UNIVERSIDADES PUBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
SIMULACRO PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
Curso 2024-2025
MATERIA: MATEMATICAS II

LA WEB DEL PROFE DE MATES
Lawebdelprofedemates.es

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACION: Cada bloque se calificara sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Ejercicio 1.1. Calificación máxima: 2,5 puntos **(Modelo orientativo – Evau Madrid 2020-2021, ej A.1.)**

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$, se pide,

a) (0,5 puntos) Una matriz tiene inversa cuando es cuadrada y su rango es máximo. Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.

b) (1 punto) Para $x = -1$ calcular A^{-1}.

c) (1,25 puntos) Para $x = 1$ calcular $(A \cdot B^t)^{2024}$.

Ejercicio 1.2. Calificación máxima: 2,5 puntos

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide,

a) (1 punto) Discuta el rango de la matriz BA en función del valor del parámetro real k.

b) (1 punto) Calcule la matriz inversa de $C = AB$ para $k = 1$. Para este mismo valor resuelva la ecuación $XC = 2A^t$

c) (0,5 puntos) Para $k = 0$, calcule $(AB)^{100}$.

Bloque 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Ejercicio 2.1. Calificación máxima: 2,5 puntos

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & si\ x \leq 1 \\ \frac{\ln(x)}{x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$

a) (0,5 + 0,5 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x)$ y comprobar algebraicamente si $f(x)$ es derivable en $x = 1$.

b) (0,75 puntos) Hallar las asíntotas de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Determinar el valor $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. Escribe la ecuación de dicha tangente en el formato $y = mx + n$

Ejercicio 2.2. Calificación máxima: 2,5 puntos

Sea la función $f(x) = \frac{|x|}{x-1}$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (0,75 puntos) Determinar todas las asíntotas de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Calcular algebraicamente $\lim_{x \to +\infty} f(x)^x$.

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Ejercicio 3.1. Calificación máxima: 2,5 puntos

Resuelva los siguientes apartados,

a) (1,25 puntos) Para cierto valor $a \in \mathbb{R}$ se sabe que $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$ es finito. Calcule algebraicamente el valor de a y el resultado del límite para dicho valor de a.

b) (0,5 + 0,75 puntos) Sea la función $f(x) = x^4 - 4x - 1$. Estudie la monotonía de $f(x)$. Justifique mediante lo anterior y aplicando también el teorema de Bolzano que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exclusivamente dos raíces reales.

Ejercicio 3.2. Calificación máxima 2,5 puntos.

Resuelva los siguientes apartados,

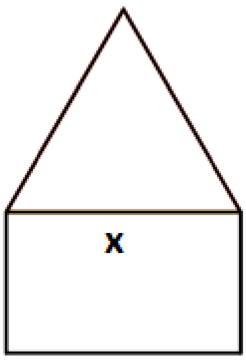
a) (1 punto) Resuelva algebraicamente el siguiente límite: $\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

b) (1,5 puntos) Considere la curva $y = \frac{x-4}{ax^2+bx+c}$ donde a, b y c son constantes distintas de cero. La curva tiene un mínimo local en $(2,1)$ y una asíntota vertical cuya ecuación es $x = 1$. Hallar algebraicamente los valores de a, b y c.

Bloque 4. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Ejercicio 4. Calificación máxima 2,5 puntos.

Disponemos de 10 $metros$ de una barra metálica. Con ella queremos construir una estructura formada por un rectángulo que está rematado por arriba por un triángulo equilátero. La base del triángulo coincide con el lado superior del rectángulo, como se observa en la figura. Para construir la estructura, se cortan 6 $trozos$ de la barra original de longitudes adecuadas y se sueldan para obtener la forma pedida. Se pide:



a) (0.5 puntos) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular su altura en función de x.

b) (2 puntos) Determinar las medidas de cada una de las seis longitudes debemos cortar la barra original para que la estructura resultante encierre un área total máxima. ¿Cuánto mide esa área total máxima?

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº 4 DE MATEMÁTICAS II

Ejercicio 1.1. Calificación máxima: 2,5 puntos (Modelo orientativo – Evau Madrid 2020-2021, ej A.1.)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & x\\ 1 & 0 & x-1\\ x+1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}0 & 1/3 & -1/3\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2/3 & -2/3\end{pmatrix}$**, se pide,**

a) (0,5 puntos) Una matriz tiene inversa cuando es cuadrada y su rango es máximo. Determinar los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.

b) (1 punto) Para $x=-1$ calcular A^{-1}.

c) (1,25 puntos) Para $x=1$ calcular $(A\cdot B^t)^{2024}$.

Solución

a) (0,5 puntos) Una matriz tiene inversa cuando es cuadrada y su rango es máximo. Determinar los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.

La matriz A es cuadrada. Por lo tanto, para que tenga inversa $Rg(A)=3$

Calculamos el rango de la matriz A,

$$Rg(A)=Rg\begin{pmatrix}0 & 1 & x\\ 1 & 0 & x-1\\ x+1 & 0 & 3\end{pmatrix}=Rg\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & x-1\\ 0 & x+1 & 3\end{pmatrix}\underset{F_3{}'=F_3-(x+1)\cdot F_3}{=}$$

$$\underset{F_3{}'=F_3-(x+1)\cdot F_3}{=}Rg\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & x-1\\ 0 & 0 & 3-(x-1)\cdot(x+1)\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si anulamos el término de posición (3,3) tendremos que,

$$3-(x-1)\cdot(x+1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3-x^2+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4=x^2 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm 2$$

En ese caso,

- Si $x=+2$ entonces,

$$Rg(A)=Rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2$$

- Si $x=-2$ entonces,

$$Rg(A)=Rg\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2$$

- Si Si $x \neq +2$ y $x \neq -2$ entonces,

$$Rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & 3-(x-1)\cdot(x+1) \end{pmatrix} = 3$$

b) (1 punto) Para $x = -1$ calcular A^{-1}.

Para $x = -1$, la matriz A es,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz inversa A^{-1} por el método Gauss-Jordan según,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2{}' = 3\cdot F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1{}' = 3\cdot F_1 + 2\cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1{}' = F_1 :\ 3} \\ \xrightarrow{F_2{}' = F_2 :\ 3} \\ \xrightarrow{F_3{}' = F_3 :\ 3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la matriz inversa es,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

c) (1,25 puntos) Para $x = 1$ calcular $(A \cdot B^t)^{2024}$.

Como,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1 & 2/3 \\ -1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1 & 2/3 \\ -1/3 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En ese caso, como,

$$(A \cdot B^t)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B^t)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

tendremos que,

$$(A \cdot B^t)^{2024} = [(A \cdot B^t)^3]^{674} \cdot (A \cdot B^t)^2 = (-I)^{674} \cdot (A \cdot B^t)^2 = I \cdot (A \cdot B^t)^2 =$$

$$= (A \cdot B^t)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.2. Calificación máxima: 2,5 puntos

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$**, se pide,**

a) (1 punto) Discuta el rango de la matriz BA en función del valor del parámetro real k.

b) (1 punto) Calcule la matriz inversa de $C = AB$ para $k = 1$. Para este mismo valor resuelva la ecuación $XC = 2A^t$.

c) (0,5 puntos) Para $k = 0$, calcule $(AB)^{100}$.

Solución

a) (1 punto) Discuta el rango de la matriz BA en función del valor del parámetro real k.

Calculamos BA

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 1-k & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como cambiar las columnas no varia el rango, colocaremos la tercera columna en la segunda y la segunda en la primera, dejando la primera columna en la tercera.

$$Rg\begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 1-k & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = Rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & k \\ 0 & -1 & 1-k \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos Gauss-Jordan según,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & k \\ 0 & -1 & 1-k \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3{}'=F_3-F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & k \\ 0 & -1 & 1-k \\ 0 & -1 & 1-k \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3{}'=F_3+F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & k \\ 0 & -1 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En ese caso,

$$Rg(A) = Rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & k \\ 0 & -1 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$$

b) (1 punto) Calcule la matriz inversa de $C = AB$ para $k = 1$. Para este mismo valor resuelva la ecuación $XC = 2A^t$.

Calculamos AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa mediante el método de Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1´=F_1-F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2´=F_2:2]{F_1´=F_1:(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos la ecuación,

$$XC = 2A^t \iff XC \cdot C^{-1} = 2A^t \cdot C^{-1} \iff X \cdot I = 2A^t \cdot C^{-1} \iff X = 2A^t \cdot C^{-1}$$

Por Lo tanto,

$$X = 2A^t \cdot C^{-1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

En conclusión,

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) (0,5 puntos) Para $k = 0$, calcule $(AB)^{1001}$.

Calculamos AB

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En ese caso,

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$(AB)^{1001} = ((AB)^2)^{50} \cdot (AB) = I^{50} \cdot (AB) = AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.1. Calificación máxima: 2,5 puntos

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & si\ x \leq 1 \\ \frac{\ln(x)}{x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$

a) (0,5 + 0,5 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x)$ y comprobar algebraicamente si $f(x)$ es derivable en $x = 1$.

b) (0,75 puntos) Hallar las asíntotas de $f(x)$.

c) (0,75 puntos) Determinar el valor $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. Escribe la ecuación de dicha tangente en el formato $y = mx + n$

Solución

a) (0,5 + 0,5 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x)$ y comprobar algebraicamente si $f(x)$ es derivable en $x = 1$.

Las funciones $y = \frac{2}{x+1}$ e $y = \frac{ln(x)}{x-1}$ son funciones continuas en $x < 1$ y $x > 1$ respectivamente, al ser cocientes de funciones continuas en los dominios señalados salvo, quizá en los valores que anulan a los denominadores.

Anulamos el denominador de la función en su denominador para cada "trozo",

- Si $x < 1$ entonces $x + 1 = 0$ nos lleva a que $x = -1$. En $x = -1$, $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito porque hay una asíntota vertical.
- Si $x > 1$ entonces $x - 1 = 0$ nos lleva a que $x = 1$. Estudiamos el caso aparte.

Estudiamos si la función $f(x)$ es continua en $x = 1$. La función será continua en $x = 1$ si y solo si

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

Lo comprobamos,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} \underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x \to 1^+} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$$f(1) = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Al existir y coincidir los tres valores, podemos decir que $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Comprobamos si $f(x)$ es derivable en $x = 1$. La función será derivable en $x = 1$ si y solo si

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$$

Lo comprobamos,

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-2}{(x+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x} \cdot (x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1) - x \cdot \ln(x)}{x \cdot (x-1)^2} \underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1 - x \cdot \ln(x) - 1}{(x-1)^2 + 2x(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-x \cdot \ln(x)}{x^2 + 1 - 2x + 2x^2 - 2x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-x \cdot \ln(x)}{+3x^2 - 4x + 1} \underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{-1 \cdot \ln(x) - 1}{6x - 4} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-1}{6x-4} = -\frac{1}{2}$$

Puesto que coinciden ambos valores, la función $f(x)$ es derivable en $x = 1$.

b) (0,75 puntos) Hallar las asíntotas de $f(x)$.

La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$ ya que,

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{2}{x+1} = \pm\infty$$

Además, tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ en su tendencia a menos infinito ya que,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

Además, tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ en su tendencia a mas infinito ya que,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x-1} \underset{L'Hôpital}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

c) (0,75 puntos) Determinar el valor $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. Escribe la ecuación de dicha tangente en el formato $y = mx + n$.

La derivada de la función $f(x)$ si $x < 1$ es,

$$f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$$

Igualamos dicha derivada a $-\frac{1}{2}$ para encontrar dicho valor $x_0 < 1$ según,

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-2}{(x+1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 = (x+1)^2 \Leftrightarrow \pm 2 = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = +1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Por lo tanto, el valor buscado es $x = -3$. La imagen de la función para ese valor es,

$$f(-3) = \frac{2}{(-3+1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

La recta tangente en ese valor tendrá por ecuación,

$$y - f(-3) = f'(-3) \cdot (x - (-3)) \Leftrightarrow y - (-1) = -\frac{1}{2} \cdot (x+3) \Leftrightarrow y + 1 = -\frac{1}{2} \cdot (x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow y = -0{,}5x - 2{,}5$$

Ejercicio 2.2. Calificación máxima: 2,5 puntos

Sea la función $f(x) = \frac{|x|}{x-1}$

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (0,75 puntos) Determinar todas las asíntotas de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular algebraicamente $\lim_{x \to +\infty} f(x)^x$.

Solución

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

La función $f(x)$ se puede reescribir como función a trozos según,

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{x-1} & si\ x < 0 \\ \dfrac{x}{x-1} & si\ 0 \leq x \end{cases}$$

Estudiamos si la función $f(x)$ es continua en $x=1$. La función será continua en $x=0$ si y solo si

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

Lo comprobamos,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x-1} = \frac{-0}{-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$f(0) = \frac{0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Al existir y coincidir los tres valores, podemos decir que $f(x)$ es continua en $x=01$.

Comprobamos si $f(x)$ es derivable en $x=0$. La función será derivable en $x=0$ si y solo si

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$$

Lo comprobamos,

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1\cdot(x-1)+x\cdot 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{1} = +1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1\cdot(x-1)-x\cdot 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

Puesto que no coinciden ambos valores, la función $f(x)$ NO es derivable en $x=0$.

b) (0,75 puntos) Determinar todas las asíntotas de $f(x)$.

La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=1$ ya que,

$$\lim_{x\to +1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} = \pm\infty$$

Además, tiene una asíntota horizontal en $y=-1$ en su tendencia a menos infinito ya que,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{x-1} = -1$$

Y tiene una asíntota horizontal en $y=+1$ en su tendencia a mas infinito ya que,

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-1} = +1$$

c) (0,75 puntos) Calcular algebraicamente $\lim_{x\to+\infty} f(x)^x$.

Se trata de una indeterminación 1^∞ ya que,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x = \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}\right)^{\lim_{x\to+\infty} x} = 1^\infty$$

Por tanto, resolviendo la indeterminación tendremos que,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x = e^{\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{x}{x-1}-1\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{x-x+1}{x-1}\right)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}} = e^1 = e$$

Ejercicio 3.1. Calificación máxima: 2,5 puntos

Resuelva los siguientes apartados,

a) (1,25 puntos) Para cierto valor $a\in\mathbb{R}$ se sabe que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)$ es finito. Calcula algebraicamente el valor de a y el resultado del límite para dicho valor de a.

b) (0,5 + 0,75 puntos) Sea la función $f(x) = x^4 - 4x - 1$. Estudie la monotonía de $f(x)$. Justifique mediante lo anterior y aplicando también el teorema de Bolzano que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exclusivamente dos raíces reales.

Solución

a) (1,25 puntos) Para cierto valor $a\in\mathbb{R}$ se sabe que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right)$ es finito. Calcula algebraicamente el valor de a y el resultado del límite para dicho valor de a.

Operando,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{a}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x-a\cdot(e^x-1)}{(e^x-1)\cdot 2x} \underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2-a\cdot e^x}{e^x\cdot 2x+(e^x-1)\cdot 2}$$

En ese caso, como el denominador tiende a anularse mientras que el numerador tiende al valor $2-a$, ocurrirá que,

- Si $a\neq 2$ entonces el límite es infinito.
- Si $a = 2$ entonces,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{2}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{(e^x-1)\cdot x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{e^x\cdot x+(e^x-1)}$$

$$\underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{e^x\cdot x+e^x+e^x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{x+2} = -\frac{1}{2}$$

b) (0,5 + 0,75 puntos) Sea la función $f(x) = x^4 - 4x - 1$. Estudie la monotonía de $f(x)$ señalando los extremos absolutos de la función. Justifique mediante lo anterior y aplicando también el teorema de Bolzano que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exclusivamente dos raíces reales.

La función $f(x)$ es un polinomio y, por tanto, es una función continua y derivable. Calculamos la derivada de la función,

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$

Igualamos a cero y resolvemos para encontrar los posibles extremos relativos,

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Como,

$$f''(x) = 12x^2$$

entonces,

$$f''(1) = 12 \cdot 1^2 = 12 > 0$$

Nos indica que en $x = 1$ hay un mínimo, que es absoluto, ya que la función,

- $f(x)$ decrece $\forall x \in (-\infty, +1)$
- $f(x)$ crece $\forall x \in (+1, +\infty)$

Por otra parte, observamos que,

$$f(-1) = (-1)^4 - 4 \cdot (-1) - 1 = 1 + 4 - 1 = +4 > 0$$

$$f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$$

Por lo tanto, en virtud del teorema de Bolzano tendremos que,

$$\exists\, c \in (-1,0) \quad , \qquad f(c) = 0$$

Como la función decrece $\forall x \in (-\infty, +1)$ entonces no puede haber más que una raíz de la función en la semirrecta $(-\infty, +1)$.

Además, como

$$f(1) = 1^4 - 4 \cdot 1 - 1 = -4 < 0$$

$$f(2) = 2^4 - 4 \cdot 2 - 1 = 16 - 8 - 1 = +7 > 0$$

Por lo tanto, en virtud del teorema de Bolzano tendremos que,

$$\exists\, c' \in (0,2) \quad , \qquad f(c') = 0$$

Como la función crece $\forall x \in (+1, +\infty)$ entonces no puede haber más que una raíz de la función en la semirrecta $(+1, +\infty)$.

En ese caso, hemos probado que la función $f(x)$ tiene exclusivamente dos raíces reales.

Ejercicio 3.2. Calificación máxima 2,5 puntos.

Resuelva los siguientes apartados,

a) (1 punto) Resuelve algebraicamente el siguiente límite: $\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

b) (1,5 puntos) Considere la curva $y = \frac{x-4}{ax^2+bx+c}$ **donde** a, b **y** c **son constantes distintas de cero. La curva tiene un mínimo local en** $(2,1)$ **y una asíntota vertical cuya ecuación es** $x = 1$**. Hallar algebraicamente los valores de** a, b **y** c**.**

Solución

a) (1 punto) Resuelve algebraicamente el siguiente límite: $\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \infty \cdot 0$$

Operamos del siguiente modo,

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} \underset{L'Hòpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{sen\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{x}}$$

Volvemos a aplicar la regla de L´Hôpital según,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{2}{x}} \underset{L'Hòpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{cos\left(\frac{1}{x}\right)}{2} = \frac{1}{2}$$

b) (1,5 puntos) Considere la curva $y = \frac{x-4}{ax^2+bx+c}$ donde a, b y c son constantes distintas de cero. La curva tiene un mínimo local en $(2,1)$ y una asíntota vertical cuya ecuación es $x = 1$. Hallar algebraicamente los valores de a, b y c.

- Como la función pasa por el punto $(2,1)$ entonces,

$$\frac{2-4}{a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2}{4a+2b+c} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 4a + 2b + c$$

- Como la función tiene una asíntota vertical $x = 1$ entonces,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-4}{ax^2+bx+c} = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c = 1$$

La derivada de la función es,

$$y' = \frac{1 \cdot (ax^2+bx+c) - (2ax+b) \cdot (x-4)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

En ese caso,

- Como la función tiene un mínimo local en $x = 2$ entonces,

$$y'(2)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 \cdot (a \cdot 2^2 + 2b + c) - (4a+b) \cdot (2-4)}{(a \cdot 2^2 + 2b + c)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 2b + c + 8a + 2b = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 12a + 4b + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -12a - 4b$$

Sustituimos el valor de c en función de a en la primera igualdad obtenida,

$$2 = 4a + 2b + c \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 4a + 2b - 12a - 4b \quad \Leftrightarrow \quad 2 = -8a - 2b \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -4a - b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = -1 - 4a$$

Sustituimos los valores de b y c en la segunda igualdad obtenida,

$$a + b + c = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a - 1 - 4a - 12a - 4 \cdot (-1-4a) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 - 15a + 4 + 16a = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a = -2$$

En consecuencia, los otros parámetros son,

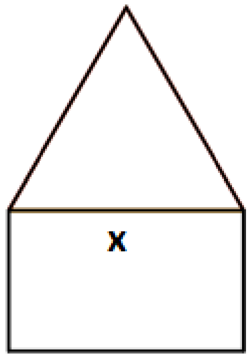
$$b = -1 - 4a = -1 - 4 \cdot (-2) = 7$$

$$c = -12a - 4b = -12 \cdot (-2) - 4 \cdot 7 = -4$$

Y en ese caso, $\quad a = -2, \; b = 7 \;\; y \;\; c = -4$

Ejercicio 4. Calificación máxima 2,5 puntos.

Disponemos de $10\ metros$ de una barra metálica. Con ella queremos construir una estructura formada por un rectángulo que está rematado por arriba por un triángulo equilátero. La base del triángulo coincide con el lado superior del rectángulo, como se observa en la figura. Para construir la estructura, se cortan $6\ trozos$ de la barra original de longitudes adecuadas y se sueldan para obtener la forma pedida. Se pide:

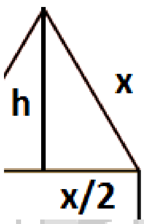


a) (0.5 puntos) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular su altura h en función de x.

b) (2 puntos) Determinar las medidas de cada una de las seis longitudes debemos cortar la barra original para que la estructura resultante encierre un área total máxima. ¿Cuánto mide ese área total máxima?

Solución

a) (0.5 puntos) Si denotamos por x la base del triángulo, calcular su altura en función de x.

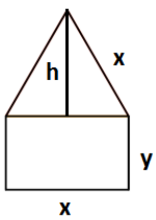


Aplicando el teorema de Pitágoras,

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \iff h^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \iff h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \iff h^2 = \frac{3x^2}{4}$$

$$\iff h = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} \iff h = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{2}$$

b) (2 puntos) Determinar las medidas de cada una de las seis longitudes debemos cortar la barra original para que la estructura resultante encierre un área total máxima. ¿Cuánto mide ese área total máxima?



Llamamos y a la medida de la altura del rectángulo. En ese caso, como hay 10 metros de barra metálica,

$$10 = 2x + 2y + 2x \iff 5 = 2x + y \iff$$
$$\iff y = 5 - 2x$$

El área de la figura viene dada por,

$$A(x, y) = xy + \frac{x \cdot h}{2}$$

Es decir,

$$A(x) = x \cdot (5 - 2x) + \frac{x \cdot \left(\frac{x \cdot \sqrt{3}}{2}\right)}{2} = 5x - 2x^2 + \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Calculamos los máximos de la función $A(x)$. Para ello calculamos su derivada,

$$A'(x,y) = 5 - 4x + \frac{2x \cdot \sqrt{3}}{4} = 5 - 4x + \frac{x \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Igualamos a cero la derivada y resolvemos

$$A'(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5 - 4x + \frac{x \cdot \sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10 - 8x + x \cdot \sqrt{3} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 10 = x \cdot \left(8 - \sqrt{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{10}{8 - \sqrt{3}} \approx 1{,}595\ m$$

Como

$$A'(x) = -4 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Y,

$$A'\left(\frac{10}{8 - \sqrt{3}}\right) = -4 + \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

Para el valor $x = \frac{10}{8-\sqrt{3}} \approx 1{,}595\ cm$ se alcanza el máximo para la función área.

En estas condiciones,

$$y = 5 - 2x = y = 5 - 2 \cdot \left(\frac{10}{8 - \sqrt{3}}\right) = 5 - \frac{20}{8 - \sqrt{3}} = \frac{20 - 5\sqrt{3}}{8 - \sqrt{3}} \approx 1{,}809\ m$$

Por lo tanto, tendremos que cortar la barra en cuatro trozos de longitud

$$x = \frac{10}{8 - \sqrt{3}} \approx 1{,}595\ m$$

Y dos trozos de longitud

$$y = \frac{20 - 5\sqrt{3}}{8 - \sqrt{3}} \approx 1{,}809\ m$$

El área máxima para estas longitudes vendrá dada por el valor,

$$A\left(\frac{10}{8 - \sqrt{3}}\right) = 5 \cdot \left(\frac{10}{8 - \sqrt{3}}\right) - 2\left(\frac{10}{8 - \sqrt{3}}\right)^2 + \frac{\left(\frac{10}{8 - \sqrt{3}}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3.9885\ m^2$$