CUADERNILLO 3

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Entrega límite **MIÉRCOLES, 18 de DICIEMBRE de 2024 (hora de inicio de clase)**

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de **10,75 puntos.**
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$Nota\ def. =\ Notal\ total/(Días\ de\ retraso + 1)$$

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.1,2,8)**

1. Resuelva, sin utilizar la calculadora, las siguientes ecuaciones y límites que se indican,

$a)$ $\tan(2\mathrm{x} - 5°) = 1$ para $0° \leq x \leq 180°$.

$b)$ $3 \cdot 9^x + 5 \cdot 3^x - 2 = 0$.

$c)$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sec^4 x - \cos^2 x}{x^4 - x^2}$

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2022, P1, Ej.4)**

2. Halle, sin utilizar la calculadora, el menor valor positivo de x para el que se cumple que

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

[Puntuación máxima: 1 punto] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2022, P1, Ej.4)**

3. Considere la curva definida por la ecuación $(x^2 + y^2) \cdot y^2 = 3x^2$ donde $x \geq 0$ e $-2 \leq y \leq 2$. Apoyándose en la derivación implícita de la curva, **demuestre algebraicamente por contradicción** que la curva no tiene ningún punto máximo o mínimo local para $x > 0$.

[Puntuación máxima: 1 punto] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2024, P2, Ej.1)**

4. Las funciones f y g se definen ambas para $-1 \leq x \leq 0$ y vienen dadas por:

$$f(x) = 1 - x^2 \qquad\qquad g(x) = e^{2x}$$

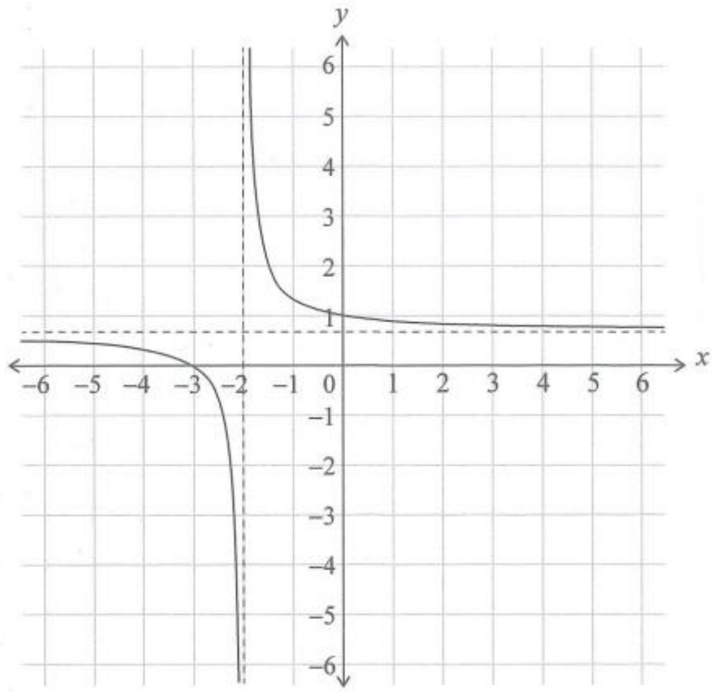
Los gráficos de f y g se cortan en $x = a$ y $x = b$ donde $a < b$.

(a) Halle el valor de $a\ y\ de\ b$. (0,25 puntos)

(b) Halle el área de la región que está delimitada por los gráficos de f y g mediante la resolución algebraica de una integral. (0,75 puntos)

[Puntuación máxima: 1,25 puntos] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2024, P1, Ej.5)**

5. La función f se define así: $f(x) = \frac{2(x+3)}{3(x+2)}$ donde $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$. A continuación se muestra el gráfico de $y = f(x)$.



(a) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal. (0,25 puntos)

Considere $g(x) = mx + 1$, donde $\mathbf{m} \in \mathbb{R}, \mathbf{m} \neq \mathbf{0}$.

(b) (i) Escriba el número de soluciones que tiene $f(x) = g(x)$ para $m > 0$. (0,25 puntos)

(ii) Determine el valor de m para el cual $f(x) = g(x)$ tiene solamente una solución en x. (0,25 puntos)

(iii) Determine el intervalo de valores de m para los cuales $f(x) = g(x)$ tiene dos soluciones para $x \geq 0$. (0,5 puntos)

[Puntuación máxima: 3 puntos] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2024, P1, Ej.12)**

6. Sea $f(x) = (1 - ax)^{-1/2}, donde\ ax < 1, a \neq 0$

(a) Denominamos $f^n(x),\ n \in \mathbb{Z}^+$, a la n.ésima derivada de $f(x)$.

Pruebe mediante inducción matemática que $f^n(x),\ = \frac{a^n \cdot (2n-1)! \cdot (1-ax)^{-(2n+1)/2}}{2^{2n-1} \cdot (n-1)!}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(1 punto)

(b) Utilizando el apartado (a) o de cualquier otro modo, calcule la serie de Maclaurin para $f(x) = (1 - ax)^{-1/2}$ llegando hasta (e incluido) el término de x^2. (0,5 puntos)

(c) A partir de lo anterior, muestre que $(1 - 2x)^{-1/2} \cdot (1 - 4x)^{-1/2} \approx \frac{2+6x+19x^2}{2}$ (0,5 puntos)

(d) Sabiendo que el desarrollo en serie de $f(x)$ es convergente para $|ax| < 1$, indique la restricción que hay que imponer a x para que la aproximación del apartado (c) sea válida. (0,25 puntos)

(e) Use $x = \frac{1}{10}$ para determinar un valor aproximado de $\sqrt{3}$. dando la respuesta en la forma $\frac{c}{d}$ con $c, d \in \mathbb{Z}^+$. (0,75 puntos)

[Puntuación máxima: 2,25 puntos] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2024, P3, Ej.2)**

7. Se consideran en todos los apartados siguientes las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bc + c$ cuyos coeficientes $a, b\ y\ c$ se generan al azar tirando un dado equilibrado de seis caras tres veces y tomando el valor que aparece en la cara superior del dado.

Por ejemplo, si al tirar el dado saliera un 2, un 3 y un 5, la función cuadrática resultante sería $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

(a) Determine cuántas funciones cuadráticas distintas se pueden generar utilizando este método. (0,25 puntos)

(b) El conjunto de coeficientes $a = 1, b = 4, c = 4$ se ha generado al azar para dar lugar a la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x + 4$. Muestre algebraicamente que la función cuadrática tiene solo una intersección con el eje x. (0,25 puntos)

(c) Considerando el discriminante, o de cualquier otro modo, muestre que la probabilidad de que el gráfico de una función cuadrática generada al azar de esta manera tenga solo una intersección con el eje x es igual a $5/216$. (0,5 puntos)

Considere ahora las funciones cuadráticas generadas al azar cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x.

(d) Considerando el discriminante, determine el conjunto de posibles valores del producto ac. (0,5 puntos)

(e) (i) Para el caso en el que $ac = 1$, muestre que existen cuatro funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x. (0,25 puntos)

(ii) Para el caso en el que $ac = 2$, determine, argumentando su respuesta matemáticamente, el número de funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x. (0,5 puntos)

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CUADERNILLO 3

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.1,2,8)**

1. Resuelva, sin utilizar la calculadora, las siguientes ecuaciones y límites que se indican,

$a)$ $\tan(2\mathrm{x}-5°)=1$ para $0° \leq x \leq 180°$.

$b)$ $3\cdot 9^x+5\cdot 3^x-2=0.$

$c)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^4 x-\cos^2 x}{x^4-x^2}$

$\boldsymbol{a)}$ $\boldsymbol{\tan(2\mathrm{x}-5°)=1}$ **para** $\boldsymbol{0° \leq x \leq 180°}$ **.**

$$\tan(2\mathrm{x}-5°)=1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\mathrm{x}-5°=\arctan(1) \quad \Leftrightarrow \quad 2\mathrm{x}-5°=45° \quad \Leftrightarrow \mathrm{x}=20°$$

$\boldsymbol{b)}$ $\boldsymbol{3\cdot 9^x+5\cdot 3^x-2=0.}$

Como,

$$3\cdot 9^x+5\cdot 3^x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot(3^x)^2+5\cdot 3^x-2=0$$

Hacemos el cambio de variable,

$$t=3^x$$

En ese caso,

$$3\cdot(3^x)^2+5\cdot 3^x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3t^2+5t-2=0$$

Resolvemos,

$$3t^2+5t-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 3\cdot(-2)}}{2\cdot 3}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=$$

$$\frac{-5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{-5\pm 7}{6}=\begin{cases} t=\dfrac{-5+7}{6}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3} \\ t=\dfrac{-5-7}{6}=-\dfrac{12}{6}=-2 \end{cases}$$

- Si $t=\frac{1}{3}$ entonces $3^x=\frac{1}{3}$ por lo que $3^x=3^{-1}$ y concluimos que $x=-1$.
- Si $t=-2$ entonces $3^x=-2$, cosa que es imposible por lo que no encontramos solución.

En ese caso, la única solución es $x=-1$.

$$\boldsymbol{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sec^4 x-\cos^2 x}{x^4-x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sec^4 x-\cos^2 x}{x^4-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^4 x}-\cos^2 x}{x^4-x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^6 x}{(x^4-x^2)\cdot\cos^4 x}\underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\cos^5 x\cdot sen(x)}{(4x^3-2x)\cdot\cos^4 x+(x^4-x^2)\cdot 4\cos^3 x\cdot sen(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\cos^2 x\cdot sen(x)}{(4x^3-2x)\cdot\cos x+(x^4-x^2)\cdot 4sen(x)}\underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-12\cos(x)\cdot sen^2(x)+6\cos^3 x}{(12x^2-2)\cdot\cos x-(4x^3-2x)\cdot \mathrm{sen(x)}+(4x^3-2x)\cdot 4sen(x)+(x^4-x^2)\cdot 4\cos(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-12\cos(x)\cdot sen^2(x)+6\cos^3 x}{(12x^2-2)\cdot\cos x+3\cdot(4x^3-2x)\cdot sen(x)+(x^4-x^2)\cdot 4\cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{+6\cos^3 x}{(12x^2-2)\cdot\cos x}=\frac{6}{-2}=-3$$

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2022, P1, Ej.4)**

2. Halle, sin utilizar la calculadora, el menor valor positivo de x para el que se cumple que

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Resolvemos la ecuación,

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Puesto que se trata de encontrar el menor valor positivo de x para el que se cumple, tendremos que este valor será el menor ángulo positivo para el que el coseno es $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
En ese caso,

$$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi\ \ ,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

De donde,

$$\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}+4k\pi=\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{3}+4k\pi=-\dfrac{\pi}{6}+4k\pi \\ x=-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{3}+4k\pi=-\dfrac{7\pi}{6}+4k\pi \end{cases}$$

En tal caso, como para $k=1$ encontramos el primer valor positivo para ambas expresiones y obtenemos para cada una,

$$\begin{cases} x=\dfrac{23\pi}{6} \\ x'=\dfrac{17\pi}{6} \end{cases}$$

Entonces el menor valor positivo de x para el que se cumple la ecuación es,

$$x'=\frac{17\pi}{6}$$

[Puntuación máxima: 1 punto] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2022, P1, Ej.4)**

3. Considere la curva definida por la ecuación $(x^2+y^2)\cdot y^2 = 3x^2$ donde $x \geq 0$ e $-2 \leq y \leq 2$. Apoyándose en la derivación implícita de la curva, **demuestre algebraicamente por contradicción** que la curva no tiene ningún punto máximo o mínimo local para $x > 0$.

Derivamos la expresión respecto de x obteniendo,

$$(2x + 2\cdot y\cdot y') \cdot y^2 + (x^2+y^2)\cdot 2\cdot y \cdot y' = 6x$$

Actuando por contradicción, suponemos que hay al menos un valor $x = a \in \mathbb{R}^+$ que es máximo o mínimo. En tal caso,

$$\exists\ a > 0 \ \ con \ \ y'(a) = 0$$

Sustituyendo en la expresión derivada obtenemos que,

$$\big(2a + 2\cdot y(a)\cdot y'(a)\big)\cdot y(a)^2 + (a^2 + y(a)^2)\cdot 2\cdot y(a)\cdot y'(a) = 6a$$

Como $y'(a) = 0$ entonces,

$$(2a + 2\cdot y(a)\cdot 0)\cdot y(a)^2 + (a^2+y(a)^2)\cdot 2y(a)\cdot 0 = 6a \quad \Leftrightarrow$$

$$2a\cdot y(a)^2 = 6a \quad \Leftrightarrow \quad y(a)^2 = 3$$

En ese caso, sustituyendo $x = a$ en la ecuación,

$$(a^2 + y(a)^2)\cdot y(a)^2 = 3a^2 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2+3)\cdot 3 = 3a^2 \quad \Leftrightarrow \quad (a^2+3)\cdot 3 = 3a^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + 3 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad ¡¡¡¡ \ \ 3 = 0 \ \ !!!!$$

En ese caso, la curva no tiene ningún punto máximo o mínimo local para $x > 0$.

[Puntuación máxima: 1 punto] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2024, P2, Ej.1)**

4. Las funciones f y g se definen ambas para $-1 \leq x \leq 0$ y vienen dadas por:

$$f(x) = 1 - x^2 \qquad g(x) = e^{2x}$$

Los gráficos de f y g se cortan en $x = a$ y $x = b$ donde $a < b$.

(a) Halle el valor de $a\ y\ de\ b$. (0,25 puntos)

(b) Halle el área de la región que está delimitada por los gráficos de f y g mediante la resolución algebraica de una integral. (0,75 puntos)

(a) Halle el valor de $a\ y\ de\ b$. **(0,25 puntos)**

Resolvemos la ecuación,

$$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 1 - x^2 = e^{2x}$$

mediante la calculadora obteniendo,

$$\mathbf{a = -0,92 \quad b = 0}$$

(b) Halle el área de la región que está delimitada por los gráficos de f y g mediante la resolución algebraica de una integral.

El área vendrá dada por,

$$A = \int_{-0,92}^{0} (1 - x^2 - e^{2x})dx = \left[x - \frac{x^3}{3} - \frac{e^{2x}}{2}\right]_{-0,92}^{0} =$$

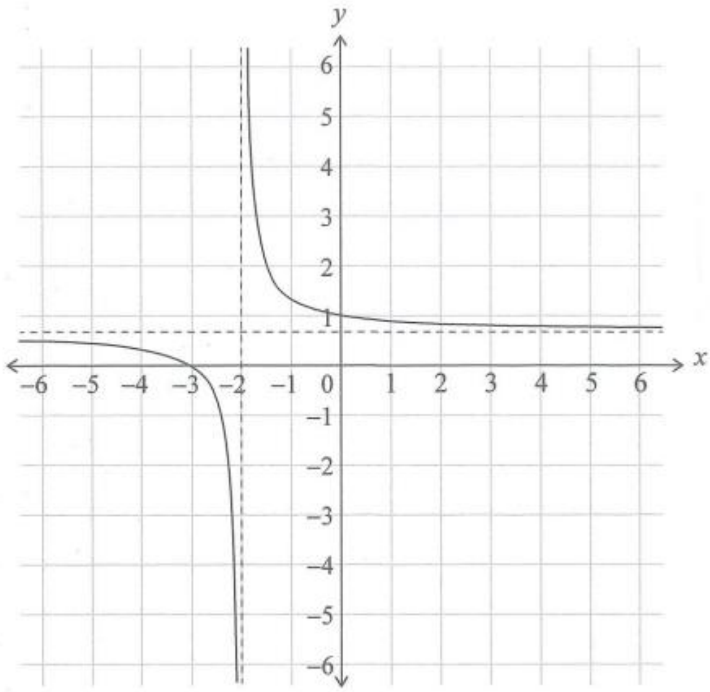
Aplicando la regla de Barrow obtenemos,

$$= \left(0 - \frac{0^3}{3} - \frac{e^{2\cdot 0}}{2}\right) - \left(-0,92 - \frac{(-0,92)^3}{3} - \frac{e^{2\cdot(-0,92)}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + 0,92 - \frac{0,92^3}{3} + \frac{e^{-1,84}}{2} \approx 0,23984\, u^2$$

[Puntuación máxima: 1,25 puntos] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2024, P1, Ej.5)**

5. La función f se define así: $f(x) = \frac{2(x+3)}{3(x+2)}$ donde $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$. A continuación se muestra el gráfico de $y = f(x)$.



(a) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal. (0,25 puntos)

Considere $g(x) = mx + 1$, donde $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{m} \neq \mathbf{0}$.

(b) (i) Escriba el número de soluciones que tiene $f(x) = g(x)$ para $m > 0$.

(0,25 puntos)

(ii) Determine el valor de m para el cual $f(x) = g(x)$ tiene solamente una solución en x. (0,25 puntos)

(iii) Determine el intervalo de valores de m para los cuales $f(x) = g(x)$ tiene dos soluciones para $x \geq 0$. (0,5 puntos)

(a) Escriba la ecuación de la asíntota horizontal. **(0,25 puntos)**

La ecuación de la asíntota horizontal es,

$$y = 1$$

(b) (i) Escriba el número de soluciones que tiene $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ para $\boldsymbol{m > 0}$. **(0,25 puntos)**

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2(x+3)}{3(x+2)} = mx + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 6 = (mx+1) \cdot (3x+6) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 6 = 3mx^2 + 6mx + 3x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 3mx^2 + (6m+1)x = 0$$

$$3mx^2 + (6m+1)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \big(3mx + (6m+1)\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\dfrac{6m+1}{3m} \end{cases}$$

Por lo tanto, habrá dos soluciones.

(ii) Determine el valor de m para el cual $f(x) = g(x)$ tiene solamente una solución en x.

(0,25 puntos)

La ecuación $f(x) = g(x)$ tendrá una única solución si,

$$-\frac{6m+1}{3m} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6m+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -\frac{1}{6}$$

(iii) Determine el intervalo de valores de m para los cuales $f(x) = g(x)$ tiene dos soluciones para $x \geq 0$.

(0,5 puntos)

Una de las soluciones siempre va a ser para $x = 0$. Si queremos que la otra solución tenga abcisa positiva entonces,

$$\frac{6m+1}{3m} < 0$$

En ese caso, los valores m para los que la expresión anterior es negativa son,

$$\forall\, m \in \left(-\frac{1}{6}, 0\right)$$

[Puntuación máxima: 3 puntos] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2024, P1, Ej.12)**

6. Sea $f(x) = (1 - ax)^{-1/2}, donde\ ax < 1, a \neq 0$

(a) Denominamos $f^n(x),\ n \in \mathbb{Z}^+$, a la n.ésima derivada de $f(x)$.

Pruebe mediante inducción matemática que $f^n(x),\ = \frac{a^n \cdot (2n-1)! \cdot (1-ax)^{-(2n+1)/2}}{2^{2n-1} \cdot (n-1)!}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(1 punto)

(b) Utilizando el apartado (a) o de cualquier otro modo, calcule la serie de Maclaurin para $f(x) = (1 - ax)^{-1/2}$ llegando hasta (e incluido) el término de x^2. (0,5 puntos)

(c) A partir de lo anterior, muestre que $(1 - 2x)^{-1/2} \cdot (1 - 4x)^{-1/2} \approx \frac{2+6x+19x^2}{2}$ (0,5 puntos)

(d) Sabiendo que el desarrollo en serie de $f(x)$ es convergente para $|ax| < 1$, indique la restricción que hay que imponer a x para que la aproximación del apartado (c) sea válida. (0,25 puntos)

(e) Use $x = \frac{1}{10}$ para determinar un valor aproximado de $\sqrt{3}$. dando la respuesta en la forma $\frac{c}{d}$ con $c, d \in \mathbb{Z}^+$. (0,75 puntos)

(a) Pruebe mediante inducción matemática que $\boldsymbol{f^{(n)}(x),\ = \frac{a^n \cdot (2n-1)! \cdot (1-ax)^{-(2n+1)/2}}{2^{2n-1} \cdot (n-1)!}}$, $\boldsymbol{n \in \mathbb{Z}^+}$.

(1 punto)

Sea $f(x) = (1 - ax)^{-1/2}, donde\ ax < 1, a \neq 0$

Probamos el primer caso $n = 1$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (1 - ax)^{-1/2-1} \cdot (-a) = \frac{1}{2} \cdot (1 - ax)^{-3/2} \cdot a = \frac{a^1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)! \cdot (1 - ax)^{-3/2}}{2^{2 \cdot 1 - 1} \cdot (1 - 1)!}$$

Por tanto verifica la fórmula de la derivada n-ésima.

Suponemos cierto el caso $n = k$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{a^k \cdot (2k - 1)!\ \cdot\ (1 - ax)^{-(2k+1)/2}}{2^{2k-1} \cdot (k - 1)!}$$

Y probamos el caso caso $n = k + 1$,

$$f^{(k+1)}(x) = \frac{a^{k+1} \cdot (2k + 1)!\ \cdot\ (1 - ax)^{-(2k+3)/2}}{2^{2k+1} \cdot k!}$$

Para ello, operamos derivando la derivada k-ésima según,

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^k(x)\right)' = \left(\frac{a^k \cdot (2k - 1)!\ \cdot\ (1 - ax)^{-(2k+1)/2}}{2^{2k-1} \cdot (k - 1)!}\right)' =$$

$$\frac{a^k \cdot (2k-1)! \cdot [-(2k+1)/2] \cdot (1-ax)^{-(2k+1)/2-1} \cdot (-a)}{2^{2k-1} \cdot (k-1)!} =$$

$$= \frac{a^{k+1} \cdot (2k-1)! \cdot (2k+1) \cdot (1-ax)^{-(2k+3)/2}}{2^{2k} \cdot (k-1)!} =$$

$$= \frac{a^{k+1} \cdot (2k-1)! \cdot (2k) \cdot (2k+1) \cdot (1-ax)^{-(2k+3)/2}}{2^{2k} \cdot (k-1)! \cdot (2k)} =$$

$$= \frac{a^{k+1} \cdot (2k+1)! \cdot (1-ax)^{-(2k+3)/2}}{2^{2k+1} \cdot k! \cdot}$$

Por lo tanto, se verifica la hipótesis de inducción y se concluye que,

$$f^{(n)}(x), \qquad = \frac{a^n \cdot (2n-1)! \cdot (1-ax)^{-(2n+1)/2}}{2^{2n-1} \cdot (n-1)!} \;, \; n \in \mathbb{Z}^+.$$

(b) Utilizando el apartado (a) o de cualquier otro modo, calcule la serie de Maclaurin para $\boldsymbol{f(x) = (1-ax)^{-1/2}}$ llegando hasta (e incluido) el término de $\boldsymbol{x^2}$. (0,5 puntos)

Como el polinomio de MacLaurin es de la forma,

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2$$

Calculamos $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$.

$$(0) = (1 - a \cdot 0)^{-1/2} = 1$$

$$f'(x), \qquad = \frac{a^1 \cdot (2 \cdot 1 - 1)! \cdot (1 - a \cdot 0)^{-(2\cdot 1+1)/2}}{2^{2\cdot 1-1} \cdot (1-1)!} = \frac{a^1 \cdot 1! \cdot (1)^{-(3)/2}}{2^1 \cdot (0)!} = \frac{a}{2}$$

$$f''(x), \qquad = \frac{a^2 \cdot (2 \cdot 2 - 1)! \cdot (1 - a \cdot 0)^{-(2\cdot 2+1)/2}}{2^{2\cdot 2-1} \cdot (2-1)!} = \frac{a^2 \cdot 3! \cdot (1)^{-(5)/2}}{2^3 \cdot 1!} = \frac{3a^2}{4}$$

Por lo tanto, el polinomio de MacLaurin pedido es,

$$P(x) = 1 + \frac{a/2}{1!} \cdot x + \frac{3a^2/4}{2!} \cdot x^2 = 1 + \frac{ax}{2} + \frac{3a^2x^2}{8}$$

(c) A partir de lo anterior, muestre que $\boldsymbol{(1-2x)^{-1/2} \cdot (1-4x)^{-1/2} \approx \frac{2+6x+19x^2}{2}}$ (0,5 puntos)

Sustituyendo la expresión del polinomio de MacLaurin para grado 1 anterior con $a = 2$

$$(1-2x)^{-1/2} \approx 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3 \cdot 2^2 x^2}{8} = 1 + x + \frac{3x^2}{2}$$

y haciendo lo mismo para $a = 4$,

$$(1-4x)^{-1/2} \approx 1 + \frac{4x}{2} + \frac{3 \cdot 4^2 \cdot x^2}{8} = 1 + 2x + 6x^2$$

Por lo tanto,

$$(1-2x)^{-1/2}\cdot(1-4x)^{-1/2}\approx\left(1+x+\frac{3x^2}{2}\right)\cdot(1+2x+6x^2)=$$

$$=1+2x+6x^2+x+2x^2+6x^3+\frac{3x^2}{2}+3x^3+9x^4=$$

$$=\frac{1+6x+19x^2}{2}+3x^3+9x^4\approx\frac{1+6x+19x^2}{2}$$

(d) Sabiendo que el desarrollo en serie de $f(x)$ es convergente para $|ax|<1$, indique la restricción que hay que imponer a x para que la aproximación del apartado (c) sea válida. (0,25 puntos)

Para que sean válida la restricción anterior debe ocurrir que,

$$|2x|<1 \quad y \quad |4x|<1$$

Por lo tanto,

$$|x|<\frac{1}{2} \quad y \quad |x|<\frac{1}{4}$$

Y en conclusión, solo es válida para los valores

$$|x|<\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{4}<x<+\frac{1}{4}$$

(e) Use $x=\frac{1}{10}$ para determinar un valor aproximado de $\sqrt{3}$. dando la respuesta en la forma $\frac{c}{d}$ con $c,d\in\mathbb{Z}^+$. (0,75 puntos)

Como $\frac{1}{10}=0{,}1\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ la aproximación del apartado c) es correcta y en ese caso,

$$\left(1-2\cdot\frac{1}{10}\right)^{-1/2}\cdot\left(1-4\cdot\frac{1}{10}\right)^{-1/2}\approx\frac{2+6\cdot\frac{1}{10}+19\cdot\frac{1}{100}}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{8}{10}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{6}{10}\right)^{-1/2}\approx\frac{\frac{200}{100}+\frac{60}{100}+\frac{19}{100}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{48}{100}\right)^{-1/2}\approx\frac{279}{200} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{100}{48}\right)^{1/2}\approx\frac{279}{200} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{100}{16\cdot 3}\right)^{1/2}\approx\frac{279}{200} \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\approx\frac{279}{200} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{200\cdot 10}{4\cdot 279}\approx\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{500}{279}\approx\sqrt{3}$$

[Puntuación máxima: 2,25 puntos] **(Análisis y Enfoques, Mayo 2024, P3, Ej.2)**

7. Se consideran en todos los apartados siguientes las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bc + c$ cuyos coeficientes $a, b\ y\ c$ se generan al azar tirando un dado equilibrado de seis caras tres veces y tomando el valor que aparece en la cara superior del dado.

Por ejemplo, si al tirar el dado saliera un 2, un 3 y un 5, la función cuadrática resultante sería $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$.

(a) Determine cuántas funciones cuadráticas distintas se pueden generar utilizando este método. (0,25 puntos)

(b) El conjunto de coeficientes $a = 1, b = 4, c = 4$ se ha generado al azar para dar lugar a la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x + 4$. Muestre algebraicamente que la función cuadrática tiene solo una intersección con el eje x. (0,25 puntos)

(c) Considerando el discriminante, o de cualquier otro modo, muestre que la probabilidad de que el gráfico de una función cuadrática generada al azar de esta manera tenga solo una intersección con el eje x es igual a $5/216$. (0,5 puntos)

Considere ahora las funciones cuadráticas generadas al azar cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x.

(d) Considerando el discriminante, determine el conjunto de posibles valores del producto ac. (0,5 puntos)

(e) (i) Para el caso en el que $ac = 1$, muestre que existen cuatro funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x. (0,25 puntos)

(ii) Para el caso en el que $ac = 2$, determine, argumentando su respuesta matemáticamente, el número de funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x. (0,5 puntos)

(a) Determine cuántas funciones cuadráticas distintas se pueden generar utilizando este método. (0,25 puntos)

Se trata de contar cuántos tríos de números tomados desde el 1 hasta al 6 podemos formar en los que puede haber repetición e importa el orden de elección. Por todo ello, utilizamos las variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 6 en 6. El número de funciones cuadráticas será,

$$VR_{6,3} = 6^3 = 216 \text{ funciones cuadráticas}$$

(b) El conjunto de coeficientes $a = 1, b = 4, c = 4$ se ha generado al azar para dar lugar a la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x + 4$. Muestre algebraicamente que la función cuadrática tiene solo una intersección con el eje x. (0,25 puntos)

Comprobamos que la función cuadrática solo tiene una intersección con el eje x comprobando que el discriminante de la función cuadrática es cero $\Delta = 0$.

Operando con $a = 1, b = 4, c = 4$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$$

Por lo tanto, la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x + 4$ solo tiene una intersección con el eje x.

(c) Considerando el discriminante, o de cualquier otro modo, muestre que la probabilidad de que el gráfico de una función cuadrática generada al azar de esta manera tenga solo una intersección con el eje x es igual a $5/216$. (0,5 puntos)

Para calcular la probabilidad aplicaremos la regla de Laplace. En ese caso, debemos contar el número de funciones cuadráticas que tienen discriminante cero, es decir, cuántas de las funciones,

$$f(x) = ax^2 + bx + x$$

Les ocurre que su discriminante es nulo,

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = 4ac$$

En ese caso, deberá ocurrir que al cuadriplicar el valor del producto ac debemos obtener un cuadrado perfecto menor o igual a 36.

Mediante la siguiente tabla conde para cada (a, c), calculamos $4ac$, señalamos en color aquellos productos que son un cuadrado perfecto menor o igual a 36.

a \ c	1	2	3	4	5	6
1	**4**	**8**	**12**	**16**	**20**	**24**
2	**8**	**16**	**24**	**32**	**40**	**48**
3	**12**	**24**	**36**	**48**	**60**	**72**
4	**16**	**32**	**48**	**64**	**80**	**96**
5	**20**	**40**	**60**	**80**	**100**	**120**
6	**24**	**48**	**72**	**96**	**120**	**144**

Por lo tanto,

$$P(Una\ sola\ intersección\ con\ eje\ x) = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{5}{216}$$

(d) Considerando el discriminante, determine el conjunto de posibles valores del producto ac. (0,5 puntos)

Como el discriminante debe ser positivo, tendremos que,

$$b^2 - 4ac > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 > 4ac \quad \Leftrightarrow \frac{b^2}{4} > ac$$

Como $b^2 \in \{1,4,9,16,25,36\}$ entonces $b^2/4 \in \left\{\frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \frac{25}{5}, 9\right\}$.
En ese caso, $ac < 9$ y entonces, por tanteo,

$$ac \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}.$$

(e) (i) Para el caso en el que $ac = 1$, muestre que existen cuatro funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x. **(0,25 puntos)**

Si $ac = 1$ entonces $a = c = 1$. Además,

$$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 > 4 \quad \Leftrightarrow \quad b \in \{3,4,5,6\}$$

En ese caso,

- Si $b = 3$ entonces tendemos el polinomio $p_{1,3,1}(x) = x^2 + 3x + 1$
- Si $b = 4$ entonces tendemos el polinomio $p_{1,4,1}(x) = x^2 + 4x + 1$
- Si $b = 5$ entonces tendemos el polinomio $p_{1,5,1}(x) = x^2 + 5x + 1$
- Si $b = 6$ entonces tendemos el polinomio $p_{1,6,1}(x) = x^2 + 6x + 1$

(ii) Para el caso en el que $ac = 2$, determine, argumentando su respuesta matemáticamente, el número de funciones cuadráticas cuyos gráficos tienen dos intersecciones distintas con el eje x. **(0,5 puntos)**

Si $ac = 2$ entonces $a = 1 \;\; y \;\; c = 2$ o $a = 2 \;\; y \;\; c = 1$. Además,

$$\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 4ac > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 8 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 > 8 \quad \Leftrightarrow \quad b \in \{3,4,5,6\}$$

En ese caso,

- Si $b = 3$ entonces tendemos los polinomios

$$p_{1,3,2}(x) = x^2 + 3x + 2 \;\; , \;\; p_{2,3,1}(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

- Si $b = 4$ entonces tendemos los polinomios

$$p_{1,4,2}(x) = x^2 + 4x + 2 \;\; , \;\; p_{2,4,1}(x) = 2x^2 + 4x + 1$$

- Si $b = 5$ entonces tendemos los polinomios

$$p_{1,5,2}(x) = x^2 + 5x + 2 \;\; , \;\; p_{2,5,1}(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

- Si $b = 6$ entonces tendemos los polinomios

$$p_{1,6,2}(x) = x^2 + 6x + 2 \;\; , \;\; p_{2,6,1}(x) = 2x^2 + 5x + 1$$