CUADERNILLO 2

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Entrega límite **MIÉRCOLES, 20 de NOVIEMBRE de 2024 (hora de inicio de clase)**

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de **11 puntos.**
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$Nota\ def. = \ Notal\ total/(Días\ de\ retraso + 1)$$

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.3)**

1. Pruebe que $(3n+2)^2-(3n-2)^2$ es múltiplo de 12 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P2, Ej.9)**

2. La suma de los primeros términos de una progresión geométrica viene dada por,

$$S_n = \sum_{r=0}^{n-1} 5 \cdot (\log_2 c)^r$$

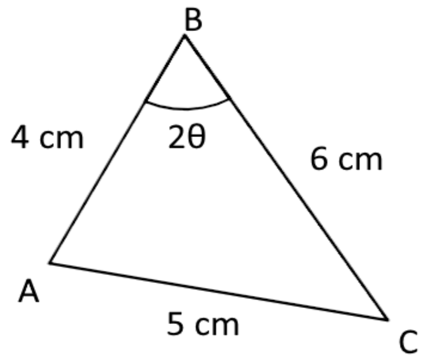
(a) (0,25 puntos) Sabiendo que S_n es convergente, halle el rango de valores posibles para c.

(b) (0,5 puntos) Para el caso en el que $c = 1{,}5$, halle el menor valor de n para el que se cumple que

$$|\, S_\infty - S_n| < 0{,}1$$

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.4)**

3. La siguiente figura muestra el triángulo ABC, donde $\mathbf{AB = 4cm, BC = 6\ cm}$, $\mathbf{AC = 5\ cm\ y\ \widehat{ABC} = 2\theta.}$



Halle el valor exacto de $\cos\theta$ dando la respuesta en la forma $\frac{p\sqrt{2}}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}^+$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P2, Ej.12)**

4. La curva C tiene por ecuación $y = \frac{2x^2+6x-3}{x+k}, x \in \mathbb{R}, x \neq -k,$ donde k es una constante positiva.

(a) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+4kx+6k+3}{(x+k)^2}$

(b) (0,5 puntos) Halle el valor más pequeño de k para el cual existe un mínimo local o un máximo local.

Considere la curva C para el caso $k = 2$.

(c) (0,25 puntos) Escriba la ecuación de su asíntota vertical.

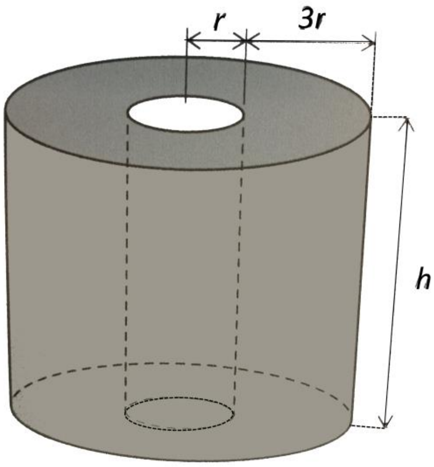
(d) (0,5 puntos) Halle la ecuación de la asíntota oblicua.

(e) (0,5 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} > 2$, para $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$.

(f) (0,5 puntos) Dibuje aproximadamente la curva C, mostrando claramente las dos asíntotas y el comportamiento general de C cuando se va acercando a cada una de las asíntotas.

[Puntuación máxima: 3,5 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.10)**

5. Considere un cilindro de radio $4r$ y de altura h. Se extrae del centro un cilindro más pequeño de radio r, para formar así un cilindro hueco. Toda esta información se representa en la siguiente figura en la que todas las longitudes están en centímetros y la figura no está dibujada a escala.



El área total de la superficie del cilindro hueco, en cm^2, viene dada por S.

El volumen del cilindro hueco, en cm^3, viene dada por V.

(a) (0,5 puntos) Muestre que $S = 30\pi r^2 + 10\pi rh$.

(b) (1 punto) El área total de la superficie del cilindro hueco es igual a $240\pi\ cm^2$. Muestre que

$$V = 360\pi r - 45\pi r^3$$

(c) (0,5 puntos) Halle una expresión algebraica para $\frac{dV}{dr}$.

El cilindro hueco alcanza un volumen máximo cuando $r = p \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ donde $p \in \mathbb{Z}^+$.

(d) (0,75 puntos) Hallar el valor de p.

(e) (075 puntos) A partir de lo anterior, halle este volumen máximo. Dé su respuesta en la forma $q \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, donde $q \in \mathbb{Z}^+$.

[Puntuación máxima: 2,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.11)**

Una curva viene dada por la ecuación $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) (0,25 puntos) Aplicando la regla de L´Hôpital, calcule

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right)$$

(b) (i) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

(ii) (0,5 puntos) A partir de lo anterior, muestre que $1 - y^2 = \frac{dy}{dx}$.

(c) (i) ((0,5 puntos) Utilizando la derivación implícita sobre el resultado de (b) muestre que,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2y.$$

(ii) (0,5 puntos) A partir de lo anterior, halle una expresión para $\frac{d^3y}{dx^3}$ en función de y.

(d) (0,75 puntos) Utilizando los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c), halle la serie de MacLaurin para $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ llegando hasta (e incluyendo) el término x^3.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.3)**

1. Pruebe que $(3n+2)^2-(3n-2)^2$ es múltiplo de 12 para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

Por inducción

- Probamos el caso $n=1$

$$(3\cdot 1+2)^2-(3\cdot 1-2)^2=5^2-1^2=25-1=24=12\cdot 2 \quad \surd$$

- Suponemos el caso $n=k$

$$\exists\, a\in\mathbb{Z} \quad (3\cdot k+2)^2-(3\cdot \mathrm{k}-2)^2=12\cdot a \quad \surd$$

Y probamos el caso

- Suponemos el caso $n=k+1$

$$\exists\, a' \in\mathbb{Z} \quad (3\cdot(k+1)+2)^2-(3\cdot(\mathrm{k}+1)-2)^2=12\cdot a' \quad \surd$$

$$(3\cdot(k+1)+2)^2-(3\cdot(\mathrm{k}+1)-2)^2=(3k+3+2)^2-(3k+3-2)^2=$$

$$=\left((3k+2)+3\right)^2-\left((3k-2)+3\right)^2=$$

$$=(3k+2)^2+3^2+2\cdot 3\cdot(3k+2)-(3k-2)^2-3^2-2\cdot 3\cdot(3k-2)=$$

$$=(3k+2)^2-(3k-2)^2+2\cdot 3\cdot(3k+2)-2\cdot 3\cdot(3k-2)=$$

$$=(3k+2)^2-(3k-2)^2+6\cdot 6k=$$

Aplicamos el caso $n=k$,

$$(3\cdot(k+1)+2)^2-(3\cdot(\mathrm{k}+1)-2)^2=(3k+2)^2-(3k-2)^2+36k=$$

$$=12a+36k=12\cdot(a+3k)=12a' \quad \surd$$

Por tanto, verificado el caso primero y la hipótesis inductiva, el enunciado

$$(3n+2)^2-(3n-2)^2 \text{ es múltiplo de } 12$$

es cierto para todo $n\in\mathbb{Z}^+$

Sin inducción

$$\forall\, n\in\mathbb{Z}^+ \quad (3n+2)^2-(3n-2)^2=\left((3n+2+(3n-2)\right)\cdot\left((3n+2)-(3n-2)\right)=$$

$$(6n)\cdot(4)=24n=12\cdot(2n)=12K$$

Por tanto, $(\mathbf{3}n+\mathbf{2})^2-(\mathbf{3}n-\mathbf{2})^2$ **es múltiplo de 12 para todo** $n\in\mathbb{Z}^+$**.**

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P2, Ej.9)**

2. La suma de los primeros términos de una progresión geométrica viene dada por,

$$S_n = \sum_{r=0}^{n-1} 5 \cdot (\log_2 c)^r$$

(a) (0,25 puntos) Sabiendo que S_n es convergente, halle el rango de valores posibles para c.

(b) (0,5 puntos) Para el caso en el que $c = 1{,}5$, halle el menor valor de n para el que se cumple que

$$|\, S_\infty - S_n| < 0{,}1$$

(a) (0,25 puntos) Sabiendo que S_n es convergente, halle el rango de valores posibles para c.

Como,

$$S_n = \sum_{r=0}^{n-1} 5 \cdot (\log_2 c)^r = S_n = 5 \cdot \sum_{r=0}^{n-1} (\log_2 c)^r$$

Se trata de una serie geométrica de razón $r = \log_2 c$ que convergerá siempre y cuando la razón de la misma esté entre -1 y 1. Por lo tanto

$$-1 < \log_2 c < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-1} < c < 2^1$$

En conclusión, $\frac{1}{2} < c < 2$

(b) (0,5 puntos) Para el caso en el que $c = 1,5$, halle el menor valor de n para el que se cumple que

$$|\, S_\infty - S_n| < 0{,}1$$

Como,

$$S_\infty = 5 \cdot \frac{(\log_2 1{,}5)^0}{1 - \log_2 1{,}5}$$

Y

$$S_n = 5 \cdot \sum_{r=0}^{n-1} (\log_2 1{,}5)^r = 5 \cdot \frac{(\log_2 1{,}5)^n - 1}{\log_2 1{,}5 - 1}$$

Entonces buscaremos el menor valor de n para el que,

$$|\, S_\infty - S_n| < 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \cdot \left| \frac{1}{1 - \log_2(1{,}5)} - \frac{(\log_2(1{,}5))^n - 1}{\log_2(1{,}5) - 1} \right| < 0{,}1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{1}{1 - \log_2(1{,}5)} - \frac{(\log_2(1{,}5))^n - 1}{\log_2(1{,}5) - 1} \right| < 0{,}02 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{-1}{\log_2(1{,}5) - 1} - \frac{(\log_2(1{,}5))^n - 1}{\log_2(1{,}5) - 1} \right| < 0{,}02 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{(\log_2(1{,}5))^n}{1-\log_2(1{,}5)}\right| < 0{,}02 \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}02 < \frac{(\log_2(1{,}5))^n}{1-\log_2(1{,}5)} < 0{,}02 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -0{,}02 \cdot (1-\log_2(1{,}5)) \quad < (\log_2(1{,}5))^n < 0{,}02 \cdot (1-\log_2(1{,}5)) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \ln[(log_2(1{,}5))^n] < \ln[0{,}02 \cdot (1-log_2(1{,}5))] \quad \Leftrightarrow$$

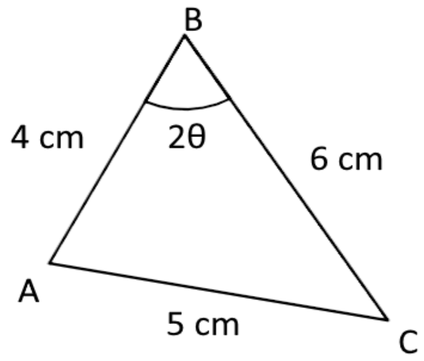
$$\Leftrightarrow \quad 0 < n \cdot \ln[(log_2(1{,}5))] < \ln[0{,}02 \cdot (1-log_2(1{,}5))] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \ n < \frac{\ln[0{,}02 \cdot (1-log_2(1{,}5))]}{\ln[(log_2(1{,}5))]} \quad \Leftrightarrow \quad n < 8{,}936$$

Por lo tanto, el menor valor **de n para el que se cumple la condición es $n = 9$.**

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.4)**

3. La siguiente figura muestra el triángulo ABC, donde $\mathbf{AB = 4cm, BC = 6\ cm}$, $\mathbf{AC = 5\ cm\ y\ \widehat{ABC} = 2\theta}$.



Halle el valor exacto de $\cos\theta$ dando la respuesta en la forma $\frac{p\sqrt{2}}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}^+$

Aplicando el teorema del coseno sobre el lado AC tendremos que,

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BC|\cdot\cos 2\theta$$

En ese caso,

$$5^2 = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cos 2\theta \iff 25 = 16 + 36 - 48\cdot\cos 2\theta \iff$$

$$\iff \frac{25-52}{-48} = \cos 2\theta \iff \cos 2\theta = \frac{27}{48}$$

En ese caso, como,

$$\cos 2\theta = \frac{27}{48} \iff \cos^2\theta - sen^2\theta = \frac{27}{48} \iff \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = \frac{27}{48} \iff$$

$$\iff 2\cdot\cos^2\theta - 1 = \frac{27}{48} \iff 2\cdot\cos^2\theta = \frac{27}{48} + 1 \iff$$

$$\iff \cos^2\theta = \frac{75}{96} \iff \cos^2\theta = \frac{75}{96} \iff \cos^2\theta = \frac{25}{32} \iff cos\,\theta = \sqrt{\frac{25}{32}} \iff$$

$$\iff cos\,\theta = \frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\cdot\sqrt{2}}{8}$$

Con $p = 5\ y\ q = 8$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P2, Ej.12)**

4. La curva C tiene por ecuación $y = \frac{2x^2+6x-3}{x+k}, x \in \mathbb{R}, x \neq -k$, donde k es una constante positiva.

(a) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+4kx+6k+3}{(x+k)^2}$

(b) (0,5 puntos) Halle el valor más pequeño de k para el cual existe un mínimo local o un máximo local.

Considere la curva C para el caso $k = 2$.

(c) (0,25 puntos) Escriba la ecuación de su asíntota vertical.

(d) (0,5 puntos) Halle la ecuación de la asíntota oblicua.

(e) (0,5 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} > 2$, para $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$.

(f) (0,5 puntos) Dibuje aproximadamente la curva C, mostrando claramente las dos asíntotas y el comportamiento general de C cuando se va acercando a cada una de las asíntotas.

(a) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+4kx+6k+3}{(x+k)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{(4x+6)\cdot(x+k)-(2x^2+6x-3)\cdot 1}{(x+k)^2} =$$

$$= \frac{4x^2+6x+4kx+6k-2x^2-6x+3}{(x+k)^2} = \frac{2x^2+4kx+6k+3}{(x+k)^2}$$

(b) (0,5 puntos) Halle el valor más pequeño de k para el cual existe un mínimo local o un máximo local.

Igualamos a cero la derivada y resolvemos,

$$y' = 0 \iff \frac{2x^2+4kx+6k+3}{(x+k)^2} = 0 \iff 2x^2+4kx+6k+3 = 0 \iff$$

$$\iff x = \frac{-4k \pm \sqrt{(4k)^2 - 4\cdot 2\cdot(6k+3)}}{2\cdot 2} = \frac{-4k \pm \sqrt{16k^2-48k-24}}{4} =$$

$$= -k \pm \sqrt{k^2-3k-\frac{3}{2}}$$

El valor existirá siempre y cuando,

$$k^2-3k-\frac{3}{2} \geq 0 \iff 2k^2-6k-3 \geq 0$$

Resolvemos la inecuación, resolviendo la ecuación correspondiente,

$$2k^2 - 6k - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 24}}{4} =$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{60}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$$

En ese caso, como $p(k) = 2k^2 - 6k - 3$ es un polinomio de segundo grado cuya representación gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba (tiene el coeficiente principal positivo), entonces la solución de la inecuación anterior es,

$$2k^2 - 6k - 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \in \left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{15}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{15}}{2}, +\infty\right)$$

En ese caso, el menor valor positivo de k para el cual existe un mínimo local o un máximo local, es

$$k = \frac{3 + \sqrt{15}}{2}$$

Considere la curva C para el caso $k = 2$.

(c) (0,25 puntos) Escriba la ecuación de su asíntota vertical.

La función es

$$y = \frac{2x^2 + 6x - 3}{x + 2}$$

Y su asíntota vertical es,

$$x = -2$$

(d) (0,5 puntos) Halle la ecuación de la asíntota oblicua.

La ecuación de la asíntota oblicua es de la forma $y = mx + n$ con,

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x^2 + 6x - 3}{x + 2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 6x - 3}{x^2 + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 + 6x - 3}{x + 2} - 2x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 + 6x - 3 - 2x^2 - 4x}{x + 2}\right) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x - 3}{x + 2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Por lo tanto, la ecuación de la asíntota oblicua es $y = 2x + 2$.

(e) (0,5 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} > 2$, para $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$.

Comprobamos mediante una cadena de equivalencias que es cierta la propiedad. Para ello, llegamos a una desigualdad cierta para todo real $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$ según,

$$\frac{dy}{dx} > 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2 + 8x + 12 + 3}{(x+2)^2} > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 8x + 12 + 3 > 2 \cdot (x+2)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 8x + 12 + 3 > 2 \cdot (x^2 + 4x + 4) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 8x + 12 + 3 > 2x^2 + 8x + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 7 > 0$$

Como

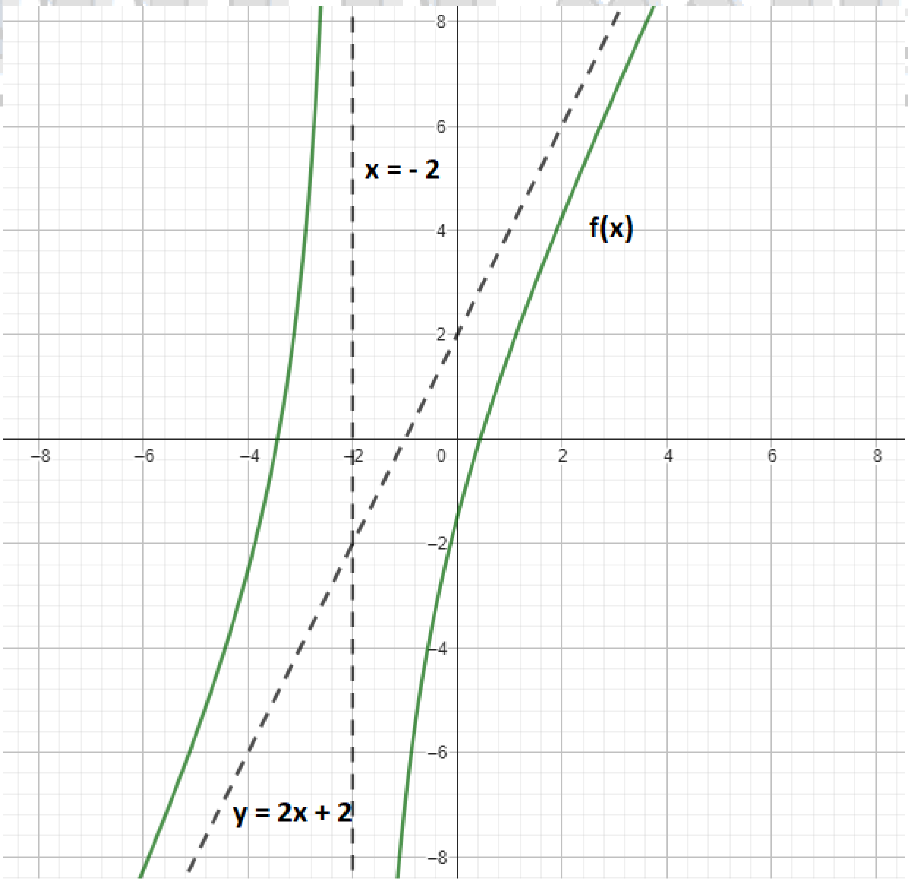
$$7 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \neq -2$$

Entonces es cierto que

$$\frac{dy}{dx} > 2 \text{ , para } x \in \mathbb{R}, x \neq -2.$$

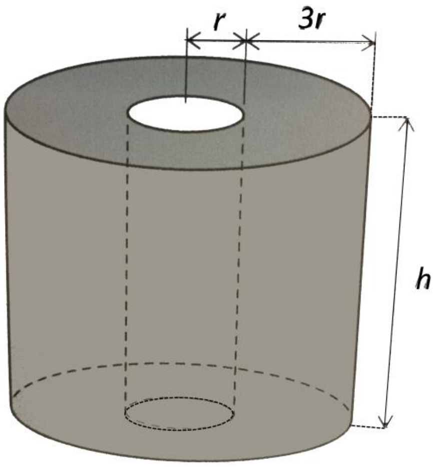
(f) (0,5 puntos) Dibuje aproximadamente la curva C, mostrando claramente las dos asíntotas y el comportamiento general de C cuando se va acercando a cada una de las asíntotas.

Conociendo las asíntotas y que la función es siempre creciente (debido a que la derivada es mayor que 2, tomando algunos valores, podemos representar la función según,



[Puntuación máxima: 3,5 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.10)**

5. Considere un cilindro de radio $4r$ y de altura h. Se extrae del centro un cilindro más pequeño de radio r, para formar así un cilindro hueco. Toda esta información se representa en la siguiente figura en la que todas las longitudes están en centímetros y la figura no está dibujada a escala.



El área total de la superficie del cilindro hueco, en cm^2, viene dada por S.

El volumen del cilindro hueco, en cm^3, viene dada por V.

(a) (0,5 puntos) Muestre que $S = 30\pi r^2 + 10\pi rh$.

(b) (1 punto) El área total de la superficie del cilindro hueco es igual a $240\pi\ cm^2$. Muestre que

$$V = 360\pi r - 45\pi r^3$$

(c) (0,5 puntos) Halle una expresión algebraica para $\frac{dV}{dr}$.

El cilindro hueco alcanza un volumen máximo cuando $r = p \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ donde $p \in \mathbb{Z}^+$.

(d) (0,75 puntos) Hallar el valor de p.

(e) (075 puntos) A partir de lo anterior, halle este volumen máximo. Dé su respuesta en la forma $q \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, donde $q \in \mathbb{Z}^+$.

(a) (0,5 puntos) Muestre que $S = 30\pi r^2 + 10\pi rh$.

Como la superficie es la suma de las superficies laterales exterior e interior y de las dos coronas circulares que forman las bases, tendremos,

La suma de las superficies laterales exterior e interior son,

$$S_1 = 2\pi \cdot (4r) \cdot h + 2\pi \cdot r \cdot h = 8\pi r + 2\pi rh = 10\pi rh$$

La suma de las coronas circulares son,

$$S_2 = 2 \cdot [\,\pi \cdot (4r)^2 - \pi \cdot r^2] = 2 \cdot [\pi \cdot 16r^2 - \pi r^2] = 2 \cdot 15\pi r^2 = 30\pi r^2$$

Por tanto, la superficie del cilindro hueco es,

$$S = S_1 + S_2 = 10\pi rh + 30\pi r^2$$

(b) (1 punto) El área total de la superficie del cilindro hueco es igual a $\boldsymbol{240\pi\ cm^2}$. Muestre que

$$\boldsymbol{V = 360\pi r - 45\pi r^3}$$

El volumen del cilindro hueco es la resta del volumen del cilindro externo menos el interno.

$$V = V_1 + V_2 = \text{Área}_{Base\ mayor} \cdot h - \text{Área}_{Base\ menor} \cdot h =$$

$$= \pi \cdot (4r)^2 \cdot h - \pi r^2 \cdot h = 16\pi r^2 \cdot h - \pi r^2 \cdot h = 15\pi r^2 \cdot h$$

Como el área total de la superficie del cilindro hueco es igual a $240\pi\ cm^2$ entonces,

$$10\pi rh + 30\pi r^2 = 240\pi$$

Despejamos h,

$$10\pi rh + 30\pi r^2 = 240\pi \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{240\pi - 30\pi r^2}{10\pi r}$$

Sustituyendo h en la fórmula del volumen, concluimos la expresión pedida,

$$V = 15\pi r^2 \cdot h = 15\pi r^2 \cdot \left(\frac{240\pi - 30\pi r^2}{10\pi r}\right) = \frac{15\pi r^2}{10\pi r} \cdot (240\pi - 30\pi r^2) =$$

$$= \frac{3r}{2} \cdot (240\pi - 30\pi r^2) = 360\pi r - 45\pi r^3$$

(c) (0,5 puntos) Halle una expresión algebraica para $\boldsymbol{\frac{dV}{dr}}$.

Derivando en la expresión del apartado anterior tendremos que,

$$\frac{dV}{dr} = V'(r) = 360\pi - 135\pi r^2$$

El cilindro hueco alcanza un volumen máximo cuando $\boldsymbol{r = p \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}$ donde $\boldsymbol{p \in \mathbb{Z}^+}$.

(d) (0,75 puntos) Hallar el valor de $\boldsymbol{p}$.

Igualamos a cero la derivada $V'(r)$ y resolvemos para calcular los extremos relativos,

$$V'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 360\pi - 135\pi r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 - 3r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Como,

$$\frac{d^2V}{dr^2} = V''(r) = -270\pi r$$

y, sustituyendo los presuntos valores de extremo relativo, obtenemos,

$$V''\left(-2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = +270\pi \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} > 0$$

$$V''\left(2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -270\pi \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} < 0$$

La función volumen presenta un máximo en $r = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$

Como, según el enunciado hay volumen máximo cuando $r = p \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ donde $p \in \mathbb{Z}^+$, igualamos nuestro valor de máximo al del enunciado y obtenemos p según,

$$p \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \iff p = 2 \in \mathbb{Z}^+$$

(e) (075 puntos) A partir de lo anterior, halle este volumen máximo. Dé su respuesta en la forma $q \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, donde $q \in \mathbb{Z}^+$.

El volumen máximo resultara de sustituir $r = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$ en $V = 360\pi r - 45\pi r^3$ según,

$$V\left(2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 360 \cdot \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - 45 \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 =$$

$$= 720 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - 360 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 720 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - 240 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 480 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

donde $q = 480 \in \mathbb{Z}^+$

[Puntuación máxima: 2,75 puntos] **(Análisis y Enfoques, Octubre 24, P1, Ej.11)**

Una curva viene dada por la ecuación $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) (0,25 puntos) Aplicando la regla de L´Hôpital, calcule

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right)$$

(b) (i) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

(ii) (0,5 puntos) A partir de lo anterior, muestre que $1 - y^2 = \frac{dy}{dx}$.

(c) (i) ((0,5 puntos) Utilizando la derivación implícita sobre el resultado de (b) muestre que,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2y.$$

(ii) (0,5 puntos) A partir de lo anterior, halle una expresión para $\frac{d^3y}{dx^3}$ en función de y.

(d) (0,75 puntos) Utilizando los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c), halle la serie de MacLaurin para $y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ llegando hasta (e incluyendo) el término x^3.

(a) (0,25 puntos) Aplicando la regla de L´Hôpital, calcule

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right)$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right) \underset{L´Hôpital}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x \to \infty} \frac{e^{2x} \cdot 2}{e^{2x} \cdot 2} = \lim_{x \to \infty} 1 = 1$$

(b) (i) (0,25 puntos) Muestre que $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = y´ = \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - (e^{2x}-1) \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{\mathbf{2e^{4x}} + e^{2x} \mathbf{- 2e^{4x}} + 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} =$$

$$= \frac{2e^{2x} + 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

(ii) (0,5 puntos) A partir de lo anterior, muestre que $1 - y^2 = \frac{dy}{dx}$.

$$1 - y^2 = 1 - \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \right)^2 = 1 - \frac{(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{(e^{2x}+1)^2 - (e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2} =$$

$$= \frac{e^{4x} + 1 + 2e^{2x} - (e^{4x} + 1 - 2 \cdot e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{\mathbf{e^{4x} + 1} + 2e^{2x} \mathbf{- e^{4x} - 1} + 2 \cdot e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} =$$

$$= \frac{2e^{2x} + 2 \cdot e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = y´ = \frac{dy}{dx}$$

(c) (i) (0,5 puntos) Utilizando la derivación implícita sobre el resultado de (b) muestre que,

$$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2y}$$

Derivo en implícitas en la expresión b)(ii) tendremos que,

$$1 - y^2 = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \; -2yy' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Como

$$1 - y^2 = \frac{dy}{dx}$$

Sustituimos la derivada de y en la expresión resultado de la derivación implícita anterior y concluimos

$$-2yy' = \frac{d^2y}{dx^2} \;\; \Leftrightarrow \;\; -2y \cdot (1 - y^2) = \frac{d^2y}{dx^2} \;\; \Leftrightarrow \;\; -2y + 2y^3 = \frac{d^2y}{dx^2}$$

(ii) (0,5 puntos) A partir de lo anterior, halle una expresión para $\boldsymbol{\frac{d^3y}{dx^3}}$ en función de $\boldsymbol{y}$.

Volvemos a derivar en implícitas sobre el resultado obtenido en (c)(i),

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 6y^2y' - 2y'$$

Sustituimos la derivada de y en la expresión resultado de la derivación implícita anterior y concluimos

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6y^2y' - 2y' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 6y^2 \cdot (1 - y^2) - 2 \cdot (1 - y^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 6y^2 - 6y^4 - 2 + 2y^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 8y^2 - 6y^4 - 2$$

(d) (0,75 puntos) Utilizando los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c), halle la serie de MacLaurin para $\boldsymbol{y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$ llegando hasta (e incluyendo) el término $\boldsymbol{x^3}$.

La serie de MacLaurin es,

$$P(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} \cdot x + \frac{y''(0)}{1!} \cdot x^2 + \frac{y'''(0)}{1!} \cdot x^3$$

Como,

$$y(0) = \frac{e^{2\cdot 0} - 1}{e^{2\cdot 0} + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \quad \Rightarrow \quad y´(0) = 1 - 0^2 = 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 - 2y \quad \Rightarrow \quad y´(0) = 2 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0 = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 8y^2 - 6y^4 - 2 \quad \Rightarrow \quad y´´´(0) = 8 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0^4 - 2 = -2$$

Por lo tanto, el polinomio de MacLaurin pedida es,

$$P(x) = \frac{y(0)}{0!} + \frac{y´(0)}{1!} \cdot x + \frac{y´´(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{y´´´(0)}{3!} \cdot x^3 =$$

$$= 0 + \frac{1}{1} \cdot x + \frac{0}{2} \cdot x^2 + \frac{-2}{6} \cdot x^3 = x - \frac{x^3}{3}$$

Concluimos que el polinomio de MacLaurin hasta grado tres es,

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3}$$