DEMOSTRACIONES DIRECTA (POR LA DEFINICIÓN DE DERIVADA) Y POR INDUCCIÓN DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL EN X CON EXPONENTE NATURAL

LA WEB DEL PROFE DE MATES

DEMOSTRACIÓN DIRECTA DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL EN X CON EXPONENTE NATURAL (POR LA DEFINICIÓN DE DERIVADA)

Demostrar que

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\,, \qquad \boldsymbol{f_n(x) = x^n} \;\;\Rightarrow\;\; \boldsymbol{f_n{}'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

Sea $x \in \mathbb{R}\ y\ la\ función\ real\ de\ variable\ real\ f_n(x) = x^n$. Aplicando la fórmula general de derivación,

$$f_n{}'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Aplicando el binomio de Newton en la potencia de exponente natural $n \in \mathbb{N}$ con base $(x+h)$ tendremos que,

$$f_n{}'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^k - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0} \cdot x^{n-0} \cdot h^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^k - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 \cdot x^n \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^k - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^k - x^n}{h} =$$

Eliminamos el término x^n del numerador y simplificamos la expresión,

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^k}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot h^{k-1} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h + \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} \cdot h^2 + \ \dots + \binom{n}{n} \cdot x^{n-n} \cdot h^{n-1} \right] =$$

Hacemos el límite y obtenemos la fórmula derivada deseada,

$$= \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + 0 + 0 + \ \dots + 0 = n \cdot x^{n-1}$$

DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL EN X CON EXPONENTE NATURAL

Demostrar por inducción que

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\,, \qquad \boldsymbol{f_n(x) = x^n} \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{f_n{}'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

Demostración

Aplicamos la técnica inductiva sobre el valor natural del exponente. Para ello probaremos el primer caso ($n = 1$) y la hipótesis inductiva. Si se demuestran las dos entonces la afirmación del enunciado es cierta para todo valor natural del exponente.

- Si $n = 1$ demostraremos que

  $$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\,, \qquad f_1(x) = x^1 = x \;\; \Rightarrow \;\; f_1{}'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1$$

  Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, aplicamos la fórmula general de la derivada de una función,

  $$f_1{}'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f_1(x+h) - f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

  Por tanto, se verifica el caso $n = 1$.

- Probamos la hipótesis de inductiva, es decir, que si suponemos cierto el caso $n = k$ es decir,

  $$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\,, \qquad f_k(x) = x^k \;\; \Rightarrow \;\; f_k{}'(x) = k \cdot x^{k-1}$$

  entonces el caso $n = k + 1$ es cierto, es decir, es cierto que

  $$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\,, \qquad f_{k+1}(x) = x^{k+1} \;\; \Rightarrow \;\; f_{k+1}{}'(x) = (k+1) \cdot x^k$$

  Para ello, sea $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$, comenzaremos reescribiendo la función a derivar como producto de dos funciones,

  $$f_{k+1}(x) = x^{k+1} = x \cdot x^k$$

  Entonces, aplicando la fórmula de la derivada del producto,

  $$f_{k+1}{}'(x) = (x^{k+1})' = (x \cdot x^k)' = (x)' \cdot x^k + x \cdot (x^k)'$$

  Como, por el caso $n = 1$ sabemos que

  $$f_1(x) = x \;\; \Rightarrow \;\; f_1{}'(x) = 1$$

  y por la hipótesis de inducción sabemos que

  $$f_k(x) = x^k \;\; \Rightarrow \;\; f_k{}'(x) = k \cdot x^{k-1}$$

entonces

$$f_{k+1}{}'(x) = (x)' \cdot x^k + x \cdot (x^k)' = 1 \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1}$$

Multiplicando en el segundo término de la suma,

$$f_{k+1}{}'(x) = 1 \cdot x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} = x^k + k \cdot x^k$$

Extrayendo factor común x^k en la expresión anterior tendremos que,

$$f_{k+1}{}'(x) = x^k + k \cdot x^k = (k+1) \cdot x^k$$

Por tanto, se verifica la hipótesis de inducción.

Por lo tanto, verificándose el primer caso $n = 1$ y la hipótesis inductiva, hemos demostrado el enunciado por inducción y se verifica que,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \qquad f_n(x) = x^n \;\; \Rightarrow \;\; f_n{}'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

(*) Cabría valorar si a la demostración por inducción le falta la demostración de la fórmula derivada de un producto. En todo caso, en el siguiente enlace está dicha demostración,

https://www.youtube.com/watch?v=cA_A-34Y2TU