CONTROL 2

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Lunes 08 de NOVIEMBRE de 2024

1:40 minutos

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 11 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.
- Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

Puntuación máxima: 2,25 puntos

1. Consideremos las matrices reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Sin utilizar la calculadora:

a) (0,25 puntos) Calcula $B^t \cdot A$.

b) (0,5 puntos) Comprueba que $C^4 = -4I$.

c) (0,5 puntos) Aplicando el resultado del apartado anterior o de cualquier otro modo, calcula C^{14}.

d) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $XC - 2I = C^5$ con I la matriz identidad de orden 2.

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

Puntuación máxima: 2,25 puntos **(Madrid, Matemáticas II, EvAU Julio 2021, Ej. A3 y B3)**

2. a) (1,25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

$$a1)\ (0.5\ puntos)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(1-2x)}{x-2x^2-sen\,x}\qquad a2)\ (0{,}75\ puntos)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{sen\,\frac{1}{x}}\right)$$

b) (1 punto) Dada la función $f(x)=x^4+ax^2+bx+c$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$, calcular a,b,c sabiendo que la recta tangente a $f(x)$ en $x=-1$ es $y=3x+1$ y, además, en $x=2$ la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

Puntuación máxima: 2,5 puntos

3. Dada la siguiente serie de potencias,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \cdot x^n$$

i) (0,5 puntos) Calcula su radio de convergencia.

ii) (0,25 + 0,5 + 0,5 puntos) Calcula su intervalo de convergencia argumentando si es convergente o no en los extremos de dicho intervalo.

iii) (0,75 puntos) Para $x = 1$ calcula mediante un razonamiento matemático correcto dicha suma.

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

Puntuación máxima: 1,75 puntos **(Madrid, Matemáticas II, EvAU Junio 2024, Ej. A2)**

4. Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$ se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$. Expresa dicha ecuación en la forma $y = mx + n$ con $m, n \in \mathbb{R}$ sin expresiones decimales.

b) i) (0,5 puntos) El teorema de Rolle dice lo siguiente:

Sea $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo cerrado, derivable en el intervalo abierto y con $g(a) = g(b)$. Entonces

$$\exists\, c \in (a, b)\ ,\ \ g'(c) = 0$$

Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle.

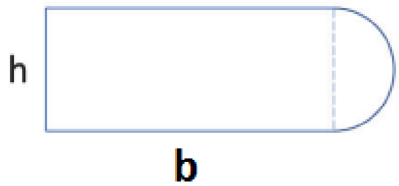
ii) (0,5 puntos) Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez el teorema de Bolzano.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Puntuación máxima: 2,25 puntos **(Castilla La Mancha, Matemáticas II, EvAU Julio 2023, Ej. 3)**

5. Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta.



El rectángulo tiene de lados $h,\ b \in \mathbb{R}$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de $80\ metros$ de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento.

a) (0,5 puntos) Escribe el área del aparcamiento en función del valor h exclusivamente.

b) (0,5 puntos) Escribe matemáticamente la condición/relación que deben cumplir h y b para que el aparcamiento tenga un perímetro de $80\ metros$.

c) (1 punto) Calcula los valores de h y b para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible con un perímetro de $80\ metros$.

d) (0,25 puntos) Calcula el área del mayor aparcamiento posible con las condiciones de b)

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

LA WEB DEL PROFE DE MATES

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº 2

DE MATEMÁTICAS II-ANÁLISIS Y ENFOQUES

Puntuación máxima: 2,25 puntos

1. Consideremos las matrices reales $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$. Sin utilizar la calculadora:

a) (0,25 puntos) Calcula $\boldsymbol{B^t\cdot A}$.

b) (0,5 puntos) Comprueba que $\boldsymbol{C^4=-4I}$.

c) (0,5 puntos) Aplicando el resultado del apartado anterior o de cualquier otro modo, calcula $\boldsymbol{C^{14}}$.

d) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $\boldsymbol{XC-2I=C^5}$ con $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad de orden 2.

a) (0,25 puntos) Calcular $\boldsymbol{B^t\cdot A}$.

$$B^t\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}^t\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

b) (0,5 puntos) Comprueba que $\boldsymbol{C^4=-4I}$.

$$C^2=C\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$C^4=C^2\cdot C^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-4\cdot I$$

c) (0,5 puntos) Calcula $\boldsymbol{C^{14}}$.

$$C^{14}=(C^4)^3\cdot C^2=(-4I)^3\cdot C^2=(-4)^3\cdot I^3\cdot C^2=$$

$$=-64\cdot C^2=-64\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -128\\ 128 & 0\end{pmatrix}$$

d) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial $\boldsymbol{XC-2I=C^5}$ con $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad de orden 2.

$$XC-2I=C^5 \iff XC=C^5+2I \iff XC\cdot C^{-1}=(C^5+2I)\cdot C^{-1} \iff$$

$$\iff XI=(C^5+2I)\cdot C^{-1} \iff X=(C^5+2I)\cdot C^{-1}$$

Como $C^4=-4I$ entonces,

$$C^5=C^4\cdot C=-4I\cdot C=-4C$$

En ese caso,

$$X=(C^5+2I)\cdot C^{-1}=(-4C+2I)\cdot C^{-1}=-4C\cdot C^{-1}+2\cdot I\cdot C^{-1}=-4\cdot I+2C^{-1}$$

Calculamos C^{-1} mediante el método de Gauss-Jordan,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2{}'=F_2+F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1{}'=-2\cdot F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}\xrightarrow{F_1{}'=F_1:(-2)} \\ \xrightarrow{F_2{}'=F_2:2}\end{array} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto,

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Y finalmente resolvemos la ecuación según,

$$X=-4I+2\cdot C^{-1}=-4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Puntuación máxima: 2,25 puntos **(Madrid, Matemáticas II, EvAU Julio 2021, Ej. A3 y B3)**

2. a) (1,25 puntos) Calcule, en caso de existir, el valor de los siguientes límites:

$$\boldsymbol{a1)\ (0.5\ puntos)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{x^2\cdot(1-2x)}}{\boldsymbol{x-2x^2-sen\,x}}\qquad \boldsymbol{a2)\ (0,75\ puntos)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x}}-\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{sen\frac{1}{x}}}\right)$$

b) (1 punto) Dada la función $f(x)=x^4+ax^2+bx+c$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$, calcular a,b,c sabiendo que la recta tangente a $f(x)$ en $x=-1$ es $y=3x+1$ y, además, en $x=2$ la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión.

a) (0,5 + 0,75 puntos) Resolver.

$$\boldsymbol{a1)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{x^2\cdot(1-2x)}}{\boldsymbol{x-2x^2-sen\,x}}\underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2x-6x^2}{1-4x-\cos x}\underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2-12x}{-4+sen\,x}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{a2)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x}}-\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{sen\frac{1}{x}}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x\cdot sen\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x\cdot sen\frac{1}{x}}=$$

$$=0-2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\cdot sen\frac{1}{x}}\underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}}-2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}}=-2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}=-2$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

b) (1 punto) Dada la función $f(x)=x^4+ax^2+bx+c$ con $a,b,c\in\mathbb{R}$, calcular a,b,c sabiendo que la recta tangente a $f(x)$ en $x=-1$ es $y=3x+1$ y, además, en $x=2$ la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión.

Se nos dan las siguientes condiciones para el cálculo de los parámetros,

La recta tangente a $f(x)$ en $x=-1$ es $y=3x+1$	$\Leftrightarrow$	$f(-1)=y(-1)=3\cdot(-1)+1=-2$ $f´(-1)=3$
En $x=2$ la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión.	$\Leftrightarrow$	$f´´(2)=0$

Por lo tanto,

$$f(-1)=-2\quad\Leftrightarrow\quad(-1)^4+a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=-2\quad\Leftrightarrow\quad 1+a-b+c=2$$

Calculamos la derivada,

$$f´(x)=4x^3+2ax+b$$

Entonces,

$$f´(-1)=3\quad\Leftrightarrow\quad 4\cdot(-1)^3+2a\cdot(-1)+b=3\quad\Leftrightarrow\quad -4-2a+b=3$$

Calculamos la segunda derivada,

$$f´(x)=12x^2+2a$$

Entonces,

$$f´´(2)=0\quad\Leftrightarrow\quad 12\cdot 2^2+2a=0\quad\Leftrightarrow\quad 48+2a=0\quad\Leftrightarrow\quad a=-24$$

En ese caso, como

$$-4-2a+b=3$$

Entonces,

$$-4-2\cdot(-24)+b=3 \;\Leftrightarrow\; -4+48+b=3 \;\Leftrightarrow\; b=3+4-48=-41$$

Y como,

$$1+a-b+c=-2$$

Entonces,

$$1+(-24)-(-41)+c=-2 \;\Leftrightarrow\; 1-24+41+c=-2 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; c=-2-1+24-41=-20$$

En conclusión, $\boldsymbol{a=-24}$, $\boldsymbol{b=-41}$, $\boldsymbol{c=-20}$

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

Puntuación máxima: 2,5 puntos

3. Dada la siguiente serie de potencias,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})} \cdot \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}$$

i) (0,5 puntos) Calcula su radio de convergencia.

ii) (0,25 + 0,5 + 0,5 puntos) Calcula su intervalo de convergencia argumentando si es convergente o no en los extremos de dicho intervalo.

iii) (0,75 puntos) Para $x = 1$ calcula mediante un razonamiento matemático correcto dicha suma.

i) (0,5 puntos) Calcula su radio de convergencia.

Como el radio de convergencia $r \in \mathbb{R}^+$ es tal que,

$$\frac{1}{r} = \lim_{x \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left|\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right|}{\left|\frac{1}{n\cdot(n+1)}\right|} = \lim_{x \to \infty} \frac{n\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot(n+2)} = 1$$

En tal caso, $\frac{1}{r} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1$

En conclusión, el radio de convergencia es $r = 1$.

ii) (0,75 puntos) Calcula su intervalo de convergencia argumentando si es convergente o no en los extremos de dicho intervalo.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

En principio la serie,

- Converge, $\forall\, x \in (0-1, 0+1) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in (-1,1)$
- Diverge, $\forall\, x \in (-\infty, 0-1) \cup (0+1, +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$
- Comprobamos si la serie converge en $x = -1$.

La serie será,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} \cdot (-1)^n$$

Se trata de una serie alternada. Probamos si converge por el criterio de Leibniz, probando que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (-1)^n \quad a_n > 0 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

converge si y solo si

1) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 0$$

Por lo tanto, nuestra serie cumple esta primera condición.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}^* \; , a_{n+1} < a_n$

$$n \cdot (n+1) < (n+1) \cdot (n+2) \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} < \frac{1}{n\cdot(n+1)} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}^* \;\; a_{n+1} < a_n$$

Por lo tanto, nuestra serie cumple esta segunda condición.

Por el criterio de Leibniz para series alternadas, concluimos que la serie para $x = -1$ converge.

- Comprobamos ahora si la serie converge en $x = 1$.

  La serie será,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} \cdot (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

  Por el criterio de comparación

$$n \cdot (n+1) = n^2 + n \geq n^2 \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n\cdot(n+1)} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}^* \;\; \Leftrightarrow$$

  Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

  Converge al ser una p-serie para $p = 2 > 1$ y, esta serie mayora a la que queremos analizar su carácter, entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} \; es\ convergente$$

  En conclusión,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} \cdot x^n \; \begin{cases} converge\ \forall x \in [-1, +1] \\ diverge\ \ \forall x \in (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty) \end{cases}$$

iii) (0,75 puntos) Para $x = 1$ calcula mediante un correcto razonamiento matemático dicha suma.

Para $x = 1$, la serie es telescópica. Resolvemos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} \cdot 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \; \dots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Puntuación máxima: 1,75 puntos **(Madrid, Matemáticas II, EvAU Junio 2024, Ej. A2)**

4. Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$ se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$. Expresa dicha ecuación en la forma $y = mx + n$ con $m, n \in \mathbb{R}$ sin expresiones decimales.

b) i) (0,5 puntos) El teorema de Rolle dice lo siguiente:

Sea $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo cerrado, derivable en el intervalo abierto y con $g(a) = g(b)$. Entonces

$$\exists\, c \in (a, b) \ , \ g'(c) = 0$$

Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo (−π, 0) utilizando justificadamente el teorema de Rolle.

ii) (0,5 puntos) Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez el teorema de Bolzano.

a) (0.75 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$. Expresa dicha ecuación en la forma $y = mx + n$ con $m, n \in \mathbb{R}$ sin expresiones decimales.

La ecuación de la recta tangente en $x = \pi$ es de la forma,

$$y - f(\pi) = f'(\pi) \cdot (x - \pi)$$

En ese caso, como,

$$f(\pi) = \pi^4 + \pi \cdot \pi^3 + \pi^2 \cdot \pi^2 + \pi^3 \cdot \pi + \pi^4 = 5\pi^4$$

Además,

$$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$$

En ese caso,

$$f'(\pi) = 4\pi^3 + 3\pi \cdot \pi^2 + 2\pi^2 \cdot \pi + \pi^3 = 10\pi^3$$

La ecuación de la recta tangente en $x = \pi$ es,

$$y - 5\pi^4 = 10\pi^3 \cdot (x - \pi) \quad \Leftrightarrow \quad y = 10\pi^3 x - 10\pi^4 + 5\pi^4 \quad \Leftrightarrow \quad y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$$

b) i) (0,5 puntos) El teorema de Rolle dice lo siguiente:

Sea $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo cerrado, derivable en el intervalo abierto y con $g(a) = g(b)$. Entonces

$$\exists\, \boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \ , \ \boldsymbol{g'(c) = 0}$$

Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle.

La función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ al ser un polinomio. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en el intervalo $(-\pi, 0)$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Además,

$$f(-\pi) = (-\pi)^4 + \pi \cdot (-\pi)^3 + \pi^2 \cdot (-\pi)^2 + \pi^3 \cdot (-\pi) + \pi^4 = \pi^4$$

$$f(0) = 0^4 + \pi \cdot 0^3 + \pi^2 \cdot 0^2 + \pi^3 \cdot 0 + \pi^4 = \pi^4$$

Como $f(-\pi) = f(0)$ el teorema de Rolle, nos garantiza la existencia de al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$.

$$\exists\ c \in (a, b)\ \ ,\ \ f'(c) = 0$$

ii) (0,5 puntos) Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez el teorema de Bolzano.

La función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ al ser un polinomio. Su derivada es,

$$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$$

Por lo tanto, $f'(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ al ser un polinomio y, por tanto, es continua en el intervalo $[-\pi, 0]$ Además,

$$f'(-\pi) = 4(-\pi)^3 + 3\pi \cdot (-\pi)^2 + 2\pi^2 \cdot (-\pi) + \pi^3 = -2\pi^3 < 0$$

$$f'(0) = 4 \cdot 0^3 + 3\pi \cdot 0^2 + 2\pi^2 \cdot 0^2 + \pi^3 = \pi^3 > 0$$

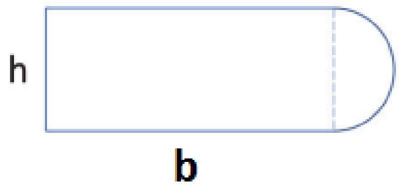
Como $f'(-\pi) \cdot f'(0) < 0$ el teorema de Rolle, nos garantiza la existencia de al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$.

$$\exists\ c \in (a, b)\ \ ,\ \ f'(c) = 0$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Puntuación máxima: 2,25 puntos **(Castilla La Mancha, Matemáticas II, EvAU Julio 2023, Ej. 3)**

5. Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta.



El rectángulo tiene de lados $h,\ b \in \mathbb{R}$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 $metros$ de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento.

e) (0,5 puntos) Escribe el área del aparcamiento en función del valor h exclusivamente.

f) (0,5 puntos) Escribe matemáticamente la condición/relación que deben cumplir h y b para que el aparcamiento tenga un perímetro de 80 $metros$.

g) (1 punto) Calcula los valores de h y b para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible con un perímetro de 80 $metros$.

h) (0,25 puntos) Calcula el área del mayor aparcamiento posible con las condiciones de b)

a) (0,5 puntos) Escribe el área del aparcamiento en función del valor h exclusivamente.

El área del aparcamiento, en función de $b, r\ y\ h$, siendo r el radio del semicírculo viene dada por,

$$A(h,b) = h \cdot b + \frac{\pi r^2}{2}$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Si el semicírculo tiene de diámetro h entonces el radio del semicírculo es $r = \frac{h}{2}$. En ese caso,

$$A(h,b) = h \cdot b + \frac{\pi r^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A(h,b) = h \cdot b + \frac{\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A(h,b) = h \cdot b + \frac{\pi h^2}{8}$$

Como, el perímetro del aparcamiento, en función de $r\ y\ h$ viene dado por,

$$P(h,b) = 80 \quad \Leftrightarrow \quad 2b + h + \frac{2\pi r}{2} = 80 \quad \Leftrightarrow \quad 2b + h + \pi r = 80$$

Si el semicírculo tiene de diámetro h entonces el radio del semicírculo es $r = \frac{h}{2}$. En ese caso,

$$2b + h + \pi r = 80 \quad \Leftrightarrow \quad 2b + h + \frac{\pi h}{2} = 80$$

En ese caso,

$$2b = 80 - h - \frac{\pi h}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b = 40 - \frac{h}{2} - \frac{\pi h}{4}$$

Y concluimos que,

$$A(h,b) = h \cdot b + \frac{\pi h^2}{8} \quad \Leftrightarrow \quad A(h) = h \cdot \left(40 - \frac{h}{2} - \frac{\pi h}{4}\right) + \frac{\pi h^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad A(h) = 40h - \frac{h^2}{2} - \frac{\pi h^2}{4} + \frac{\pi h^2}{8} \quad \Leftrightarrow \quad A(h) = 40h - \frac{h^2}{2} - \frac{2\pi h^2}{8} + \frac{\pi h^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad A(h) = 40h - \frac{h^2}{2} - \frac{\pi h^2}{8}$$

b) (0,5 puntos) Escribe matemáticamente la condición/relación que deben cumplir h y b para que el aparcamiento tenga un perímetro de $80\ metros$.

Según se dijo en el apartado a) el perímetro del aparcamiento, en función de $h\ y\ b$ es,

$$2b + h + \frac{\pi h}{2} = 80$$

c) (1 punto) Calcula los valores de h y b para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible con un perímetro de $80\ metros$.

Como,

$$A(h) = 40h - \frac{h^2}{2} - \frac{\pi h^2}{8} \quad \Leftrightarrow \quad A(h) = \frac{320h - 4h^2 - \pi h^2}{8}$$

Calculamos el valor de máximo de la función $A(h)$. Para ello, hacemos la derivada de la función,

$$A'(h) = \frac{320 - 8h - 2\pi h}{8}$$

igualamos la derivada a cero y resolvemos la ecuación resultante,

$$A'(h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{320 - 8h - 2\pi h}{8} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 320 - 8h - 2\pi h = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 320 = h \cdot (2\pi + 8) \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{320}{8 + 2\pi} = \frac{160}{4 + \pi} \approx 22{,}404\ m$$

Comprobamos que el valor es un máximo mediante la segunda derivada,

$$A''(h) = \frac{-8 - 2\pi}{8}$$

Como,

$$A''\left(\frac{160}{4 + \pi}\right) = \frac{-8 - 2\pi}{8} < 0$$

en $h = \frac{160}{4+\pi}$ tenemos un máximo para la función.

En ese caso,

$$b = \frac{160 - 2h - \pi h}{4} = b = \frac{160 - 2 \cdot \dfrac{160}{4 + \pi} - \pi \cdot \dfrac{160}{4 + \pi}}{4} = \frac{640 + 160\pi - 320 - 160\pi}{4 \cdot (4 + \pi)}$$

$$= \frac{320}{4 \cdot (4 + \pi)} = \frac{80}{4 + \pi} \approx 11{,}302\ m$$

d) (0,5 puntos) Calcula el área del mayor aparcamiento posible con las condiciones de b).

Sustituimos la función $A(h)$ por $h = \frac{160}{4+\pi}$

$$A\left(\frac{160}{4 + \pi}\right) = \frac{320 \cdot \left(\frac{160}{4 + \pi}\right) - (4 + \pi) \cdot \left(\frac{160}{4 + \pi}\right)^2}{8} = \frac{320 \cdot \left(\frac{160}{4 + \pi}\right) - \frac{160^2}{4 + \pi}}{8}$$

$$\frac{\frac{160^2}{4 + \pi}}{8} = \frac{3200}{4 + \pi}\ m^2 \approx 448{,}079\ m^2$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES