CONTROL 5

Análisis y enfoques
Matemáticas II

VIERNES 17 de ENERO de 2025

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- **La puntuación máxima para esta prueba es de 11 puntos.**
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.

  Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 2,25 puntos = 0,75 + 0,75 + 0,75 puntos]

1. Calcula algebraicamente sin calculadora las siguientes integrales,

$$a)\quad \int_3^4 \frac{x^3+1}{x-2}dx \qquad b)\quad \int_e^{e^2} \frac{3}{x\cdot(\ln(x))^2}dx \qquad c)\quad \int_0^{\pi/2} \frac{sen\ 2x}{cos^4x+1}dx$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

2. Dada la función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$. **<u>Hallar algebraicamente sin calculadora</u>** el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

3. Calcule algebraicamente sin calculadora el área del total de la superficie que delimitan las gráficas de las funciones

$$f(x) = 3 - 3x + x^3 \quad , \quad g(x) = x + 3$$

[Puntuación máxima: 3,25 puntos]

4. Dada la función $f(x) = \begin{cases} sen^2 x & si\ x < 0 \\ \operatorname{arcsen}(x) & si\ x \geq 0 \end{cases}$'

a) (0,75 puntos) Demostrar que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

b) (2,5 puntos) **Calcular algebraicamente sin calculadora** el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 1$, $y = 0$.

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

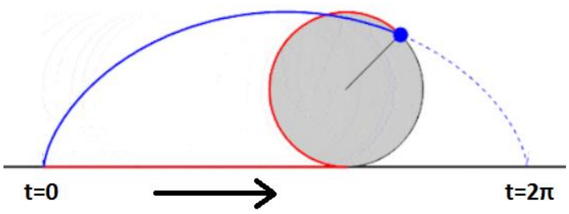
5. i) (1 punto) A partir de la resta de la fórmula fundamental de la trigonometría y la fórmula del coseno del ángulo doble, aplicadas sobre el ángulo $\frac{t}{2}$, pruebe algebraicamente que

$$\sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{t}{2}\right) = +\sqrt{1 - \cos t} \quad t \in [0, 2\pi]$$

ii) (1,5 puntos) Dadas las ecuaciones paramétricas respecto del parámetro $t \in [0, 2\pi]$ por coordenadas de un arco de cicloide

$$x(t) = a \cdot (t - sen\, t)$$

$$y(t) = a \cdot (1 - \cos t)$$



Y sabiendo que la longitud de una curva en paramétricas $\left(x(t), y(t)\right)$ para $t \in [p, q]$ viene dada por

$$Longitud\ curva = \int_p^q \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Calcular algebraicamente sin calculadora, la longitud del arco de cicloide para $t \in [0, 2\pi]$.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CUADERNO Nº 4 DE MATEMÁTICAS II

[Puntuación máxima: 2,25 puntos = 0,75 + 0,75 + 0,75 puntos]

1. Calcula las siguientes integrales,

$$a)\ \int_3^4 \frac{x^3+1}{x-2}dx \qquad b)\ \int_e^{e^2} \frac{3}{x\cdot(\ln(x))^2}dx \qquad c)\ \int_0^{\pi/2} \frac{sen\ 2x}{cos^4x+1}dx$$

$$\boldsymbol{a)\ \int_3^4 \frac{x^3+1}{x-2}dx}$$

Dividimos el polinomio numerador entre el polinomio denominador, por Ruffini,

	+1			+1
2		+2	+4	+8
	+1	+2	+4	+9

En ese caso, tendremos que,

$$\int_3^4 \frac{x^3+1}{x-2}dx = \int_3^4 \left(x^2+2x+4+\frac{9}{x-2}\right)dx$$

En ese caso,

$$\int_3^4 \frac{x^3+1}{x-2}dx = \int_3^4 \left(x^2+2x+4+\frac{9}{x-2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+4x+9\cdot ln|x-2|\right]_3^4 =$$

$$= \frac{4^3}{3}+\frac{2\cdot 4^2}{2}+4\cdot 4+9\cdot ln|4-2| - \left(\frac{3^3}{3}+\frac{2\cdot 3^2}{2}+4\cdot 3+9\cdot ln|3-2|\right) =$$

$$= \frac{64}{3}+16+16+9\cdot ln\ 2-(9+9+12+9\cdot ln\ 1) =$$

$$= \frac{64}{3}+32+9\cdot ln\ 2-30 = \frac{70}{3}+9\cdot ln\ 2 \approx 29.572$$

$\boldsymbol{b})\ \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x}\cdot(\mathbf{ln}(\boldsymbol{x}))^{\mathbf{2}}}\,\boldsymbol{dx}$

Se trata de una integral de tipo potencial,

$$\int_e^{e^2} \frac{3}{x\cdot(\ln(x))^2}dx = 3\cdot\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^{-2}dx = 3\cdot\left[\frac{\left(ln(x)\right)^{-1}}{-1}\right]_e^{e^2} = 3\cdot\left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_e^{e^2} =$$

$$= 3\cdot\left(-\frac{1}{\ln(e^2)}+\frac{1}{\ln e}\right) = 3\cdot\left(-\frac{1}{2\ln(e)}+\frac{1}{\ln e}\right) = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right) = \frac{3}{2}$$

$\boldsymbol{c})\ \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\boldsymbol{sen\ 2x}}{\boldsymbol{cos^4x+1}}\,\boldsymbol{dx}$

Se trata de una integral arcotangente,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{sen\ 2x}{cos^4x+1}dx = \int_0^{\pi/2}\frac{sen\ 2x}{1+(cos^2x)^2}dx$$

Como,

$$(\cos^2(x))' = 2\cdot\cos(x)\cdot\big(-sen(x)\big) = -2sen(x)\cos(x) = -sen\ 2x$$

Entonces,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{sen\ 2x}{cos^4x+1}dx = \int_0^{\pi/2}\frac{sen\ 2x}{1+(cos^2x)^2}dx = -\int_0^{\pi/2}\frac{-sen\ 2x}{1+(cos^2x)^2}dx =$$

$$= -[\arctan(\cos^2 x)]_0^{\pi/2} = -\arctan\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \arctan(\cos^2(0)) =$$

$$= -\arctan(0) + \arctan(1) = -0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \approx 0.78539$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

2. Dada la función $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$. Hallar el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

La función $f(x)$ se puede expresar del modo,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x<0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ 0\leq x \end{cases}$$

En ese caso, y como la función es siempre no negativa,

$$\forall\, x\in\mathbb{R}\ \ ,\ \ f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}\geq 0$$

Tendremos que el área vendrá dada por,

$$Área=\int_{-1}^{0}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx+\int_{0}^{+1}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

Además, se trata de una función que presenta simetría par ya que

$$\forall\, x\in\mathbb{R}\ \ ,\ \ f(-x)=\frac{|-x|}{\sqrt{(-x)^2+9}}=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}=f(x)$$

Por tanto,

$$Área=\int_{-1}^{0}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx+\int_{0}^{+1}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=2\cdot\int_{0}^{+1}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$$

Estamos ante una integral de tipo potencial,

$$2\cdot\int_{0}^{+1}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx=2\cdot\int_{0}^{+1}x\cdot(x^2+9)^{-1/2}\,dx=\int_{0}^{+1}2x\cdot(x^2+9)^{-1/2}\,dx=$$

$$=\left[\frac{(x^2+9)^{1/2}}{1/2}\right]_0^{+1}=2\cdot(1^2+9)^{1/2}-2\cdot(0^2+9)^{1/2}=2\cdot\sqrt{10}-6\,u^2\approx 0.32455u^2$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

3. Calcule algebraicamente sin calculadora el área del total de la superficie que delimitan las gráficas de las funciones

$$f(x) = 3 - 3x + x^3 \quad , \quad g(x) = x + 3$$

Igualamos las dos funciones $f(x) = x^3 - 3x + 3$ y $g(x) = x + 3$ para calcular sus puntos de corte,

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3x + 3 = x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = +2 \end{cases}$$

Por lo tanto, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ crean dos regiones, una comprendida entre las abcisas $x = -2$ y $x = 0$ y la otra comprendida entre las abcisas $x = 0$ y $x = 2$

Para la comprendida entre $x = -2$ y $x = 0$ tendremos que como,

$$f(-1) = 3 - 3 \cdot (-1) + (-1)^3 = 3 + 3 - 1 = 5$$

$$g(-1) = -1 + 3 = 2$$

Entonces $f(x) > g(x)$ $\forall x \in (-2,0)$.

Para la comprendida entre $x = 0$ y $x = 2$ tendremos que como,

$$f(1) = 3 - 3 \cdot 1 + 1^3 = 3 - 3 + 1 = 1$$

$$g(1) = 1 + 3 = 4$$

Entonces $f(x) < g(x)$ $\forall x \in (0, +2)$.

En ese caso, el área pedida viene dada por,

$$Área = \int_{-2}^{0} \big(f(x) - g(x)\big)dx + \int_{0}^{+2} \big(g(x) - f(x)\big)dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} \big(x^3 - 3x + 3 - (3 + x)\big)dx + \int_{0}^{+2} \big((3 + x) - (x^3 - 3x + 3)\big)dx =$$

$$\int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx = \int_{0}^{+2} (-x^3 + 4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^2}{2}\right]_{0}^{+2} =$$

$$= (0 - 0) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{4 \cdot (-2)^2}{2}\right) + \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{4 \cdot 2^2}{2}\right) - (-0 + 0) =$$

$$= -4 + 8 - 4 + 8 = 8\, u^2$$

[Puntuación máxima: 3,25 puntos]

4. Dada la función $f(x) = \begin{cases} sen^2 x & si\ x < 0 \\ \text{arcsen}(x) & si\ x \geq 0 \end{cases}$'

a) (0,75 puntos) Demostrar que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

b) (2,5 puntos) Calcular algebraicamente el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 1$, $y = 0$.

a) (0,5 puntos) Demostrar que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$.

La función $f(x)$ será continua en $x = 0$ si,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

Como,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} sen^2(x) = 0^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} arcsen(x) = 0$$

$$f(0) = arcsen(0) = 0$$

Entonces podemos decir que $f(x)$ será continua en $x = 0$

- Si $x < 0$ entonces

$$\frac{-x}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2x = 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Por lo tanto, las funciones $f(x) y\ g(x)$ crean una región limitada en el intervalo $[-1, +1]$.

b) (2,5 puntos) Calcular algebraicamente el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$ y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 1$, $y = 0$.

La función $f(x)$ **es no negativa en el intervalo** $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$ **ya que,**

$$sen^2(x) \geq 0 \quad \forall\, x < 0$$

$$arcsen(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [0,1]$$

En ese caso, el área pedida viene dada por,

$$\text{Área} = \int_{-\pi/2}^{0} sen^2 x\, dx + \int_0^1 \text{arcsen}(x)\, dx$$

- Resolvemos la integral $\int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx$ por partes,

$$u = sen(x) \qquad du = \cos(x)\,dx$$
$$dv = sen(x)dx \quad v = \int sen(x)dx = -\cos(x)$$

Entonces,

$$\int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx = [-sen(x)\cdot\cos(x)]_{-\pi/2}^{0} - \int_{-\pi/2}^{0} (-\cos^2 x)\ dx =$$

$$(-sen(0)\cdot\cos(0)) - \left(-sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \int_{-\pi/2}^{0}\cos^2 x\,dx =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0}(1 - sen^2x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{0} 1\,dx - \int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx = [x]_{-\pi/2}^{0} - \int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx =$$

$$= \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx$$

Despejando la integral tendremos su resultado,

$$\int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx + \int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cdot\int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow \quad \int_{-\pi/2}^{0} sen^2x\,dx = \frac{\pi}{4}\ u^2$$

- Calculamos ahora la segunda integral, $\int_0^1 \operatorname{arcsen}(x)\,dx$ y lo hacemos por partes,

$$u = arcsen(x) \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$dv = 1\,dx \qquad v = \int 1\,dx = x$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen}(x)\,dx = [x\cdot\operatorname{arcsen}(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{x}}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= (1 \cdot \text{arcsen}(1)) - (0 \cdot \text{arcsen}(0)) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (-2\text{x}) \cdot (1 - x^2)^{-1/2}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(1 - x^2)^{+1/2}}{1/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} + ((\sqrt{1 - 1^2} - \sqrt{1 - 0}) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 \;\; u^2$$

Por lo tanto, el área pedida es,

$$\acute{A}rea = \int_{-\pi/2}^{0} sen^2 x\, dx + \int_0^1 \text{arcsen}(x)\, dx = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{3\pi}{4} - 1 \;\; u^2 = \frac{3\pi - 4}{4} \;\; u^2 \approx 1.35619\, u^2$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

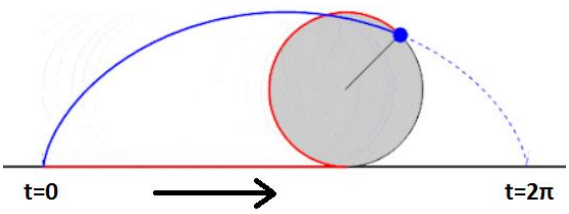
5. i) (1 punto) A partir de la resta de la fórmula fundamental de la trigonometría y la fórmula del coseno del ángulo doble, aplicadas sobre el ángulo $\frac{t}{2}$, pruebe algebraicamente que

$$\sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{t}{2}\right) = +\sqrt{1 - \cos t} \quad t \in [0, 2\pi]$$

ii) (1,5 puntos) Dadas las ecuaciones paramétricas respecto del parámetro $t \in [0, 2\pi]$ por coordenadas de un arco de cicloide

$$x(t) = a \cdot (t - sen\, t)$$

$$y(t) = a \cdot (1 - \cos t)$$



Y sabiendo que la longitud de una curva en paramétricas $\left(x(t), y(t)\right)$ para $t \in [p, q]$ viene dada por

$$Longitud\ curva = \int_p^q \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Calcula algebraicamente y sin calculadora, la longitud del arco de cicloide para $t \in [0, 2\pi]$.

i) (1 punto) A partir de la resta de la fórmula fundamental de la trigonometría y la fórmula del coseno del ángulo doble, aplicadas sobre el ángulo $\frac{t}{2}$, pruebe algebraicamente que

$$\boldsymbol{\sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos t}}$$

Escribimos la igualdad fundamental de la trigonometría y la fórmula del ángulo doble sobre el ángulo $\frac{t}{2}$ una encima de otra y las restamos tal y como dice el enunciado,

$$\begin{array}{rl} & \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \mathrm{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 \\ - & \\ & \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ \hline & 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos\, t \end{array}$$

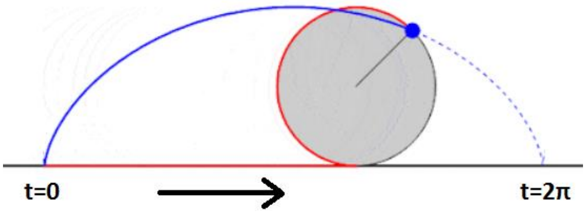
Como $t \in [0, 2\pi]$], si ahora hacemos la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad, obtenemos,

$$2 \cdot sen^2\left(\frac{t}{2}\right) = 1 - \cos t \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{t}{2}\right) = +\sqrt{1 - \cos t}$$

ii) (1,5 puntos) Dadas las ecuaciones paramétricas respecto del parámetro $t \in [0, 2\pi]$ por coordenadas de un arco de cicloide

$$\boldsymbol{x(t) = a \cdot (t - sen\, t)}$$

$$\boldsymbol{y(t) = a \cdot (1 - \cos t)}$$



Y sabiendo que la longitud de una curva en paramétricas $\left(x(t), y(t)\right)$ para $t \in [p, q]$ viene dada por

$$\boldsymbol{Longitud\ curva = \int_p^q \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt}$$

Calcula algebraicamente y sin calculadora, la longitud del arco de cicloide para $t \in [0, 2\pi]$.

Calculamos dicha integral calculando primero las derivadas de sus coordenadas paramétricas

$$x'(t) = a \cdot (1 - \cos t) \quad , \quad y'(t) = a \cdot sen\, t$$

Calculamos la longitud a partir de,

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(a \cdot (1 - \cos t)\right)^2 + (a \cdot sen\, t)^2}\, dt =$$

Operamos dentro de la raíz

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cdot (1 + \cos^2 t - 2\cos t) + a^2 \cdot sen^2 t}\;\, dt =$$

$$= a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t - 2\cos t + sen^2\, t}\; dt = a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 1 - 2\cos t}\; dt =$$

$$= a \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\; dt = a \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\; dt$$

Como, por el apartado a) tenemos que $\sqrt{1 - \cos t} = \sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{t}{2}\right)$ si $t \in [0, 2\pi]$ entonces,

$$a \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\; dt = a \cdot \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot sen\left(\frac{t}{2}\right) dt = a \cdot 2 \cdot \int_0^{2\pi} sen\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

de donde concluimos que,

$$L = 2a \cdot \int_0^{2\pi} sen\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2a \cdot 2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot sen\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4a \cdot \left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 4a \cdot \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{0}{2}\right)\right) = 4a \cdot (-\cos \pi + \cos 0) = 4a \cdot (+1 + 1) = 8a\ u$$