# CONTROL 12

## Análisis y enfoques
## Matemáticas I y II

Fecha: **VIERNES, 7 de JUNIO de 2024**

---

**NOMBRE:** ______________________________________________________________________________

**APELLIDOS**:_____________________________________________________________________________

---

**Instrucciones para los/as alumnos/as**

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 11,5 puntos.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

**[Puntuación máxima: 2 puntos]**

**SECCIÓN ÚNICA**

**[Puntuación máxima: 2 puntos]**

**1.** Resuelva correctamente las siguientes cuestiones,

a) Dados los puntos $A(1,-2)$, $A´(-3,6)$ calcule una ecuación general de la recta $r$ desde la que $A´$ es punto simétrico de $A$ y viceversa. (0,75 puntos)

b) Dadas las rectas $r \equiv x + 2y = 5$ $y$ $s \equiv \left.\begin{array}{l} x = 1 - 4t \\ y = \quad\;\; 2t \end{array}\right\}$ $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que las rectas son paralelas y calcule la distancia entre ambas rectas. (0,5 + 0,75 puntos)

**[Puntuación máxima: 2 puntos]**

**2.** a) Sea la función $f(x) = \sqrt{2+x}$ y $g(x) = x - x^2$. Calcular el dominio de las funciones composición $f \circ g$ $y$ $g \circ f$. (0,75 + 0,5 puntos)

b) Sabiendo que la imagen de una función inyectiva es el dominio de su función inversa, calcula la imagen de la función $h(x) = \frac{2x}{x-1}$ (0,75 puntos)

**[Puntuación máxima: 2 puntos]**

**3.** Calcula algebraicamente y de modo correcto los siguientes límites, planteando todos los pasos intermedios, (0,5 + 0,75 +0,75 puntos)

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+27x^6}+4x^2}{x+\sqrt{25x^4+9x^2}} \qquad b)\ \lim_{x\to+1}\frac{x-\sqrt{x}}{1-x} \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)$$

**[Puntuación máxima: 2 puntos]**

**4.** Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

a) Determine el dominio de la función $f(x)$. (0,25 puntos)

b) Determine algebraicamente todas las asíntotas de la función $f(x)$. (0,75 puntos)

c) Estudia la monotonía y los extremos relativos de la función $f(x)$. (1 punto)

**[Puntuación máxima: 2, puntos]**

**5.**Dada la función $f(x) = x^5 - x^3 - 2x + 1$

a) Determine algebraicamente la monotonía y los extremos relativos de la función $f(x)$.(1 punto)

b) Estudia la curvatura y puntos de inflexión de la función $f(x)$. (1 punto)

**[Puntuación máxima: 1,5 puntos]**

**6.(a)** Calcula algebraicamente la función derivada de las siguientes funciones, (0,5 + 0,5 puntos)

$$a1)\quad f(x) = \frac{x}{(x+2)^2} \qquad\qquad b2)\quad g(x) = \left(\frac{x}{2x-1}\right)^3 \quad si\ \ x \neq \frac{1}{2}$$

(b) Escribe la ecuación general de la recta tangente a la función $g(x)$ en $x = 1$. (0,5 puntos)

## SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CONTROL 12 DE MATEMÁTICAS I

**[Puntuación máxima: 2 puntos]**

**1.** Resuelva correctamente las siguientes cuestiones,

a) Dados los puntos $A(1,-2)$, $A'(-3,6)$ calcule una ecuación general de la recta $r$ desde la que $A'$ es punto simétrico de $A$ y viceversa. (0,75 puntos)

b) Dadas las rectas $r \equiv x+2y=5$ $y$ $s \equiv \left.\begin{matrix} x = 1-4t \\ y = \quad 2t \end{matrix}\right\}$ $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que las rectas son paralelas y calcule la distancia entre ambas rectas. (0,5 + 0,75 puntos)

**a) Dados los puntos $\boldsymbol{A(1,-2)}$, $\boldsymbol{A'(-3,4)}$ calcula la ecuación general de la recta $\boldsymbol{r}$ desde la que $\boldsymbol{A'}$ es punto simétrico de $\boldsymbol{A}$ y viceversa.**

Si $A'$ es el punto simétrico respecto de $A$ mediante la recta $r$ entonces el punto medio $M$ del segmento $AA'$ está en la recta $r$. Las coordenadas de ese punto son,

$$M\left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = (-1,2)$$

Además, la recta $r$ debe ser perpendicular al vector $\overrightarrow{AA'}$ , el cual tiene por coordenadas libres,

$$\overrightarrow{AA'} = A' - A = (-3,6) - (1,-2) = (-4,+8)$$

Por tanto, una ecuación de la recta r vendrá dada por,

$$-4x + 8y = c$$

Para calcular $c$ sustituimos el punto $M$ en la ecuación de $r$ ya que tiene que verificarla,

$$-4 \cdot (-1) + 8 \cdot 2 = d \quad \Leftrightarrow \quad 4 + 16 = d \quad \Leftrightarrow \quad d = 20$$

En conclusión, una recta general de la recta $r$ es,

$$r \equiv -4x + 8y = 20 \quad \Leftrightarrow \quad r \equiv -x + 2y = 5$$

**b) Dadas las rectas $\boldsymbol{r \equiv x+2y=5}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{s \equiv \left.\begin{matrix} x = 1-4t \\ y = \quad 2t \end{matrix}\right\}}$ $\boldsymbol{t \in \mathbb{R}}$. Demuestre que las rectas son paralelas y calcule algebraicamente la distancia entre ambas rectas.**

Tomamos un vector normal de la recta $r$,

$$r \equiv x + 2y = 5 \qquad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_r = (1,2)$$

Tomamos un vector director de la recta $s$,

$$s \equiv \left.\begin{matrix} x = 1-4t \\ y = \quad 2t \end{matrix}\right\} \; t \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_s = (-4,2)$$

Si las rectas son paralelas el producto escalar de ambos vectores debe ser cero,

$$\vec{n}_r \cdot \vec{v}_s = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 2 = 0$$

Por otra parte, debemos asegurarnos de que no son coincidentes. Para ello tomamos el punto $P(1,0) \in s$ y comprobamos que no pertenece a la recta $r$, verificando que no cumple su ecuación.

$$1 + 2 \cdot 0 = 1 + 0 = 1 \neq 5 \qquad \Leftrightarrow \quad P \notin r$$

Por lo tanto las rectas $r$ $y$ $s$ son paralelas.

Calculamos ahora la distancia entre las rectas. Para ello establecemos las ecuaciones paramétricas de la recta $t$ que pasa por el punto $P \in s$ y es perpendicular a las dos rectas. Para ello utilizaremos como vector director el vector normal de la recta $r$ (que también lo es de la recta $s$),

$$t \equiv \left.\begin{matrix} x = 1 + t \\ y = \quad 2t \end{matrix}\right\}, \ t \in \mathbb{R}$$

Calculamos el punto $Q$ de corte de la recta $r$ con la recta $t$. Sustituimos las paramétricas de la recta $t$ en la ecuación implícita de la recta $r$,

$$1 \cdot (1 + t) + 2 \cdot (2t) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + t + 4t = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5t = 4 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{4}{5}$$

Por lo tanto, el punto $Q$ de corte entre $r$ y $t$ es,

$$Q = \begin{cases} x = 1 + \dfrac{4}{5} = \dfrac{9}{5} \\ y = 2 \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

La distancia entre las rectas $r\ y\ s$ es igual que la distancia entre los puntos $P\ y\ Q$,

$$d(r, s) = d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{9}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{5} - 0\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{64}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5}\ unidades \approx 1{,}789\ unidades$$

**[Puntuación máxima: 2 puntos]**

**2.** a) Sea la función $f(x) = \sqrt{2+x}$ y $g(x) = x - x^2$. Calcular el dominio de las funciones composición $f \circ g$ y $g \circ f$. (0,75 + 0,5 puntos)

b) Sabiendo que la imagen de una función inyectiva es el dominio de su función inversa, calcula la imagen de la función $h(x) = \frac{2x}{x-1}$ (0,75 puntos)

Comenzamos con $f \circ g$ componiendo en el orden que se indica,

$$f \circ g(x) = f(x - x^2) = \sqrt{2 + x - x^2}$$

Calculamos el dominio de la función, resolviendo

$$2 + x - x^2 \geq 0$$

Calculamos las raíces del polinomio $2 + x - x^2$

$$2 + x - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} =$$

$$= \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+3}{-2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-1-3}{-2} = +2 \end{cases}$$

Realizamos intervalos y semirrectas con los valores anteriores y estudiamos el signo del polinomio en dichas regiones,

| Intervalos/semirrectas | Valor de prueba | $-(x+1) \cdot (x-2)$ | Positiva/negativa |
|---|---|---|---|
| $(-\infty, -1]$ | $-2$ | $(-) \cdot (-) \cdot (-) = (-)$ | Negativo |
| $[-1, +2]$ | $0$ | $(-) \cdot (+) \cdot (-) = (+)$ | Positivo |
| $[+2, +\infty)$ | $+3$ | $(-) \cdot (+) \cdot (+) = (-)$ | Negativo |

Por lo tanto, el dominio de la función es,

$$Dom(f) = [-1,2]$$

Ahora calculamos el dominio de $g \circ f$ componiendo en el orden que se indica,

$$g \circ f(x) = g\left(\sqrt{2+x}\right) = \sqrt{2+x} - \left(\sqrt{2+x}\right)^2 = \sqrt{2+x} - 2 - x$$

Calculamos el dominio de la función, resolviendo

$$2 + x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -2$$

Por lo tanto, el dominio de la función es,

$$Dom(f) = [-2, +\infty)$$

**b) Sabiendo que la imagen de una función inyectiva es el dominio de su función inversa, calcula la imagen de la función $h(x) = \frac{2x}{x-1}$ (0,75 puntos)**

Calculamos la función inversa $h^{-1}(y)$ ,

$$y = \frac{2x}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad y \cdot (x-1) = 2x \quad \Leftrightarrow \quad yx - y = 2x \quad \Leftrightarrow \quad yx - 2x = y \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x(y-2) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{y-2}$$

Por lo tanto,

$$h^{-1}(y) = \frac{y}{y-2}$$

Como la imagen de la función $h(x)$ es el dominio de la función $h^{-1}(y)$, entonces, calculamos dicho dominio anulando el denominador,

$$y - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2$$

En ese caso,

$$Im(h) = \mathbb{R} - \{+2\}$$

**[Puntuación máxima: 2 puntos]**

**3.** Calcula algebraicamente y de modo correcto los siguientes límites, planteando todos los pasos intermedios, (0,5 + 0,75 +0,75 puntos)

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+27x^6}+4x^2}{x+\sqrt{25x^4+9x^2}}\qquad b)\ \lim_{x\to+1}\frac{x-\sqrt{x}}{1-x}\qquad c)\ \lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)$$

$$\boldsymbol{a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+27x^6}+4x^2}{x+\sqrt{25x^4+9x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+27x^6}+4x^2}{x+\sqrt{25x^4+9x^2}}\overset{\infty/\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{27x^6}+4x^2}{\sqrt{25x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4x^2}{5x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2}{5x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$$

$$\boldsymbol{b)\ \lim_{x\to+1}\frac{x-\sqrt{x}}{1-x}}$$

$$\lim_{x\to+1}\frac{x-\sqrt{x}}{1-x}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to+1}\frac{(x-\sqrt{x})}{(1-x)}\cdot\frac{(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to+1}\frac{x^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{(1-x)\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+1}\frac{x^2-x}{(1-x)\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to+1}\frac{x\cdot(x-1)}{(1-x)\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+1}\frac{-x\cdot(-x+1)}{(1-x)\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+1}\frac{-x}{x+\sqrt{x}}=-\frac{1}{1+\sqrt{1}}=-\frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{c)\ \lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)=\infty-\infty$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)\cdot\left(2x+\sqrt{4x^2+x}\right)}{\left(2x+\sqrt{4x^2+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)^2-\left(\sqrt{4x^2+x}\right)^2}{\left(2x+\sqrt{4x^2+x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-4x^2-x}{\left(2x+\sqrt{4x^2+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\left(2x+\sqrt{4x^2+x}\right)}\overset{\infty/\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{(2x+2x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}$$

**[Puntuación máxima: 2 puntos]**

**4.** Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

a) Determine el dominio de la función $f(x)$. (0,25 puntos)

b) Determine algebraicamente todas las asíntotas de la función $f(x)$. (0,75 puntos)

c) Estudia la monotonía y los extremos relativos de la función $f(x)$. (1 punto)

**a) Determine el dominio de la función $f(x)$.**

La función es continua para $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ ya que el único valor para el que no existe es,

$$x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

**b) Determine algebraicamente todas las asíntotas de la función $f(x)$.**

- **Asíntotas verticales.** Son los valores $x = a$ donde ocurre que,

$$\lim_{x \to \pm a} f(x) = \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$$

Procedemos a anular el denominador.



$$x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Por lo tanto, <u>**la asíntota vertical es $x = 1$.**</u>

- **Asíntota horizontal.** No tiene. El grado del numerador es mayor que el del denominador. Deberían haber sido iguales. Mostramos por qué,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \infty} x = \infty$$

Por lo tanto, <u>**NO existe asíntota horizontal**</u>

- **Asíntota oblicua.** Tiene asíntota oblicua porque el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, Calculamos la asíntota $y = mx + n$ a través de los límites,

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to \infty} 1 = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left( \frac{x}{x-1} \right) \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \to \infty} 1 = 1$$

Por lo tanto, **la asíntota oblicua es $y = x + 1$.**

También se podría haber calculado dividiendo el numerador entre el denominador. Lo hacemos mediante el método de Ruffini,

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

El cociente es la asíntota oblicua, $\boldsymbol{y = x + 1}$.

**c) Estudiar la monotonía y los extremos relativos de la función $\boldsymbol{f(x)}$.**

Calculamos los extremos relativos de la función igualando a cero la primera derivada y resolviendo. La función derivada de la función es,

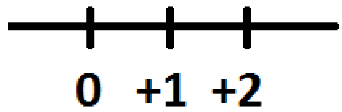
$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

En ese caso

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x = 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot (x-2) = 0 \;\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2 \end{cases}$$



En tal caso, creando las semirrectas e intervalos a partir de los valores anteriores al que unimos el valor de no dominio,




Estudiamos el signo de la primera derivada

| Intervalo/semirrecta | Valor de prueba | $f'(x) = \dfrac{x \cdot (x-2)}{(x-1)^2}$ | ¿$f(x)$ es creciente o decreciente? |
|---|---|---|---|
| $(-\infty, 0)$ | $x = -1$ | $\dfrac{(-) \cdot (-)}{(+)} = (+)$ | Creciente |
| $(0, +1)$ | $x = 0{,}5$ | $\dfrac{(+) \cdot (-)}{(+)} = (-)$ | Decreciente |
| $(+1, +2)$ | $x = 1{,}5$ | $\dfrac{(+) \cdot (-)}{(+)} = (-)$ | Decreciente |
| $(+2, +\infty)$ | $x = 3$ | $\dfrac{(+) \cdot (+)}{(+)} = (+)$ | Creciente |

Por lo tanto, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (+2, +\infty)$, es decreciente en $(0, +1) \cup (+1, +2)$, tiene un máximo relativo en $(0{,}0)$ y un mínimo relativo en $(2{,}4)$.

**[Puntuación máxima: 2, puntos]**

**5.**Dada la función $f(x) = x^5 - x^3 - 2x + 1$

a) Determine algebraicamente la monotonía y los extremos relativos de la función $f(x)$.(1 punto)

b) Estudia la curvatura y puntos de inflexión de la función $f(x)$. (1 punto)

**a) Estudiar la monotonía y los extremos relativos de la función $f(x)$.**

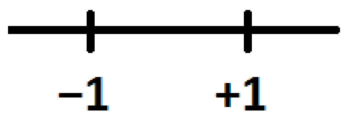
Calculamos los extremos relativos de la función igualando a cero la primera derivada y resolviendo. La función derivada de la función es,

$$f(x) = x^5 - x^3 - 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$$

En ese caso

$$f(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ 5x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 = \frac{+3 \pm \sqrt{9+40}}{10} \ \Leftrightarrow \ x^2 = \frac{+3 \pm \sqrt{49}}{10} \ \Leftrightarrow x^2x^2$$
$$= \frac{+3 \pm 7}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1 \\ x^2 = -\dfrac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad No\ tiene\ solución \end{cases}$$

En tal caso, creando las semirrectas e intervalos a partir de los valores anteriores al que unimos el valor de no dominio,




Estudiamos el signo de la primera derivada

| Intervalo/semirrecta | Valor de prueba | $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$ | ¿$f(x)$ es creciente o decreciente? |
|---|---|---|---|
| $(-\infty, -1)$ | $x = -2$ | $f'(-2) = 80 - 12 - 2 > 0$ | Creciente |
| $(-1, +1)$ | $x = 0$ | $f'(0) = -2 < 0$ | Decreciente |
| $(+1, +\infty)$ | $x = 3$ | $f'(3) = 405 - 27 - 2 > 0$ | Creciente |

Por lo tanto, $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (+1, +\infty)$, es decreciente en $(-1, +1)$, tiene un máximo relativo en $(-1,3)$ y un mínimo relativo en $(1, -1)$.

**b) Estudia la curvatura y puntos de inflexión de la función $f(x)$.**

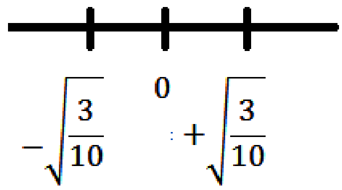
Calculamos los puntos de inflexión de la función igualando a cero la segunda derivada y resolviendo. La función derivada segunda de la función es,

$$f(x) = x^5 - x^3 - 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2 \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) = 20x^3 - 6x$$

En ese caso

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 20x^3 - 6x = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x(10x^2 - 3) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{3}{10} \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{10}} \end{cases}$$

En tal caso, creando las semirrectas e intervalos a partir de los valores anteriores al que unimos el valor de no dominio,






Estudiamos el signo de la segunda derivada

| Intervalo/semirrecta | Valor de prueba | $f''(x) = 2x(10x^2 - 3)$ | ¿$f(x)$ es cóncava(∪) o convexa (∩)? |
|---|---|---|---|
| $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$ | $x = -100$ | $(-)\cdot(+) = (-) < 0$ | Cóncava con ramas hacia abajo (∩) |
| $\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right)$ | $x = -0{,}1$ | $(-)\cdot(-) = (+) > 0$ | Cóncava con ramas hacia arriba (∪) |
| $\left(0, +\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$ | $x = +0{,}1$ | $(+)\cdot(-) = (-) < 0$ | Cóncava con ramas hacia abajo (∩) |
| $\left(+\sqrt{\frac{3}{10}}, +\infty\right)$ | $x = 100$ | $(+)\cdot(+) = (+) > 0$ | Cóncava con ramas hacia arriba (∪) |

Por lo tanto, $f(x)$ es cóncava con ramas hacia arriba en $\left(-\sqrt{\frac{3}{10}}, 0\right) \cup \left(+\sqrt{\frac{3}{10}}, +\infty\right)$, es cóncava con ramas hacia abajo en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right) \cup \left(0, +\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$, tiene puntos de inflexión en $(-\sqrt{\frac{3}{10}}, 2{,}2105)$ , $(0{,}1)$ y $\left(\sqrt{\frac{3}{10}}, -0{,}21047\right)$,

**[Puntuación máxima: 1,5 puntos]**

**6.(a)** Calcula algebraicamente la función derivada de las siguientes funciones, (0,5 + 0,5 puntos)

$$a1)\quad f(x)=\frac{x}{(x+2)^2} \qquad\qquad b2)\quad g(x)=\left(\frac{x}{2x-1}\right)^3 \quad si\ \ x\neq\frac{1}{2}$$

(b) Escribe la ecuación general de la recta tangente a la función $g(x)$ en $x = 1$. (0,5 puntos)

$$\boldsymbol{a1)\quad f(x)=\frac{x}{(x+2)^2}}$$

Se trata de la derivada de un cociente,

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+2)^2-x\cdot2\cdot(x+2)\cdot1}{(x+2)^4}=\frac{(x+2)-2x}{(x+2)^3}=\frac{2-x}{(x+2)^3}$$

$$\boldsymbol{a2)\quad g(x)=\left(\frac{x}{2x-1}\right)^3}$$

Se trata de la derivada de una potencia,

$$g'(x)=3\cdot\left(\frac{x}{2x-1}\right)^2\cdot\frac{1\cdot(2x-1)-x\cdot2}{(2x-1)^2}=3\cdot\left(\frac{x}{2x-1}\right)^2\cdot\frac{-1}{(2x-1)^2}=\frac{-3x^2}{(2x-1)^4}$$



**(b) Escribe la ecuación general de la recta tangente a la función $g(x)$ en $x = 1$.**

La pendiente de la recta tangente en $x = 1$ es,

$$g'(1)=\frac{-3\cdot1^2}{(2\cdot1-1)^4}=\frac{-3}{1}=-3$$

Además, como,

$$g(1)=\left(\frac{1}{2\cdot1-1}\right)^3=1$$

Entonces la ecuación general de la recta tangente en $x=1$ es,

$$\big(y-g(1)\big)=g'(1)\cdot(x-1)\quad\Leftrightarrow\quad(y-1)=-3\cdot(x-1)\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad y-1=-3x+3\quad\Leftrightarrow\quad 3x+y-4=0$$