CUADERNILLO 1

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Entrega límite **MARTES, 8 de OCTUBRE de 2024 (hora de inicio de clase)**

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10 puntos.
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$Nota\ def. = \ Notal\ total/(Días\ de\ retraso + 1)$$

Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o explicaciones correctas. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención: por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por talo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

[Puntuación máxima: 8 puntos]

1. (a) (4 puntos) Calcula la serie de Taylor de orden 3 en $\mathrm{x} = 0$ de la función $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}+1}$

(b) (1 punto) Calcula la derivada n-ésima de la función $f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}+1}$ para $\mathrm{x} \neq -1$, demostrándola mediante inducción.

(c) (1 punto). Escribe la serie de McLaurin de la función $f(\mathrm{x})$.

(d) (1 punto) Calcula el radio de convergencia de la serie de McLaurin de $f(\mathrm{x})$.

(e) (1 punto) Calcula el intervalo de convergencia de la serie de McLaurin de$f(\mathrm{x})$, comprobando los extremos de dicho intervalo.

[Puntuación máxima: 2 puntos]

2. a) (1 punto) Si $|x| < 1$, calcula la suma de la serie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

b) (1 punto) A partir de lo anterior, calcula la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1}$$

cuando $|x| < 1$.

c) (1 punto) Calcula el valor de la serie finita

$$\sum_{n=1}^{30} n(-1)^n x^{n-1}$$

para $x = 0{,}5$ y compáralo con el valor que se obtiene de sustituir $x = 0{,}5$ en la función $f'(x)$ del ejercicio 1.

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CUADERNILLO 1 DE MATEMÁTICAS II/ANÁLISIS Y ENFOQUES

1. (a) (4 puntos) Calcula la serie de Taylor de orden 3 en $x = 0$ de la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$

Calculamos las sucesivas derivadas de la función y las valoramos en $x = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad f(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \frac{-1}{(1+0)^2} = -1$$

$$f''(x) = \frac{+2\cdot(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2$$

$$f'''(x) = \frac{-2\cdot 3\cdot(1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{-6}{(1+x)^4} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = \frac{-6}{(1+0)^4} = -6$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 2 en $x = 1$ **de** la función $f(x)$ es,

$$T_2(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{n)}(1)}{n!}\cdot(x-0)^n = 1 + \frac{-1}{1!}\cdot(x-0) + \frac{2}{2!}\cdot(x-0)^2 + \frac{-6}{3!}\cdot(x-0)^3$$

es decir,

$$T_2(x) = 1 - x + x^2 - x^3$$

(b) (1 punto) Calcula la derivada n-ésima de la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ para $x \neq -1$ demostrándola por inducción.

Como,

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{+2\cdot 1\cdot(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2!}{(1+x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{-2\cdot 3\cdot(1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{-3\cdot 2}{(1+x)^4} = \frac{-3!}{(1+x)^4}$$

Por lo tanto sugerimos que

$$f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}\ , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Y procederemos a probarlo. Puesto que el caso $n = 1$ está probado anteriormente (la fórmula sale de nuestra exploración inicial), demostraremos la hipótesis inductiva.

Para ello, supondremos que para $n = k \in \mathbb{N}$ es cierto que,

$$f^{k)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$$

y probaremos que

$$f^{k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1)!}{(1+x)^{k+2}}$$

Para ello, procedemos a calcular la derivada $f^{k+1)}(x)$ a partir de $f^{k)}(x)$ según,

$$f^{k+1)}(x) = \left(f^{k)}(x)\right)' = \left(\frac{(-1)^n \cdot k!}{(1+x)^{k+1}}\right)' = \frac{-(-1)^k \cdot k! \cdot (k+1) \cdot (1+k)^n}{((1+x)^{k+1})^2} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot (1+x)^n}{(1+x)^{2n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot}{(1+x)^{n+2}}$$

Por lo tanto, acabamos de demostrar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$$

(c) (1 punto). Escribe la serie de McLaurin de la función $f(x)$.

La serie será,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+0)^{n+1}}}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^n \cdot n!}{1}}{n!} \cdot x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ \dots$$

(d) (1 punto) Calcula el radio de convergencia de la serie de McLaurin de $f(x)$.

Como,

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

$con \ \ a_n = (-1)^n$, entonces

$$\frac{1}{r} = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|(-1)^{n+1}|}{|(-1)^n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1} = 1$$

Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie es $r = 1$

(e) (1 punto) Calcula el intervalo de convergencia de la serie de McLaurin de $f(x)$, comprobando los extremos de dicho intervalo.

La serie converge

$$\forall\, x \in (0-1, 0+1) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in (-1, +1)$$

La serie diverge

$$\forall\, x \in (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$$

Valoramos la convergencia o no de la serie en los extremos $x = -1$ y $x = 1$ del intervalo de convergencia.

- **Si $x = -1$,** comprobamos si es convergente o no la serie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

Como,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ \dots = +\infty$$

concluimos que $x = -1$ no pertenece al intervalo de convergencia.

- **Si $x = +1$**, comprobamos si es convergente o no la serie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Como,

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 = 1 - 1 + 1 - 1 + \ \dots$$

no converge ya que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ converge \ \Rightarrow \ \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Y como,

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

No converge.

Por tanto, **el intervalo de convergencia de la serie es $(-1,+1)$.**

2a) (1 punto) Si $|x| < 1$, calcula la suma de la serie,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

Se trata de una serie geométrica de razón $r = -x$. Como

$$|x| < 1$$

Podemos sumarla y en ese caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \frac{(-x)^0}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

Cosa que confirma que la serie converge a la función $f(x)$ en el intervalo $(-1,1)$

b) (1 punto) A partir de lo anterior, calcular la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1}$$

cuando $|x| < 1$.

Como,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \frac{(-x)^0}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \quad si \quad |x| < 1$$

Entonces derivando respecto de x en ambos lados de la igualdad, tendremos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot(-x)^{n-1}\cdot(-1) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad si \quad |x| < 1$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^{n-1} \cdot (x)^{n-1} \cdot (-1) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad si \quad |x| < 1$$

O lo que es lo mismo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^{n} \cdot (x)^{n-1} = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad si \quad |x| < 1$$

c) (1 punto) Calcula el valor de la serie finita

$$\sum_{n=1}^{30} n(-1)^n x^{n-1}$$

para $x = 0,5$ sustituyendo en la serie mediante la calculadora y compáralo con el valor que se obtiene de sustituir $x = 0,5$ en la función $f'(x)$ del ejercicio 1.

Con la calculadora,

$$\sum_{n=1}^{30} n(-1)^n x^{n-1} = -0{,}44444443$$

Por otra parte, sustituyendo en $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ tendremos que,

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+0{,}5)^2} = -\frac{1}{1,5^2} = -0,\hat{4}$$

La diverencia de estos valores es menor que 10^{-8} ya que

$$f(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

Y por lo tanto,

$$f'(\mathrm{x}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (-1)^n \cdot x^{n-1}$$