A. ECUACIONES DIFERENCIALES

15.2. Resolver las siguientes ecuaciones en variables separables,

$a)\ xy = y' \ , \qquad y(1) = 1$

$b)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x^2 - 1}$

$c)\ \dfrac{y}{x} = \ln(x) \cdot y'$

$d)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{(x^2 - x) \cdot (y^2 + 3)}$

$e)\ y' = 2x \cdot \sqrt{y - 1} \ , \qquad y(2) = 0$

$f)\ \dfrac{dy}{dx} = xy + x - 2y - 2 \ , \quad y(0) = 2$

$g)\ (x^2 + 1) \cdot y' \cdot \tan y = 2$

$h)\ (3e^y + e^y \cos x) \cdot y' = sen\, x + e^{2y} senx \ , \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$i)\ xe^{2x^2+3y^2} dx - ye^{-x^2-2y^2} dy = 0$

$j)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy - 3y + x - 3}{xy + 2y - x - 2}$

15.2. Resolver las siguientes ecuaciones en variables homogéneas,

$a)\ xdx + (y - 2x)dy = 0$

$b)\ (2x - y)dx + (-3x + 5y)dy = 0$

$c)\ xydx = (y^2 - x^2)dy$

$d)\ x \cdot \dfrac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

$e)\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$

$f)\ xydy = (y^2 - xy + x^2)dx$

$g)\ yx \cdot \dfrac{dy}{dx} + y^2 e^{-\frac{x}{y}} = x^2$

$h)\ y\, dx + x \cdot (\ln x - lny)dy = 0 \ , \ \ y(1) = e$

15.3. Resolver las siguientes ecuaciones lineales utilizando el factor integrante,

$a)\ \ xy' - 10y = 0$

$b)\ \ (100 + 3t)A' + A = 10$

$3)\ \ (2x + 5) \cdot \dfrac{dy}{dx} + 10y = 10 \cdot (2x + 5)\ \ con\ y(0) = 0$

$d)\ \ (x\text{^"} + 1) \cdot dy = (6x - 3xy) \cdot dx$

$e)\ xy' + (2x - 3)y = 4x^4$

$f)\ \ (y^2 + 1)dx = (1 + xy)dy\ \ ,\ \ con\ x(1) = 0$

$g)\ \ x^2\, y' + 2xy = x - 1$

$h)\ \ y' \cos x + y\ senx - 1 = 0$

$i)\ \ y' \cos x + y\ sen\, x - \cos^3 x = 0\ \ \ con\ y(0) = -1$

15.4. Resolver aproximadamente el valor solicitado en las siguientes ecuaciones mediante el método de Euler con el incremento proporcionado.

$a)\ \ y' = xy + y\ \ ,\ \ y(4) = 1\ \ \ h = 0{,}2\ \ \ \ ¿y(4{,}2)?$

$b)\ \ y' = 0{,}2y - 5y^2\ \ ,\ \ y(0) = 3\ \ \ h = 0{,}01\ \ \ \ ¿y(0{,}002)?$

$c)\ \ y' = 2x + 2y - 1\ \ ,\ \ y(1) = 1\ \ \ h = 0{,}1\ \ \ \ ¿y(1{,}5)?$

$d)\ \ dy = (3x - 2y)dx\ \ ,\ \ y(1) = 1\ \ \ h = 0{,}1\ \ \ \ ¿y(1{,}5)?$

$e)\ \ P' = 5P - P^2\ \ ,\ \ P(0) = 1{,}5\ \ \ h = 0{,}1\ \ \ \ ¿y(5)?$

B. MÉTODO DE EULER PARA RESOLVER ECUACIONES DIFERENCIALES

15.5. Resolver aproximadamente el valor solicitado en las siguientes ecuaciones mediante el método de Euler con el número de pasos solicitado.

$a)\ \ y' = xy\ \ ,\ \ y(1) = 3\ \ \ n = 5\ \ \ \ ¿y(5)?$

$b)\ \ y' = x^2 + xy\ \ ,\ \ y(2) = 0\ \ \ n = 4\ \ \ \ ¿y(6)?$

$b)\ \ y' = \dfrac{x - y}{x}\ \ ,\ \ y(3) = 2\ \ \ n = 8\ \ \ \ ¿y(4)?$

$d)\ \ xdy = y^2 dx\ \ ,\ \ y(2) = 1\ \ \ n = 3\ \ \ \ ¿y(2{,}9)?$

B. BINOMIO DE NEWTON

15.11. Calcular los siguientes números combinatorios,

$$\binom{3/2}{3} \qquad \binom{-4}{5} \qquad \binom{7/3}{4}$$

$$\binom{-2/3}{2} \qquad \binom{5/4}{3} \qquad \binom{-1/2}{6}$$

15.12. Calcular los primeros tres términos de los siguientes binomios de Newton,

$$11a)\ (4x-1)^{1/3} \qquad 11b)\ (1+x^2)^{-2/5} \qquad 11c)\ \left(\frac{x}{2}-2\right)^{3/4}$$

$$11d)\ \left(3-\frac{1}{x}\right)^{-2} \qquad 11e)\ (1+x)^{1/2} \qquad 11f)\ (x-y)^{-4/3}$$

15.13. Determina el término de grado que se indica en los siguientes binomios de Newton,

$$a)\ (2-x)^{-1}\ ,\ grado\ 4 \qquad b)\ (x+1)^{-2/3}\ ,\ grado-8/3$$

$$c)\ (x^2-2)^{-1}\ ,\ grado-4 \qquad d)\ \left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\frac{1}{2}}\ ,\ grado\ 2/7$$

C. POLINOMIOS DE NEWTON, MCLAURIN Y SERIES DE POTENCIAS.

15.21. Calcula el polinomio de Taylor del grado y en el valor que se indica de cada una de estas funciones,

$f(x)=e^{2x}$ $grado\ 3$, $x=1$ $g(x)=\ln x$ $grado\ 2$, $x=e$ $h(x)=\dfrac{1}{2x}$ $grado\ 4$, $x=1$

$j(x)=tg\ x$ $grado\ 2$, $x=\pi/4$ $k(x)=arcsen\ x$ $grado\ 1$, $x=1$ $l(x)=\dfrac{1}{x+1}$ $grado\ 3$, $x=2$

15.22 Calcula la serie de MacLaurin de cada una de estas funciones,

$$a)\ a(x)=e^x \qquad b)\ b(x)=\ln(x+1) \qquad c)\ c(x)=sen\ x \qquad d)\ d(x)=x\cdot e^x$$

$$e)\ e(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad f)\ f(x)=cos\ x \qquad g)\ g(x)=\frac{1}{x+a} \qquad h)\ h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

15.23 Calcula el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias,

$$a)\ \ a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!} \qquad b)\ \ b(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{7^n} \qquad c)\ \ c(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot x^n$$

$$d)\ \ d(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n} \qquad f)\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n\cdot x^n}{\sqrt{n+1}} \qquad g)\ g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

15.24. Sea $f(x)=\frac{1}{2x}$

a) Hallar la serie de Taylor de f.

b) Calcula el intervalo de convergencia de la serie de Taylor.

c) Hallar el valor $f(0,01)$ con la serie de Taylor.

d) Calcula el error cometido en el cálculo de $f(0,01)$

15.25. Sea $f(x)=x\cdot e^x+tg(x)$

a) Hallar la fórmula de Maclaurin de orden 3 de f.

b) Hallar una aproximación del valor $f(0,01)$ con el polinomio de Maclaurin de orden 3

c) Acotar el error cometido en el cálculo de $f(0,01)$ en el apartado b)

15.26. Resuelve las siguientes cuestiones,

a) Escribir la fórmula de Maclaurin de grado 3 de la función $y=arctgx$

b) Calcular el valor aproximado de $arctg(0{,}1)$, utilizando el polinomio de Maclaurin del apartado a) y acotar el error cometido.

c) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{arctg(x)-x}{4x^3}$ usando la aproximación de Maclaurin de grado 3 de $y=arctgx$.

d) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{arctg(x)-x}{4x^3}$ sin la aproximación y comparar el resultado con lo obtenido en c).

15.27. Resuelve las siguientes cuestiones,

a) Obtener el polinomio de Maclaurin de grado 2, de la función $f(x)=\ ln\left(\ x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

b) Utilizando el polinomio anterior, hallar $f(0{,}1)$.

15.28. Resuelve las siguientes cuestiones,

a) Desarrollar en serie de Maclaurin la función la función $f(x) = (1+x)^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

b) Usando el apartado a) para el valor de "α" adecuado, calcular $\frac{1}{\sqrt[3]{1,1}}$, tomando los cuatro primeros términos del desarrollo ¿Cuántas cifras exactas se obtienen con este método?

15.29. Hallar el grado mínimo del polinomio de Maclaurin para calcular con un error menor que 0.001.

a) $f(0.5)$ siendo $f(x) = ln(1 + x)$

b) $f(1/e)$ siendo $f(x) = x/e^{x}$.