	UNIVERSIDADES PUBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID SIMULACRO PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 – CONTROL 3 – FECHA V22/11/24 MATERIA: MATEMATICAS II	LA WEB DEL PROFE DE MATES Lawebdelprofedemates.es

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACION: Cada bloque se calificara sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ -1 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide,

a) (0,75 puntos) Estudiar $Rg(A)$ en función de los valores de $m \in \mathbb{R}$.

b) (1,25 puntos) Para $m = 0$ resolver la ecuación matricial $AX = B$.

c) (0,5 puntos) Calcular $(B^t \cdot B)^{100}$.

Pregunta 1.2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & x+z & 2x+2 \\ y-1 & 2 & x+2y \\ -y+z & 3z-1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide,

a) (0,5 puntos) Calcular, sin utilizar la calculadora, los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ para que la matriz Aes simétrica ($A = A^t$).

b) (0,75 puntos) Resolver algebraicamente el sistema matricial $\left.\begin{matrix} 2X - Y = I \\ 3X + 2Y = 2I \end{matrix}\right\}$ siendo I la matriz identidad de orden 3.

c) (0,5 + 0,75 puntos) Para $x = y = z = 0$, calcular $Rg(A)$ y calcular algebraicamente $A^{-1} \cdot B^2$.

Bloque 2. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 2.1. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+sen(x)}-2}{x} & si\ x < 0 \\ \frac{x^2-1}{x-4} & si\ x \geq 0 \end{cases}$, se pide,

a) (0,75 puntos) Estudiar algebraicamente la continuidad de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular algebraicamente todas las asíntotas de la función $f(x)$.

c) (1 punto) Estudiar los extremos relativos de la función $f(x)$ para $x \geq 0$.

Pregunta 2.2. Sea la función $f(x) = \frac{x^3}{|x^2-1|-1}$, se pide,

a) (0,25 puntos) Estudiar algebraicamente la paridad de la función $f(x)$.

b) (1,25 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x)$ algebraicamente. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene en $x = 0$?

c) (1 punto) Estudiar algebraicamente la derivabilidad de $f(x)$.

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sea la función $f(x) = x^{1/\ln(x)}$ con $x > 0$, se pide,

a) (1,25 puntos) Calcular algebraicamente su asíntota horizontal.

b) (1,25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente en $x = e$ expresándola de la forma $y = mx + n$ sin expresiones decimales.

Pregunta 3.2. Sea la función $f(x) = (sen\, x\,)^{1/\cos(x)}$, se pide,

a) (1,25 puntos) Calcular algebraicamente

$$\lim_{x \to \pi/2} f(x)$$

b) (1,25 puntos) En la función $f(x) = \frac{ax^2+b}{bx-1}$, se sabe que $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = 2x + 1$. Calcular algebraicamente a y b.

Bloque 4. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 4. Sea la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + e^{\cos x}$, se pide,

a) (1 punto) Demostrar, sin resolver con la calculadora, que existe al menos un valor en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la recta tangente es horizontal.

b) (0,5 puntos) Demostrar, sin resolver con la calculadora, que la función $f(x)$corta a la recta $y = 2x$ en al menos un punto.

c) (1 punto) Demostrar, sin resolver con la calculadora, que la función $g(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (3x - 7) - 2$tiene tres raíces positivas.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº 3 DE MATEMÁTICAS II

Pregunta 1.1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ -1 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide,

a) (0,75 puntos) Estudiar $Rg(A)$ en función de los valores de $m \in \mathbb{R}$.

b) (1,25 puntos) Para $m = 0$ resolver la ecuación matricial $AX = B$.

c) (0,5 puntos) Calcular $(B^t \cdot B)^{100}$.

Solución

a) (0,75 puntos) Estudiar $Rg(A)$ en función de los valores de $m \in \mathbb{R}$.

Por el método Gauss-Jordan tendremos que,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ -1 & 1 & 1-m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3{'}=F_3+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 3 & 2-m \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3{'}=F_3-3\cdot F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 2-4m \end{pmatrix}$$

En ese caso,

- Si $m \neq 1/2$ y $m \neq 0$ entonces

$$Rg(A) = 3$$

- Si $2 - 4m = 0$ entonces $m = \frac{1}{2}$ y en ese caso,

$$Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

- Si $m = 0$ entonces

$$Rg\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

b) (1,25 puntos) Para $m = 0$ resolver la ecuación matricial $AX = B$.

Como para $m = 0$, la matriz A es cuadrada y tiene rango máximo, su matriz inversa existe. En ese caso resolvemos la ecuación según,

$$AX = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot A \quad \Leftrightarrow \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa A^{-1} por el método Gauss-Jordan según,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3{}'=F_3+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3{}'=F_3-3\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1{}'=2\cdot F_1-F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1{}'=F_1-4\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3{}'=F_3:2]{F_1{}'=F_1:2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -3/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la matriz inversa es,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Y la matriz X será,

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

c) (0,5 puntos) Calcular $(B^t \cdot B)^{100}$.

Como,

$$B^t \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Entonces,

$$(B^t \cdot B)^{100} = I^{100} = I$$

Pregunta 1.2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & x+z & 2x+2 \\ y-1 & 2 & x+2y \\ -y+z & 3z-1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**. Se pide,**

a) **(0,5 puntos) Calcular, sin utilizar la calculadora, los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ para que la matriz Aes simétrica ($A = A^t$).**

b) **(0,75 puntos) Resolver algebraicamente el sistema matricial** $\left.\begin{matrix} 2X - Y = I \\ 3X + 2Y = 2I \end{matrix}\right\}$ **siendo I la matriz identidad de orden 3.**

c) **(0,5 + 0,75 puntos) Para $x = y = z = 0$, calcular $Rg(A)$ y calcular algebraicamente $A^{-1} \cdot B^2$.**

Solución

a) **(0,5 puntos) Calcular, sin utilizar la calculadora, los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ para que la matriz Aes simétrica ($A = A^t$).**

Como $A = A^t$ entonces,

$$\begin{pmatrix} 1 & x+z & 2x+2 \\ y-1 & 2 & x+2y \\ -y+z & 3z-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y-1 & -y+z \\ x+z & 2 & 3z-1 \\ 2x+2 & x+2y & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1 = x+z \\ -y+z = 2x+2 \\ 3z-1 = x+2y \end{cases}$$

Si sumamos la primera y segunda igualdad obtenemos,

$$\begin{array}{r} y-1 = x+z \\ + \quad -y+z = 2x+2 \\ \hline z-1 = 3x+z+2 \end{array}$$

Cancelando la incógnita z obtenemos el valor de la variable x,

$$z-1 = 3x+z+2 \quad \Leftrightarrow \quad -1 = 3x+2 \quad \Leftrightarrow \quad -3 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad -1 = x$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones queda del siguiente modo,

$$\begin{cases} y-1 = -1+z \\ -y+z = -2+2 \\ 3z-1 = -1+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ -y+z = 0 \\ 3z = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ y = \dfrac{3z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad y = z = 0$$

Por lo tanto, los valores pedidos para que la matriz sea simétrica son

$$x = -1 \quad , \quad y = z = 0$$

b) (0,75 puntos) Resolver algebraicamente el sistema matricial $\left.\begin{matrix} 2X - Y = I \\ 3X + 2Y = 2I \end{matrix}\right\}$ siendo I la matriz identidad de orden 3.

Aplicamos el método de reducción sobre la matriz Y según

$$\left.\begin{matrix} 2X - Y = I \\ 3X + 2Y = 2I \end{matrix}\right\} \xrightarrow{x2} \begin{array}{r} \left.\begin{matrix} 4X - 2Y = 2I \\ 3X + 2Y = 2I \end{matrix}\right\} \\ \hline 7X \qquad = 4I \end{array}$$

Por lo tanto,

$$7X = 4I \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{4}{7} \cdot I = \begin{pmatrix} 4/7 & 0 & 0 \\ 0 & 4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 4/7 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de reducción sobre la matriz X según

$$\left.\begin{matrix} 2X - Y = I \\ 3X + 2Y = 2I \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \xrightarrow{x\,3} \\ \xrightarrow{x(-2)} \end{matrix} \begin{array}{r} \left.\begin{matrix} 6X - 3Y = 3I \\ -6X - 4Y = -4I \end{matrix}\right\} \\ \hline -7Y = -I \end{array}$$

Por lo tanto,

$$-7Y = -I \quad \Leftrightarrow \quad Y = \frac{1}{7} \cdot I = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$$

c) (0,5 + 0,75 puntos) Para $x = y = z = 0$, calcular $Rg(A)$ y calcular algebraicamente $A^{-1} \cdot B^2$.

Para $x = y = z = 0$ tendremos que,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por el método Gauss-Jordan tendremos que,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2{}' = F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3{}' = 2F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

En ese caso,

$$Rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = Rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 3$$

Para calcular algebraicamente $A^{-1} \cdot B^2$ calculamos la matriz inversa A^{-1}, que existe porque es cuadrada y su rango es máximo. La calculamos por el método Gauss-Jordan según,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2'=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3'=2F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{F_1'=2\cdot F_1-F_3} \\ \xrightarrow{F_2'=2F_2-F_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_1'=F_1:2} \\ \xrightarrow{F_2'=F_2\ 4} \\ \xrightarrow{F_3'=F_3:\ 4} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la matriz inversa es,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Calculamos B^2 según,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 1/4 & -1/2 \\ 3/2 & 1/4 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2.1. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4+sen(x)}-2}{x} & si\ x < 0 \\ \frac{x^2-1}{x-4} & si\ x \geq 0 \end{cases}$, se pide,

a) (0,75 puntos) Estudiar algebraicamente la continuidad de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular algebraicamente todas las asíntotas de la función $f(x)$.

c) (1 punto) Estudiar los extremos relativos de la función $f(x)$ para $x \geq 0$.

Solución

a) (0,75 puntos) Estudiar algebraicamente la continuidad de $f(x)$.

La función $f(x)$ es continua para $x < 0$ al ser una fracción con denominador un monomio x (continuo y un numerador que es resta de dos funciones continuas. En el caso del numerador, una de las funciones es una constante (por tanto, continua) y la otra una función irracional con radicando suma de constante con $sen(x)$ que es continua.

Además,

$$4 + sen(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \geq -sen(x)$$

Ya que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ , -1 \leq sen(x) \leq +1$$

La función $f(x)$ es continua para $x > 0$ salvo para $x = 4$ ya que se trata de una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son polinomios continuos. En el caso de $x = 4$, este valor anula el denominador por lo que la función no es continua en este valor.

Estudiamos la continuidad en el valor $x = 0$ analizando si

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

En el caso de límite lateral por la izquierda tendremos que,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{4 + sen(x)} - 2}{x} \underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{cos\,(x)}{2\cdot\sqrt{4+sen(x)}}}{1} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{cos\,(x)}{2 \cdot \sqrt{4 + sen(x)}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{4 + 0}} = \frac{1}{4}$$

En el caso de límite lateral por la derecha tendremos que,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\boldsymbol{x^2 - 1}}{\boldsymbol{x - 4}} = \frac{0 - 1}{0 - 4} = \frac{1}{4}$$

En el caso de la imagen por $f(x)$ del valor de abcisa $x = 0$ tendremos que,

$$f(x) = \frac{0 - 1}{0 - 4} = \frac{1}{4}$$

Como,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = \frac{1}{4}$$

Concluimos que $f(x)$ es continua en $x = 0$.

b) (0,75 puntos) Calcular algebraicamente todas las asíntotas de la función $f(x)$.

La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 4$ ya que,

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 1}{x - 4} = \pm\infty$$

Además, la función presenta una asíntota oblicua $y = mx + n$ en su tendencia a infinito ya que,

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

Y además,

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 4} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 1 - x^2 + 4x}{x - 4} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1 + 4x}{x - 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 4 = 4$$

Por lo que tiene una asíntota oblicua en $y = x + 4$ en su tendencia a $+\infty$.

En su tendencia a menos infinito, la función presenta una asíntota horizontal ya que si $y = mx + n$ fuera asíntota entonces,

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4 + sen(x)} - 2}{x^2} = 0$$

Este valor se debe a que, mientras que el numerador va a estar acotado según,

$$\sqrt{4 + (-1)} - 2 \le \sqrt{4 + sen(x)} - 2 \le \sqrt{4 + 1} - 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} - 2 \le \sqrt{4 + sen(x)} - 2 \le \sqrt{5} - 2$$

El denominador tiende a infinito.

Por otra parte, y por idéntico motivo,

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{4 + sen(x)} - 2}{x} \right) = 0$$

que tiene una asíntota oblicua en <u>$\boldsymbol{y = 0}$ **en su tendencia a** $\boldsymbol{-\infty}$**.**</u>

c) (1 punto) Estudiar los extremos relativos de la función $f(x)$ para $x \geq 0$.

La derivada de la función para $x \geq 0$ es,

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot (x-4) - (x^2-1) \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 8x - x^2 + 1}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x+1}{(x-4)^2}$$

Igualamos a cero a la derivada para obtener presuntos los extremos relativos,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-8x+1}{(x-4)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{+8 \pm \sqrt{64-4}}{2} = \frac{+8 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{+8 \pm 2 \cdot \sqrt{15}}{2} = 4 \pm \sqrt{15}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos y semirrectas en los que queda dividido $\mathbb{R}^+$ mediante los anteriores valores y el valor de abcisa donde presenta una discontinuidad $x = 4$.

	$signo(f'(x)) = signo\left(\frac{x^2-8x+1}{(x-4)^2}\right)$	**$f(x)$ es …**
$(0, 4-\sqrt{15})$	$f'(x) = \frac{(+)}{(+)} = (+)$	Creciente
$(4-\sqrt{15}, 4)$	$f'(x) = \frac{(-)}{(+)} = (-)$	Decreciente
$(+4, 4+\sqrt{15})$	$f'(x) = \frac{(-)}{(+)} = (-)$	Decreciente
$(4+\sqrt{15}, +\infty)$	$f'(x) = \frac{(+)}{(+)} = (+)$	creciente

Por lo tanto, $f(x)$ presenta,

- Un máximo relativo en $x = 4 - \sqrt{15}$
- Un mínimo relativo en $x = 4 + \sqrt{15}$

Pregunta 2.2. Sea la función $f(x) = \frac{x^3}{|x^2-1|-1}$, se pide,

a) (0,25 puntos) Estudiar algebraicamente la paridad de la función $f(x)$.

b) (1,25 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x)$ algebraicamente. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene en $x = 0$?

c) (1 punto) Estudiar algebraicamente la derivabilidad de $f(x)$.

Solución

a) (0,25 puntos) Estudiar algebraicamente la paridad de la función $f(x)$.

La función no está definida para $x = 0$ ya que,

$$|x^2-1|-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (-x^2+1-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \\ x^2-1-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=2 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Comprobamos si es par o impar en su dominio,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}-\{0,-\sqrt{2},\sqrt{2}\}, \quad f(-x)=\frac{(-x)^3}{|(-x)^2-1|-1}=\frac{-x^3}{|x^2-1|-1}=-\frac{x^3}{|x^2-1|-1}=-f(x)$$

Por lo tanto, $f(x)$ es presenta simetría impar.

b) (1,25 puntos) Estudiar la continuidad de $f(x)$ algebraicamente. ¿Qué tipo de discontinuidad tiene en $x = 0$?

Reescribimos la expresión de la función a trozos,

$$f(x)=\frac{x^3}{|x^2-1|-1}=\begin{cases} \frac{x^3}{(x^2-1)-1} & si \;\; x < si \;\; x < -\sqrt{2} \\ \frac{x^3}{(x^2-1)-1} & si \;\; -\sqrt{2} < x < -1 \\ \frac{x^3}{-(x^2-1)-1} & si \;\; -1 \leq x \leq 1 \quad , x \neq 0 \\ \frac{x^3}{(x^2-1)-1} & si \; 1 < x < +\sqrt{2} \\ \frac{x^3}{(x^2-1)-1} & si \;\; si \;\; +\sqrt{2} < x \end{cases}$$

Es decir,

$$f(x)=\frac{x^3}{|x^2-1|-1}=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2-2} & si\ \ x<si\ \ x<-\sqrt{2}\\ \dfrac{x^3}{x^2-2} & si\ \ -\sqrt{2}<x<-1\\ -x & si\ \ -1\leq x\leq 1\ \ ,x\neq 0\\ \dfrac{x^3}{x^2-2} & si\ 1<x<+\sqrt{2}\\ \dfrac{x^3}{x^2-2} & si\ \ si\ \ +\sqrt{2}<x\end{cases}$$

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0,-\sqrt{2},\sqrt{2},-11,+1\}$ al ser una fracción algebraica con polinomios continuos en la que el denominador no se anula.

Estudiamos la continuidad $f(x)$ en los valores $\{0,-\sqrt{2},\sqrt{2},-1,+1\}$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$$

- **Continuidad de $f(x)$ en $x=0$.**

En este valor la función no existe.

Estudiamos el límite lateral por la izquierda,

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

Estudiamos el límite lateral por la derecha,

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Como $x=0$ no tiene imagen entonces

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\quad y\ \nexists\, f(0)$$

Por tanto, $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x=0$ tendremos que,

- **Continuidad de $f(x)$ en $x=-\sqrt{2}$.**

En este valor la función no existe.

Estudiamos el límite lateral por la izquierda,

$$\lim_{x\to -\sqrt{2}^-}f(x)=\lim_{x\to -\sqrt{2}^-}\frac{x^3}{x^2-2}=+\infty$$

Estudiamos el límite lateral por la derecha,

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\sqrt{2}^+} \frac{x^3}{x^2-2} = -\infty$$

Como $x = 0$ no tiene imagen entonces

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x \to -\sqrt{2}^+} f(x) = \pm\infty \quad y \nexists f(0)$$

Por tanto, $f(x)$ presenta una discontinuidad de alto infinito en $x = -\sqrt{2}$.

- **Continuidad de $\boldsymbol{f(x)}$ en $\boldsymbol{x = -1}$.**

Estudiamos el límite lateral por la izquierda,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{x^2-2} = \frac{-1}{1-2} = +1$$

Estudiamos el límite lateral por la derecha,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (-x) = -(-1) = +1$$

Como la imagen de $x = -1$ es

$$f(-1) = -(-1) = +1$$

entonces

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = +1$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x = -1$.

- **Continuidad de $\boldsymbol{f(x)}$ en $\boldsymbol{x = +1}$.**

Estudiamos el límite lateral por la izquierda,

$$\lim_{x \to +1^-} f(x) = \lim_{x \to +1^-} (-x) = -1$$

Estudiamos el límite lateral por la derecha,

$$\lim_{x \to +1^+} f(x) = \lim_{x \to ++1^+} \frac{x^3}{x^2-2} = \frac{1^3}{1^2-2} = -1$$

Como la imagen de $x = +1$ es

$$f(-1) = -(+1) = -1$$

entonces

$$\lim_{x \to +1^-} f(x) = \lim_{x \to +1^+} f(x) = f(+1) = -1$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x = +1$.

- **Continuidad de $f(x)$ en $x = +\sqrt{2}$.**

En este valor la función no existe.

Estudiamos el límite lateral por la izquierda,

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}^-} \frac{x^3}{x^2 - 2} = +\infty$$

Estudiamos el límite lateral por la derecha,

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}^+} \frac{x^3}{x^2 - 2} = -\infty$$

Como $x = 0$ no tiene imagen entonces

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = \pm\infty \quad y \nexists f(0)$$

Por tanto, $f(x)$ presenta una discontinuidad de alto infinito en $x = +\sqrt{2}$.

Resumiendo,

- $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$
- $f(x)$ presenta una discontiuidad de salto infinito en $x = -\sqrt{2}$ y en $x = +\sqrt{2}$.
- $f(x)$ presenta una discontiuidad evitable en $x = 0$.

c) (1 punto) Estudiar algebraicamente la derivabilidad de $f(x)$.

La función $f(x)$ es derivable para $x \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, 0, +\sqrt{2}, -1, +1\}$ al ser continua y además, bien ser una fracción con denominador y numerador continuos y derivables donde el denominador no se anula, o bien ser un monomio (que es continuo y derivable). En los valores $x = -\sqrt{2}, x = 0$ y $+x = \sqrt{2}$ la función es discontinua por lo que no puede ser derivable en ellos.

En el caso las derivadas en las semirrectas e intervalos que rompen la función es,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 \cdot (x^2-2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-2)^2} & si\ \ x < si\ \ x < -\sqrt{2} \\ \dfrac{3x^2 \cdot (x^2-2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-2)^2} & si\ \ -\sqrt{2} < x < -1 \\ -1 & si\ -1 < x < 1\ ,x \neq 0 \\ \dfrac{3x^2 \cdot (x^2-2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-2)^2} & si\ 1 < x < +\sqrt{2} \\ \dfrac{3x^2 \cdot (x^2-2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-2)^2} & si\ \ si\ +\sqrt{2} < x \end{cases}$$

Es decir,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 6x^2}{(x^2-2)^2} & si\ \ x < si\ \ x < -\sqrt{2} \\ \dfrac{x^4 - 6x^2}{(x^2-2)^2} & si\ \ -\sqrt{2} < x < -1 \\ -1 & si\ -1 < x < 1\ ,x \neq 0 \\ \dfrac{x^4 - 6x^2}{(x^2-2)^2} & si\ 1 < x < +\sqrt{2} \\ \dfrac{x^4 - 6x^2}{(x^2-2)^2} & si\ \ si\ +\sqrt{2} < x \end{cases}$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = -1$ y en $x = +1$,

- **Derivabilidad de $f(x)$ en $x = -1$.**

En este valor la función es continua.

Estudiamos el límite lateral por la izquierda de la derivada,

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -\mathbf{1}^-} \frac{x^4 - 6x^2}{(x^2-2)^2} = \frac{1-6}{(1-2)^2} = -5$$

Estudiamos el límite lateral por la derecha,

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -\mathbf{1}^+} (-1) = -1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

Y concluimos que $f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

- **Derivabilidad de $f(x)$ en $x = +1$.**

En este valor la función es continua.

Estudiamos el límite lateral por la izquierda de la derivada,

$$\lim_{x \to +1^-} f'(x) = \lim_{x \to +\mathbf{1}^-} (-1) = -1$$

Estudiamos el límite lateral por la derecha,

$$\lim_{x \to +1^+} f'(x) = \lim_{x \to +\mathbf{1}^+} \frac{x^4 - 6x^2}{(x^2-2)^2} = \frac{1-6}{(1-2)^2} = -5$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to +1^-} f(x) \neq \lim_{x \to +1^+} f(x)$$

Y concluimos que $f(x)$ no es derivable en $x = +1$.

Resumiendo, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2},, -1, 0, +1, +\sqrt{2}\}$ y no es derivable en dichos valores excluidos.

Pregunta 3.1. Sea la función $f(x)=x^{1/\ln(x)}$ con $x>0$, se pide,

a) (1,25 puntos) Calcular algebraicamente su asíntota horizontal.

b) (1,25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente en $x=e$ expresándola de la forma $y=mx+n$ sin expresiones decimales.

Solución

a) (1,25 puntos) Calcular algebraicamente su asíntota horizontal.

La asíntota horizontal se calcula a partir del siguiente límite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

que procedemos a resolver,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^{1/\ln(x)}=\infty^0$$

Tomamos logaritmo neperiano y resolvemos,

$$L=\lim_{x\to+\infty} x^{1/\ln(x)} \Leftrightarrow \ln(L)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty} x^{1/ln(x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x^{1/ln(x)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln(x)}\cdot\ln(x)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} 1=1$$

En ese caso,

$$\ln(L)=1 \quad\Leftrightarrow\quad L=e^1=e$$

La función presenta una asíntota horizontal en $x=e$.

b) (1,25 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente en $x=e$ expresándola de la forma $y=mx+n$ sin expresiones decimales.

La ecuación de la recta tangente en $x=e$ es de la forma,

$$y-f(e)=f'(e)\cdot(x-e)$$

Calculamos $f(e)$

$$f(e)=e^{1/\ln(e)}=e^1=e$$

Calculamos $f'(x)$

$$f'(x) = x^{1/ln(x)} \cdot \frac{0 - \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} \cdot \ln(x) + \frac{1}{\ln(x)} \cdot x^{1/ln(x)-1} \cdot 1$$

Es decir,

$$f'(x) = -\frac{x^{1/ln(x)-1}}{\ln(x)} + \frac{x^{1/ln(x)-1}}{\ln(x)} = 0$$

Por lo tanto, $f'(e)$ es,

$$f'(e) = 0$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = e$ es,

$$y - f(e) = f'(e) \cdot (x - e) \quad \Leftrightarrow \quad y - e = 0 \cdot (x - e) \quad \Leftrightarrow \quad y = e$$

(*) Hay que hacer constar en este ejercicio que la función $f(x) = x^{1/\ln(x)}$ es equivalente a $f(x) = e$ ya que, si tomamos logaritmo neperiano,

$$\ln(f(x)) = \ln\left(x^{1/ln(x)}\right) \Leftrightarrow \ln(f(x)) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \ln(x) = 1 \Leftrightarrow \ln(f(x)) = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^1 = e$$

Por lo tanto, de hacer esta equivalencia, los apartados anteriores son triviales y directos.

Pregunta 3.2. Sea la función $f(x) = (sen\, x)^{1/\cos(x)}$, se pide,

a) (1,25 puntos) Calcular algebraicamente

$$\lim_{x \to \pi/2} f(x)$$

b) (1,25 puntos) En la función $f(x) = \frac{ax^2+b}{bx-1}$, se sabe que $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = 2x + 1$. Calcular algebraicamente a y b.

Solución

a) (1,25 puntos) Calcular algebraicamente

$$\lim_{x \to \pi/2} f(x)$$

Procedemos a resolverlo, clasificando la indeterminación.

$$\lim_{x \to \pi/2} f(x) = \lim_{x \to \pi/2} (sen\, x)^{1/\cos(x)} = 1^\infty$$

Tomamos logaritmo neperiano y resolvemos,

$$L = \lim_{x\to\pi/2}(sen\,x\,)^{1/\cos(x)} \quad\Leftrightarrow\quad \ln(L) = \ln\left(\lim_{x\to\pi/2}(sen\,x\,)^{1/\cos(x)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\left[\ln\left((sen\,x\,)^{1/cos(x)}\right)\right] = \lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{\cos(x)}\cdot\ln(sen(x)) =$$

$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln(sen(x))}{\cos(x)} \underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(x)/sen(x)}{-\text{sen}(x)} = -\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(x)}{sen^2(x)} = -\frac{0}{1} = 0$$

En ese caso,

$$\ln(L) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad L = e^0 = 1$$

La función presenta una asíntota horizontal en $x = e$.

b) (1,25 puntos) En la función $f(x) = \frac{ax^2+b}{bx-1}$, se sabe que $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = 2x+1$. Calcular algebraicamente a y b.

Si $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de la forma $y = mx + n$ entonces,

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{bx-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+bx}{bx^2-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{bx^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

Por lo tanto, si la pendiente de la recta tangente es $m = 2$ entonces,

$$m = 2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{a}{b} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad a = 2b$$

Por otra parte,

$$n = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+b}{bx-1} - 2x\right)$$

y como $a = 2b$ entonces,

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2bx^2+b}{bx-1} - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2bx^2 + b - 2bx^2 + 2x}{bx-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{b+2x}{bx-1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{bx} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{b} = \frac{2}{b}$$

Como la pendiente en el origen de la asíntota oblicua es $n = 1$ entonces

$$n = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{b} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 2 = b$$

Y concluimos que, $b = 2 \;\; y \;\; a = 2b = 2\cdot 2 = 4$

Pregunta 4. Sea la función $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + e^{\cos x}$, se pide,

a) (1 punto) Demostrar, sin resolver con la calculadora, que existe al menos un valor en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la recta tangente es horizontal.

b) (0,5 puntos) Demostrar, sin resolver con la calculadora, que la función $f(x)$ corta a la recta $y = 2x$ en al menos un punto.

c) (1 punto) Demostrar, sin resolver con la calculadora, que la función $g(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (3x - 7) - 2$ tiene tres raíces positivas.

Solución

a) (1 punto) Demostrar, sin resolver con la calculadora, que existe al menos un valor en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la recta tangente es horizontal.

Si hay un valor $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ en el que la recta tangente es horizontal entonces debemos probar que,

$$\exists\, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \;,\; f'(c) = 0$$

Vamos a aplicar el *teorema de Rolle* sobre la función $f(x)$.

El *teorema de Rolle* enuncia que,

Sea $k: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) con $k(a) = k(b)$ entonces

$$\exists\, c \in (a,b) \;,\; k'(c) = 0$$

En nuestro caso, $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + e^{\cos x}$ **es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ ya que es suma de funciones exponenciales con exponentes funciones trigonométricas sobre el monomio x. Tanto el monomio x como las funciones trigonométricas seno y coseno y la exponencial son continuas y derivables en $\mathbb{R}$ y sus sucesivas composiciones también.** En ese caso $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + e^{\cos x}$ es continua en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y derivable en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Además,

$$f(0) = e^{\operatorname{sen}(0)} + e^{\cos(0)} = e^0 + e^1 = 1 + e$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\operatorname{sen}(\pi/2)} + e^{\cos(\pi/2)} = e^1 + e^0 = e + 1$$

Por tanto,

$$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

La función $f(x)$ cumple las condiciones del $teorema\ de\ Rolle$ en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ y por lo tanto,

$$\exists\ c \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ ,\ f'(c)=0$$

Que es lo que se pretendía demostrar.

b) (0,5 puntos) Demostrar, sin resolver con la calculadora, que la función $f(x)$ corta a la recta $y = 2x$ en al menos un punto.

Queremos demostrar que existe un intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ de tal modo que,

$$\exists\ c \in (a,b)\ ,\ f(c)=2c$$

O lo que es lo mismo,

$$\exists\ c \in (a,b)\ ,\ f(c)-2c=0$$

Para ello, construimos la función auxiliar $h(x)=f(x)-2x$. Probaremos, mediante el teorema de Bolzano, que existe un intervalo $(a,b) \subset \mathbb{R}$ de tal modo que,

$$\exists\ c \in (a,b)\ ,\ h(c)=0$$

El $teorema\ de\ Bolzano$ enuncia que,

Sea k: $[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ con $k(a)\cdot k(b)<0$ entonces

$$\exists\ c \in (a,b)\ ,\ k(c)=0$$

En nuestro caso, $h(x)=e^{\operatorname{sen} x}+e^{\cos x}-2x$ **es una función continua en $\mathbb{R}$ ya que es suma/resta de funciones exponenciales con exponentes funciones trigonométricas sobre el monomio x y de un monomio de grado 1. Tanto el monomio x como las funciones trigonométricas seno y coseno y la exponencial son continuas en $\mathbb{R}$ y sus sucesivas composiciones también.**

En ese caso $h(x)=e^{\operatorname{sen} x}+e^{\cos x}-2x$ es continua en el intervalo $[0,\pi]$,

Además,

$$h(0)=f(0)-2\cdot 0=e^{\operatorname{sen}(0)}+e^{\cos(0)}-0=e^0+e^1=1+e>0$$

$$h(\pi)=f(\pi)-2\cdot\pi=e^{\operatorname{sen}(\pi)}+e^{\cos(\pi)}-2\pi=e^0+e^{-1}-2\pi=1+\frac{1}{e}-2\pi<0$$

Por tanto,

$$h(0)\cdot h(\pi)<0$$

La función $h(x)$ cumple las condiciones del $teorema\ de\ Bolzano$ en el intervalo $[0,\pi]$ y por lo tanto,

$$\exists\, c \in (0,\pi)\ ,\ \ h(c) = 0$$

O lo que es lo mismo,

$$\exists\, c \in (0,\pi)\ ,\ f(c) - 2c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, c \in (0,\pi)\ ,\ f(c) = 2c$$

Que es lo que se pretendía demostrar.

c) (1 punto) Demostrar, sin resolver con la calculadora, que la función $g(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (3x - 7) - 2$ tiene tres raíces positivas.

Sea la función

$$g(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (3x - 7) - 2$$

que, al ser polinómica es continua en $\mathbb{R}$.

Vamos a aplicar el teorema de Bolzano a la función $g(x)$ en tres intervalos diferentes.

Observamos que,

$$g(0) = 0 \cdot (0 - 2) \cdot (3 \cdot 0 - 7) - 2 = -2 < 0$$

$$g(1) = 1 \cdot (1 - 2) \cdot (3 \cdot 1 - 7) - 2 = +2 > 0$$

Por lo tanto,

$$g(0) \cdot g(1) < 0.$$

La función $g(x)$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo $[0,1]$ y aplicándolo sobre la función $g(x)$ en el intervalo $[0,1]$ obtenemos que,

$$\exists\, c \in (0,1)\ ,\ \ g(c) = 0$$

Igualmente observamos que,

$$g(1) = 1 \cdot (1 - 2) \cdot (3 \cdot 1 - 7) - 2 = +2 > 0$$

$$g(2) = 2 \cdot (2 - 2) \cdot (3 \cdot 2 - 7) - 2 = -2 < 0$$

Por lo tanto,

$$g(1) \cdot g(2) < 0.$$

La función $g(x)$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo $[1,2]$ y aplicándolo sobre la función $g(x)$ en el intervalo $[1,2]$ obtenemos que,

$$\exists\, c' \in (1,2)\ ,\ \ g(c') = 0$$

Por último, observamos que,

$$g(2) = 2 \cdot (2 - 2) \cdot (3 \cdot 2 - 7) - 2 = -2 < 0$$

$$g(3) = 3 \cdot (3 - 2) \cdot (3 \cdot 3 - 7) - 2 = +4 > 0$$

Por lo tanto,

$$g(2) \cdot g(3) < 0.$$

La función $g(x)$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo $[2,3]$ y aplicándolo sobre la función $g(x)$ en el intervalo $[2,3]$ obtenemos que,

$$\exists\, c'' \in (2,3) \ , \ g(c'') = 0$$

Como $g(x)$ es un polinomio de grado tres, a lo sumo tiene tres raíces. En tal caso, hemos encontrado tres intervalos abiertos y disjuntos a donde pertenecen cada una de las tres raíces del polinomio.

Al ser los extremos de estos intervalos de signo positivo, acabamos de demostrar que $g(x)$ tiene tres raíces positivas.