MICROEXAMEN **MATEMÁTICAS II** **FECHA: V20/09/24**

Nombre y apellidos:

ENUNCIADOS DE LOS EJERCICIOS

1. Resuelve los siguientes límites mostrando los pasos que realizas hasta llegar a la solución,

$a)\quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) =$

$b)\quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - x}{1 - x}\right)^{1/x} =$

$c)\quad \lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x}{sen\,(x^2)} =$

$b)\quad \lim_{x \to 0} (e^{2x} + 4x^2)^{1/x} =$

2. Calcula y escribe el dominio de las siguientes funciones

$a)\quad f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

$b)\quad g(x) = sen\left(\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\right)$

$c)\quad h(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$

$d)\quad k(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x)}$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

1. Resuelve los siguientes límites mostrando los pasos que realizas hasta llegar a la solución,

$\boldsymbol{a)}$ $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty$

Se trata de una indeterminación $\infty-\infty$. Restamos dentro del límite, para intentar la indeterminación ∞/∞ o $0/0$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-(e^x-1)}{(e^x-1)\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{(e^x-1)\cdot x}$$

Hemos llegado a una indeterminación $0/0$ y estamos en las condiciones de la regla de L´Hôpital por lo que aplicamos dicha regla,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{(e^x-1)\cdot x}\underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{e^x\cdot x+(e^x-1)\cdot 1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1}$$

Volvemos a tener una indeterminación $0/0$ y estamos en las condiciones de la regla de L´Hôpital por lo que aplicamos de nuevo dicha regla,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1}\underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{1\cdot e^x+xe^x+e^x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{xe^x+2e^x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x+2}=-\frac{1}{0+2}=-\frac{1}{2}$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}}$$

$\boldsymbol{b)}$ $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-x}{1-x}\right)^{1/x}=1^\infty$

Se trata de una indeterminación 1^∞,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-x}{1-x}\right)^{1/x}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{e^x-x}{1-x}-1\right)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{e^x-x-1+x}{1-x}\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{e^x-1}{1-x}\right)}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x-x^2}}$$

En el exponente hemos llegado a una indeterminación $0/0$ y estamos en las condiciones de la regla de L´Hôpital por lo que aplicamos dicha regla,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x-x^2}\underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1-2x}=\frac{1}{1-0}=1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-x}{1-x}\right)^{1/x}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x-x^2}}=e^1$$

(*) Hay otro modo de hacer este límite y es tomando logaritmos neperianos en la expresión inicial del límite,

$$L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-x}{1-x}\right)^{1/x}\iff ln\,L=ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-x}{1-x}\right)^{1/x}\right)$$

Por cuestiones de continuidad de la función logaritmo neperiano y las propiedades de lo logaritmos podemos reescribir el límite del siguiente modo,

$$\ln L=ln\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-x}{1-x}\right)^{1/x}\right)=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{e^x-x}{1-x}\right)^{1/x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln\left(\frac{e^x-x}{1-x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{e^x-x}{1-x}\right)}{x}$$

Hemos llegado a una indeterminación $0/0$ y estamos en las condiciones de la regla de L´Hôpital por lo que aplicamos dicha regla,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{e^x-x}{1-x}\right)}{x}\underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\frac{(e^x-1)\cdot(1-x)-(e^x-x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}}{\left(\frac{e^x-x}{1-x}\right)}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(e^x-1)\cdot(1-x)-(e^x-x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}}{\left(\frac{e^x-x}{1-x}\right)}=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1) \cdot (1 - x) - (e^x - x) \cdot (-1)}{(1 - x) \cdot (e^x - x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{(e^x - 1) \cdot (1 - x)}{(1 - x) \cdot (e^x - x)} + \frac{(e^x - x)}{(1 - x) \cdot (e^x - x)} \right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^x - 1}{e^x - x} + \frac{1}{1 - x} \right] = \frac{1 - 1}{1 - 0} + \frac{1}{1 - 0} = 0 + 1 = 1$$

Por lo tanto,

$$\ln L = 1 \iff L = e^1 \iff \boldsymbol{\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - x}{1 - x} \right)^{1/x} = e^1 = e}$$

$\boldsymbol{c)}$ $\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x}{sen\,(x^2)}} = \frac{0}{0}$

Estamos ante una indeterminación $0/0$ y estamos en las condiciones de la regla de L´Hôpital por lo que aplicamos dicha regla,

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x}{sen\,(x^2)} \underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot sen\, x \cdot cos\, x}{2x \cdot cos\,(x^2)}$$

Como $2 \cdot sen\, x \cdot cos\, x = sen\, 2x$ entonces,

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot sen\, x \cdot cos\, x}{2x \cdot cos\,(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, 2x}{2x \cdot cos\,(x^2)}$$

Volvemos a estar ante una indeterminación $0/0$ y estamos en las condiciones de la regla de L´Hôpital por lo que aplicamos dicha regla,

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, 2x}{2x \cdot cos\,(x^2)} \underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2\, cos\, 2x}{2 \cdot cos\,(x^2) + 2x \cdot \left(-sen(x^2)\right) \cdot 2x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\, cos\, 2x}{2 \cdot cos\,(x^2) - 4x^2 \cdot sen(x^2)} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 \cdot 0} = \frac{2}{2 - 0} = 1$$

Y por lo tanto,

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x}{sen\,(x^2)} = 1}$$

(*) En este ejercicio, se podría no haber cambiado $2 \cdot sen\ x \cdot cos\ x = sen\ 2x$.

En ese caso, aplicando L´Hôpital tendríamos,

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot sen\ x \cdot \cos x}{2x \cdot cos\ (x^2)} \underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot (\cos^2 x - sen^2 x)}{2 \cdot cos\ (x^2) + 2x \cdot \left(-sen(x^2)\right) \cdot 2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \cdot (\cos^2 x - sen^2 x)}{2 \cdot cos\ (x^2) - 4x^2 \cdot sen(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - sen^2 x}{cos\ (x^2) - 2x^2 \cdot sen(x^2)} =$$

$$= \frac{1-0}{1 - 2 \cdot 0 \cdot 0} = \frac{1}{1-0} = 1$$

Y nuevamente,

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen^2 x}{sen\ (x^2)} = 1$$

$d)$ $\lim_{x \to 0} (e^{2x} + 4x^2)^{1/x} = 1^{\infty}$

Se trata de una indeterminación 1^{∞},

$$\lim_{x \to 0} (e^{2x} + 4x^2)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot (e^{2x} + 4x^2 - 1)} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} + 4x^2 - 1}{x}}$$

En el exponente hemos llegado a una indeterminación $0/0$ y estamos en las condiciones de la regla de L´Hôpital por lo que aplicamos dicha regla,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} + 4x^2 - 1}{x} \underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x} + 8x}{1} = \frac{2 \cdot 1 + 0}{1} = 2$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 0} (e^{2x} + 4x^2)^{1/x} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} + 4x^2 - 1}{x}} = e^2$$

(*) Hay otro modo de hacer este límite y es tomando logaritmos neperianos en la expresión inicial del límite,

$$L = \lim_{x \to 0} (e^{2x} + 4x^2)^{1/x} \iff ln\ L = ln \left(\lim_{x \to 0} (e^{2x} + 4x^2)^{1/x} \right)$$

Por cuestiones de continuidad de la función logaritmo neperiano y las propiedades de lo logaritmos podemos reescribir el límite del siguiente modo,

$$\ln L = ln\left(\lim_{x\to 0}(e^{2x}+4x^2)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0}\ln(e^{2x}+4x^2)^{1/x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln(e^{2x}+4x^2) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{2x}+4x^2)}{x}$$

Hemos llegado a una indeterminación $0/0$ y estamos en las condiciones de la regla de L´Hôpital por lo que aplicamos dicha regla,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{2x}+4x^2)}{x} \underset{L´Hôpital}{\overset{0/0}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2e^{2x}+8x}{e^{2x}+4x^2}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}+8x}{e^{2x}+4x^2} = \frac{2\cdot 1+0}{1+0} = 2$$

Por lo tanto,

$$\ln L = 2 \iff L = e^2 \iff \boldsymbol{\lim_{x\to 0}(e^{2x}+4x^2)^{1/x} = e^2}$$

2. Calcula y escribe el dominio de las siguientes funciones

$\boldsymbol{a)}$ $\boldsymbol{f(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}$

Como un logaritmo neperiano solo existe cuando se aplica sobre valores positivos entonces el dominio de esta función se calcula forzando a que,

$$\frac{x}{x-1} > 0$$

En ese caso, como, $x = 0$ y $x = 1$ son las raíces del numerador y del denominador respectivamente, tendremos que,

Intervalo/semirrecta	Signo de $\frac{x}{x-1}$	$f(x)$ ...
$(-\infty, 0)$	$\frac{(-)}{(-)} = (+)$	Existe
$(0, +1)$	$\frac{(+)}{(-)} = (-)$	No existe
$(+1, +\infty)$	$\frac{(+)}{(+)} = (+)$	Existe

Por lo tanto, $\boldsymbol{Dom(f) = (-\infty, 0) \cup (+1, +\infty).}$

$\boldsymbol{b)}$ $\boldsymbol{g(x) = sen\left(\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\right)}$

La función seno va a existir siempre que la función sobre la que está aplicada exista. En tal caso, una función irracional con índice par solo existe si la función sobre la que se aplica es no negativa, es decir,

$$\frac{1}{1-x^2} \geq 0$$

En ese caso, como, $x=-1$ y $x=1$ son las raíces del denominador (el numerador no tiene raíces) y para estos no existe la función, tendremos que,

Intervalo/semirrecta	**Signo de** $\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)\cdot(1+x)}$	$\boldsymbol{g(x)}$ ...
$(-\infty,-1)$	$\frac{(+)}{(+)\cdot(-)}=(-)$	No existe
$(-1,+1)$	$\frac{(+)}{(+)\cdot(+)}=(+)$	Existe
$(+1,+\infty)$	$\frac{(+)}{(-)\cdot(+)}=(-)$	NO existe

Por lo tanto, $\boldsymbol{Dom(g)=(-1,+1)}$

$\boldsymbol{c)}$ $\boldsymbol{h(x)=\sqrt{\frac{x}{x-2}}}$

Se trata de una función irracional con índice par solo existe si la función sobre la que se aplica es no negativa, es decir,

$$\frac{x}{x-2}\geq 0$$

En ese caso, como $x=0$ es raíz del numerador y para este valor la función existe mientras que $x=2$ es la raíz del denominador y para este valor no existe la función, tendremos que,

Intervalo/semirrecta	**Signo de** $\frac{x}{x-2}$	$\boldsymbol{g(x)}$ ...
$(-\infty,0]$	$\frac{(-)}{(-)}=(+)$	Existe
$[0,+2)$	$\frac{(+)}{(-)}=(-)$	No existe
$(+2,+\infty)$	$\frac{(+)}{(+)}=(+)$	Existe

Por lo tanto, $\boldsymbol{Dom(h)}=(-\infty,0]\cup(+2,+\infty)$

$\boldsymbol{d)}$ $\boldsymbol{k(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x)}}$

Como un logaritmo neperiano solo existe cuando se aplica sobre valores positivos entonces el dominio de esta función debe cumplir que,

$$x > 0$$

Además, como el logaritmo está en el denominador, no podemos permitir que se anule y por lo tanto, es valor de no dominio,

$$\ln(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^0 = x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Por otra parte, el numerador de la función es una función irracional con índice par para la que solo existe si la función sobre la que se aplica es no negativa, es decir,

$$4 - x^2 \geq 0$$

En ese caso, como $x = -2$ y $x = +2$ son raíces del polinomio $p(x) = 4 - x^2$

$$4 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \pm 2 = x$$

Y estos dos valores validan la desigualdad entonces, teniendo en cuenta que la función del denominador solo existía para valores positivos exceptuando $x = 1$, tendremos que,

Intervalo/semirrecta	Signo de $4 - x^2 = (2 - x) \cdot (2 + x)$	$g(x)$ ...
$(0, +1)$	$(+) \cdot (+) = (+)$	Existe
$(+1, +2]$	$(+) \cdot (+) = (+)$	Existe
$[+2, +\infty)$	$(-) \cdot (+) = (-)$	No existe

Por lo tanto, $\boldsymbol{Dom(k) = (0, +1) \cup (+1, +2]}$