WPM/5/ANEN/MAT2/LWDPM/SPA/P01

CONTROL 1

Análisis y enfoques
Matemáticas II

VIERNES 18 de OCTUBRE de 2024

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10,5 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.
- Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

Puntuación máxima: 2,5 puntos

1. Calcula la suma de las siguientes series <u>sin utilizar el sumatorio de la calculadora</u>, dando el resultado en forma de fracción. (0,5 + 1 + 1 puntos)

$$a)\ \sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{3-2n} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n^2-1} \qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty}\left(arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)-arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{n+1}\right)\right)$$

Puntuación máxima: 3,25 puntos

2. Se considera la función, $f(x) = \ln(1 + x)$.

a) (0,25 puntos) Calcula el dominio de la función $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Determina la fórmula derivada n-ésima de $f(x)$ y demuéstrala por inducción.

c) (0,5 puntos) Escribe la serie de McLaurin de $f(x)$ en forma de sumatorio y lo más simplificada posible.

d) (0,5 puntos) Calcula el radio de convergencia de la serie de McLaurin de $f(x)$.

e) (0,75 puntos) Razona y calcula el intervalo de convergencia de la serie de McLaurin de $f(x)$ señalando claramente dónde converge y dónde no dicha serie (No te olvides de estudiar los extremos).

f) (0,5 puntos) Calcula $\ln(0{,}9)$ a partir del polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x = 0$. Mediante la calculadora determina el error que se comete (con tres cifras significativas) al aproximar con dicho polinomio el verdadero valor de $\ln(0{,}9)$

Puntuación máxima: 4,75 puntos

3. (a) Se considera la función, $g(x) = \frac{x \cdot \ln(x/2)}{(x-2)^2}$

i) (0,5 puntos) Argumenta y determina el dominio de la función $g(x)$.

ii) (0,75 puntos) Determina el valor $a > 0$ para el que la función $g(x)$ presenta una asíntota vertical $x = a$. Demuestra que lo es mostrando que,

$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

iii) (0,5 puntos) Calcula la asíntota horizontal de la función $\mathrm{g}(x)$.

iv) (0,75 puntos) Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $g(x)$ en el punto de abcisa $x = 1$.

(b) (0,75 + 0,75 + 0,75 puntos) Argumenta matemáticamente mediante algún criterio válido (criterio del cociente, de la raíz, de comparación, de paso al límite, de Leibniz de series alternadas) si las siguientes series son convergentes o no.

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{n}+2}{3n-1}$ $\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3}$ $\qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

Puntuación máxima: 2,5 puntos

1. Calcula la suma de las siguientes series sin utilizar el sumatorio de la calculadora, dando el resultado en forma de fracción. (0,5 + 1 + 1 puntos)

$a)\ \sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{3-2n} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n^2-1} \qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty}\left(arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)-arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{n+1}\right)\right)$

$$\boldsymbol{a)}\ \sum_{\boldsymbol{n=3}}^{\infty}\left(\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}\right)^{\boldsymbol{3-2n}}=\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{-2n}=\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}=\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{3^2}{4^2}\right)^{n}=\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{9}{16}\right)^{n}$$

La serie

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{9}{16}\right)^{n}$$

es geométrica de razón $r=\frac{9}{16}<1$. Por lo tanto, su suma es finita y, en tal caso,

$$\sum_{\boldsymbol{n=4}}^{\infty}\left(\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{3}}\right)^{\boldsymbol{3-2n}}=\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{9}{16}\right)^{n}=\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot\frac{\left(\frac{9}{16}\right)^4}{1-\frac{9}{16}}=\frac{4^3\cdot\left(\frac{3^2}{4^2}\right)^4}{3^3\cdot\frac{16-9}{16}}=\frac{\frac{3^8}{4^5}}{\frac{3^3\cdot 7}{4^2}}=\frac{3^5}{4^3\cdot 7}=\frac{243}{448}$$

$$\boldsymbol{b)}\ \sum_{\boldsymbol{n=2}}^{\infty}\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{n^2-1}}=3\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot(n-1)}==-\frac{3}{2}\cdot\lim_{k\to\infty}\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\ \dots+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k-3}+\frac{1}{k}-\frac{1}{k-2}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k-1}\right)$$

$$=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)=-\frac{3}{2}\cdot\left(-1-\frac{1}{2}+0+0\right)=\frac{9}{4}$$

$$\boldsymbol{c)}\ \sum_{\boldsymbol{n=2}}^{\infty}\left(\boldsymbol{arccos}\left(\frac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\boldsymbol{n}}\right)-\boldsymbol{arccos}\left(\frac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\boldsymbol{n+1}}\right)\right)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=2}^{k}\left(arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)-arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{n+1}\right)\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)+arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)-arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)++arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)-arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)+\right.$$

$$\left.\dots+\ arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{k}\right)-arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{k+1}\right)\right)=\lim_{k\to\infty}\left(arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{k+1}\right)\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$$

Puntuación máxima: 3,25 puntos

2. Se considera la función, $f(x) = \ln(1+x)$.

a) (0,25 puntos) Calcula el dominio de la función $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Determina la fórmula derivada n-ésima de $f(x)$ y demuéstrala por inducción.

c) (0,5 puntos) Escribe la serie de McLaurin de $f(x)$ en forma de sumatorio y lo más simplificada posible.

d) (0,5 puntos) Calcula el radio de convergencia de la serie de McLaurin de $f(x)$.

e) (0,75 puntos) Razona y calcula el intervalo de convergencia de la serie de McLaurin de $f(x)$ señalando claramente dónde converge y dónde no dicha serie (No te olvides de estudiar los extremos).

f) (0,5 puntos) Calcula $\ln(0{,}9)$ a partir del polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x = 0$. Mediante la calculadora determina el error que se comete (con tres cifras significativas) al aproximar con dicho polinomio el verdadero valor de $\ln(0{,}9)$

a) (0,25 puntos) Calcula el dominio de la función $f(x)$.

La función solo existe si,

$$1 + x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-1, +\infty)$$

Por lo tanto, $Dom(f) = (-1. +\infty)$

b) (0,75 puntos) Determina la fórmula derivada n-ésima de $f(x)$ y demuéstrala por inducción.

Como, en el dominio de definición de $f(x)$, la función es continua y derivable tantas veces como queramos, podemos derivarla obteniendo las siguientes derivadas,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = \frac{0 - 1 \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{0 - (-1) \cdot 2 \cdot (1+x)^1 \cdot 1}{((1+x)^2)^2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot (1+x)^1}{(1+x)^4} = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}$$

$$f''''(x) = \frac{-2 \cdot 3 \cdot (1+x)^2 \cdot 1}{((1+x)^3)^2} = \frac{-2 \cdot 3 \cdot (1+x)^2}{(1+x)^6} = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}$$

Conjeturamos que la fórmula de la derivada n-ésima de $f(x)$ es,

$$f^{n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para demostrar que esta fórmula es válida para todo natural, obramos por inducción.

El caso $n = 1$ es válido ya que la propia fórmula deviene de los primeros casos.

Vamos a probar la hipótesis inductiva, es decir, suponemos cierto el caso $n = k$,

$$f^{k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(1+x)^k}$$

Y probamos el caso $n = k$,

$$f^{k+1)}(x) = \frac{(-1)^{k} \cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$$

Para ello, calculamos la derivada $(k+1) - ésima$ derivando la derivada $k - ésima$ según,

$$f^{k+1)}(x) = \left(f^{k)}(x)\right)' = \left(\frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(1+x)^k}\right)' = \frac{0 - (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot k \cdot (1+x)^{k-1} \cdot 1}{((1+x)^k)^2} =$$

$$= \frac{(-1)^{k} \cdot k! \cdot (1+x)^{k-1}}{(1+x)^{2k}} = \frac{(-1)^{k} \cdot k!}{(1+x)^{k+1}}$$

Por lo tanto, se valida la hipótesis inductiva y podemos afirmar que

$$f^{n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

c) (0,5 puntos) Escribe la serie de McLaurin de $f(x)$ en forma de sumatorio y lo más simplificada posible.

Como la fórmula de la serie de McLaurin de $f(x)$ en forma de sumatorio es,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

Y como,

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f^{n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{(1+0)^n} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{1^n} = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

Entonces,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} \cdot x^n = S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$$

d) (0,5 puntos) Calcula el radio de convergencia de la serie de McLaurin de $f(x)$.

El radio de convergencia r de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

se calcula a partir de,

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

entonces, aplicado esto a nuestra serie, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$ tendremos que,

$$\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1$$

En conclusión, el radio de convergencia es $r = 1$

e) (0,75 puntos) Razona y calcula el intervalo de convergencia de la serie de McLaurin de $f(x)$ señalando claramente dónde converge y dónde no dicha serie (No te olvides de estudiar los extremos).

Sabemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$$

Converge

$$\forall x \in (a-r, a+r) = (0-1, 0+1) = (-1, +1)$$

Y no converge

$$\forall x \in (-\infty, a-r) \cup (a+r, +\infty) = (-\infty, 0-1) \cup (0+1, +\infty) = (-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$$

Estudiamos que pasa para $x = -1$. La serie será,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Esta serie es divergente porque de la opuesta de la serie armónica, que es divergente.

Estudiamos que pasa para $x = +1$. La serie será,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Se trata de una serie alternada por lo que estudiamos su convergencia a partir del criterio de Leibniz para series alternadas, comprobando que al reescribir la serie del modo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (-1)^n$$

se dan las dos siguientes condiciones,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \ , \quad \forall\, n \geq k \ , \ a_n > a_{n+1}$$

En nuestro caso,

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

En tal caso,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Además,

$$n < n+1 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} < a_n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

Al cumplirse las dos condiciones, podemos afirmar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Converge.

Concluimos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$$

Converge

$$\forall x \in (-1, +1]$$

Y no converge

$$\forall x \in (-\infty, -1] \cup (+1, +\infty)$$

f) (0,5 puntos) Calcula $\mathbf{ln(0,9)}$ a partir del polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $\boldsymbol{x=0}$. Calcula mediante la calculadora el error que se comete al aproximar con dicho polinomio el verdadero valor de $\mathbf{ln(0,9)}$.

El polinomio de Taylor de orden 3 centrado en $x = 0$ es,

$$T_{3,x=0}(x) = \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Su valor para $x = -0{,}1$ es,

$$T_{3,x=0}(-0{,}1) = \sum_{n=1}^{3} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (-0{,}1)^n = (-0{,}1) - \frac{(-0{,}1)^2}{2} + \frac{(-0{,}1)^3}{3} =$$

$$= (-0{,}1) - \frac{0{,}01}{2} - \frac{0{,}001}{3} = -0{,}1 - 0{,}005 - 0{,}000\hat{3} = -0{,}105\hat{3}$$

Como el valor verdadero de $\ln(0{,}9)$ es -0,1053605156578263012275009808393l

Entonces el error máximo cometido es

$$E = \left|-0{,}105\hat{3} - -0{,}1053605156578263012275009808393 1)\right| =$$

$$= 2{,}7182324492967897500980839312798 \cdot 10^{-5}$$

Puntuación máxima: 4,75 puntos

3. (a) Se considera la función, $g(x) = \frac{x \cdot \ln(x/2)}{(x-2)^2}$

i) (0,5 puntos) Argumenta y determina el dominio de la función $g(x)$.

ii) (0,75 puntos) Determina el valor $a > 0$ para el que la función $g(x)$ presenta una asíntota vertical $x = a$. Demuestra que lo es mostrando que,

$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

iii) (0,5 puntos) Calcula la asíntota horizontal de la función g(x).

iv) (0,75 puntos) Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $g(x)$ en el punto de abcisa $x = 1$.

(b) (0,75 + 0,75 + 0,75 puntos) Argumenta matemáticamente mediante algún criterio válido (criterio del cociente, de la raíz, de comparación, de paso al límite, de Leibniz de series alternadas) si las siguientes series son convergentes o no.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{n}+2}{3n-1} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3} \qquad c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

(a) Se considera la función, $g(x) = \frac{x \cdot \ln(x/2)}{(x-2)^2}$

1i) (0,5 puntos) Determina el dominio de la función $g(x)$.

Como el logaritmo neperiano solo existe para valores positivos, el numerador de la función solo tiene sentido si

$$\frac{x}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$$

Por otra parte, $x = 2$ es el único valor que anula el denominador por lo que es un valor para el que no existe la función.

En tal caso,

$$Dom(g) = (0, +2) \cup (+2, +\infty)$$

ii) (0,75 puntos) Determina el valor $a > 0$ para el que la función $g(x)$ presenta una asíntota vertical $x = a$. Demuestra que lo es mostrando que,

$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

Como para cualquier valor positivo que no sea $x = 2$, el límite es finito, entonces el único valor para el que podría haber asíntota vertical es $x = 2$. Demostramos que lo es,

$$\lim_{x \to +2} g(x) = \lim_{x \to +2} \frac{x \cdot \ln(x/2)}{(x-2)^2} \underset{L'Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x \to +2} \frac{1 \cdot \ln(x/2) + x \cdot \frac{1/2}{x/2}}{2 \cdot (x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to +2} \frac{1 \cdot \ln(x/2) + x \cdot \frac{1}{x}}{2 \cdot (x-2)} = \lim_{x \to +2} \frac{1 \cdot \ln(x/2) + 1}{2 \cdot (x-2)} = \infty$$

iii) (0,5 puntos) Calcula la asíntota horizontal de la función g(x).

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \ln(x/2)}{(x-2)^2} \underset{L'Hôpital}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1 \cdot \ln(x/2) + x \cdot \frac{1/2}{x/2}}{2 \cdot (x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 \cdot \ln(x/2) + 1}{2 \cdot (x-2)} \underset{L'Hôpital}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1/2}{x/2}}{2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

Por lo tanto, tiene una asíntota horizontal en $x = 0$.

iv) (0,75 puntos) Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $g(x)$ en el punto de abcisa $x = 1$

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es de la forma,

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

Calculamos $f(1)$

$$f(1) = \frac{1 \cdot \ln(1/2)}{(1-2)^2} = -\ln(2)$$

Calculamos $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{\left[1 \cdot \ln(x/2) + x \cdot \frac{1/2}{x/2}\right] \cdot (x-2)^2 - x \cdot \ln(x/2) \cdot 2 \cdot (x-2)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{[\ln(x/2) + 1] \cdot (x-2) - 2x \cdot \ln(x/2)}{(x-2)^3}$$

Calculamos $f'(1)$

$$f'(1) = \frac{[\ln(1/2) + 1] \cdot (1-2) - 2 \cdot 1 \cdot \ln(1/2)}{(1-2)^3} = \frac{[\ln(1/2) + 1] \cdot (-1) - 2 \cdot \ln(1/2)}{-1} =$$

$$= \ln(1/2) + 1 + 2 \cdot \ln(1/2) = 3\ln(1/2) + 1 = 1 - 3 \cdot \ln(2)$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es

$$y - (-\ln(2)) = (1 - 3\ln(2)) \cdot (x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad y + \ln(2) = (1 - 3\ln(2)) \cdot (x - 1) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y = (1 - 3\ln(2)) \cdot x + 2\ln(2) - 1$$

Es decir, aproximadamente,

$$\Leftrightarrow \quad y = -1{,}0794 \cdot x + 0{,}38629$$

(b) (0,75 + 0,75 + 0,75 puntos) Argumenta matemáticamente mediante algún criterio válido (criterio del cociente, de la raíz, de comparación, de paso al límite, de Leibniz de series alternadas) si las siguientes series son convergentes o no.

$$\boldsymbol{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt{n}+2}{3n-1} \qquad \boldsymbol{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3} \qquad \boldsymbol{c)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

$$\boldsymbol{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt{n}+2}{3n-1}$$

Tomamos la p-serie para $n=\frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

que es divergente porque $0<\frac{1}{2}<1$. Por el criterio de comparación por paso a límite, tomando

$$a_n=\frac{4\sqrt{n}+2}{3n-1}>0 \quad , \qquad b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4\sqrt{n}+2}{3n-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(4\sqrt{n}+2)\cdot\sqrt{n}}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+2\sqrt{n}}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{3n}=\frac{4}{3}\in\mathbb{R}^*$$

Al haber obtenido un valor real positivo, las series tienen el mismo carácter. Por lo tanto, como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\sqrt{n}+2}{3n-1}\ \boldsymbol{es\ divergente}$$

$$\boldsymbol{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$$

Como,

$$2^n<2^n+3 \quad \forall\, n\in\mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2^n+3}<\frac{1}{2^n}\ \forall\, n\in\mathbb{N} \ \Leftrightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

Consideramos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

que es una serie geométrica de razón $r=\frac{1}{2}<1$ y, por tanto, converge.

Como la serie anterior mayora a la serie a analizar,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$$

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$$

es convergente.

$\boldsymbol{c)}$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

Aplicamos el criterio de Leibniz para series alternadas. Para ello,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{1}{\ln(n)}$$

Probamos la condición necesaria para que sea convergente,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Operamos,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$$

Probamos ahora la segunda condición,

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \ , \forall\, n \geq k \quad a_{n+1} \leq a_n$$

Como,

$$\ln(n) \leq \ln(n+1) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln(n+1)} \leq \frac{1}{\ln(n)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+1} \leq a_n$$

Cumple la segunda condición del criterio de Leibniz.

Por lo tanto, al cumplir las dos condiciones del criterio de Leibniz, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

converge.