.

Calculamos el punto de corte de las funciones

$$f(x) = 2\cos x \quad , \quad g(x) = a \cdot sen\, x$$

Para ello, igualamos las dos funciones,

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 2 \cdot \cos(x) = a \cdot sen\, x \;\Leftrightarrow\; \frac{2}{a} = tan\, x \;\Leftrightarrow\; x = \arctan\left(\frac{2}{a}\right)$$

Como,

$$\int_{0}^{\pi/2} 2cos(x)dx = 2 \cdot [sen(x)]_{0}^{\pi/2} = 2 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0)\right] = 2 \cdot 1 = 2\, u^{2}$$

Entonces el valor $\arctan\left(\frac{2}{a}\right)$ tiene que dividir la región en dos subregiones de área $1\, u^{2}$.

En ese caso,

$$\int_{0}^{arctan(2/a)} \big(2cos(x) - asen(x)\big)dx = 1 \;\Leftrightarrow\; [2sen(x) + acos(x)]_{0}^{arctan(2/a)} = 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2sen\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) + acos\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) - 2sen(0) - acos(0) = 1$$

Si $0 \leq \arctan\left(\frac{2}{a}\right) \leq \frac{\pi}{2}$ entonces sen $\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) \geq 0$ y $\cos\left(\arctan\left(\frac{2}{a}\right)\right) \geq 0$

Aplicando lo demostrado en el apartado i) y ii), tendremos que,

$$2\sqrt{\frac{4}{a^2+4}} + a \cdot \sqrt{\frac{a^2}{a^2+4}} - a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{\sqrt{a^2+4}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+4}} = 1 + a \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2+4}{\sqrt{a^2+4}} = 1 + a \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2+4} = 1 + a \quad \Leftrightarrow$$

Elevando al cuadrado,

$$a^2 + 4 = 1 + a^2 + 2a \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 2a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} = a$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

Construya cada ejemplo que se le pide algebraicamente, sin representar ni utilizar la calculadora.

a) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.

b) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(1, 1)$.

c) (0.5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

a) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $\boldsymbol{y = x}$ en el punto $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Sea la función polinómica de grado 2 con expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

En ese caso,

- Si su gráfica es tangente a la recta $y = x$ en $(0,0)$ entonces $f'(0) = 1$

  Como $f'(x) = 2ax + b$ entonces, $f'(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a \cdot 0 + b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1$

- Si su gráfica es tangente a la recta $y = x$ en $(0,0)$ entonces $f(0) = 0$

  Y en tal caso, $f(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0$

Por lo tanto, cualquier función polinómica de grado 2 del tipo

$$f(x) = ax^2 + x \ , \ a \in \mathbb{R}$$

Cumple que gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.

b) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$.

Sea la función polinómica de grado 2 con expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- Si tiene un máximo en $(1,1)$ entonces $f'(1) = 0 \ y \ f''(1) < 0$

  Como $f'(x) = 2ax + b$ entonces, $f'(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a \cdot 1 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -2a$

b) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$.

Sea la función polinómica de grado 2 con expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

En ese caso,

- Si tiene un máximo en $(1,1)$ entonces $f'(1) = 0$ y $f''(1) < 0$

  Como $f'(x) = 2ax + b$ entonces,

$$f'(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a \cdot 1 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -2a$$

  Como $f''(x) = 2a$ entonces,

$$f''(1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < 0$$

- Si su gráfica pasa por $(1,1)$ entonces $f(1) = 1$

  En ese caso,

$$f(1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c = 1$$

  Como $b = -2a$ entonces,

$$a + b + c = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a - 2a + c = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1 + a$$

Por lo tanto, cualquier función polinómica de grado 2 del tipo

$$f(x) = ax^2 - 2ax + (1 + a)\ , \ a \in \mathbb{R}^-$$

Cumple que gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $(0, 0)$.

c) (0.5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

Sea la función polinómica de grado 2 con expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

En ese caso, si tiene dos extremos relativos, entonces tendrá dos valores de abcisa para los que la derivada es cero. Como $f'(x) = 2ax + b$ es un polinomio de grado 1 entonces solo puede haber un valor de abcisa con derivada cero.

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}$$

En ese caso, no puede hacer dos extremos relativos en $\mathbb{R}$ para la función $f(x)$, que es polinómica de grado 2.