CONTROL 10

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Fecha: **LUNES, 29 de ABRIL de 2024**

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10,5 puntos.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Matemáticas NS, Mayo 2019, P2, ej.8)**

1. (a) Halle las raíces de la ecuación $w^3 = 8i,\ w \in \mathbb{C}$. Dé las respuestas en forma cartesiana.(1 punto)

Una de las raíces anteriores, w_i, satisface la condición $Re(w_1) = 0$.

(b) Sabiendo que $w_i = \frac{z}{1-z}$ exprese z en la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{Q}$. (1 punto)

[Puntuación máxima: 2,5 puntos] **(Matemáticas NS, Mayo 2018, P1, ej.7)**

2. (a) Resuelva la siguiente ecuación bicuadrada aportando todas las soluciones complejas, (1,5 puntos)

$$z^4 + (4 - i)z^2 - 4i = 0$$

(b) Calcule en forma polar, dando después el resultado en forma binómica, (1 punto)

$$\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}} \cdot \left(\frac{3_{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{3}_{\frac{\pi}{3}}} \right)^2$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

3. El triángulo ABC tiene por vértices $A = (a^2 - 1, -2)$, $B(-4, 5)$ y $C(2{,}3c)$ con $a, c \in \mathbb{R}$. Si el baricentro del triángulo ABC es $P(-1, 2)$

a) Calcule los valores a y c. (0,5 puntos)

b) Calcule la longitud del radio de la circunferencia que circunscribe al triángulo ABC si $A(-1, -2)$, $B(-4, 5)$ y $C(2{,}3)$. (2 puntos)

[Puntuación máxima: 3,5 puntos]

4. Dado el punto $A(1,2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 + 3t \end{cases}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ resuelva las siguientes cuestiones,

(a) Calcule una ecuación general de la recta paralela a la recta r que pasa por el punto A. (0,5 puntos)

(b) Calcule el punto simétrico A' del punto A respecto de la recta r. (1 punto)

(c) Calcule los dos puntos P de la recta r de tal modo que la recta que pasa por los puntos P y A forman un ángulo de $60°$ con la recta r. (1 punto)

(d) Calcule la ecuación general de las dos rectas r' que distan $\sqrt{40}$ unidades de la recta r. (1 punto)

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº9 DE ANÁLISIS Y ENFOQUES

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Matemáticas NS, Mayo 2019, P2, ej.8)**

1. (a) Halle las raíces de la ecuación $w^3 = 8i,\ w \in \mathbb{C}$. Dé las respuestas en forma cartesiana.(1 punto)

Una de las raíces, w_i, satisface la condición $Re(w_1) = 0$.

(b) Sabiendo que $w_i = \frac{z}{1-z}$ exprese z en la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{Q}$. (1 punto)

(a) Halle las raíces de la ecuación $\boldsymbol{w^3 = 8i,\ w \in \mathbb{C}}$. Dé las respuestas en forma cartesiana.

Despejando w tendremos que,

$$w^3 = 8i \quad \Leftrightarrow \quad w = \sqrt[3]{8i}$$

Pasando a polares a $8i$,

$$8i = 8_{90°}$$

Aplicando la *fórmula de Moivre*,

$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90°}} = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 360° \cdot k}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{90° + 360° \cdot k}{3}\right)\right), \qquad k \in \{0,1,2\}$$

Por lo tanto,

- Si $k = 0$ entonces,

$$w_0 = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 360° \cdot 0}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{90° + 360° \cdot 0}{3}\right)\right) =$$

$$= 2 \cdot (\cos 30° + i \cdot sen\ 30°) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \cdot 1 = \sqrt{3} + i$$

- Si $k = 1$ entonces,

$$w_1 = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 360° \cdot 1}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{90° + 360° \cdot 1}{3}\right)\right) =$$

$$= 2 \cdot (\cos 150° + i \cdot sen\ 150°) = 2 \cdot (-\cos 30° + i \cdot sen\ 30°) =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i \cdot 1 = -\sqrt{3} + i$$

- Si $k = 2$ entonces,

$$w_2 = \sqrt[3]{8} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 360° \cdot 2}{3}\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{90° + 360° \cdot 2}{3}\right)\right) =$$

$$= 2 \cdot (\cos 270° + i \cdot sen\ 270°) = 2 \cdot \big(0 + i \cdot (-1)\big) = -2i$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son,

$$w_0 = \sqrt{3} + i \quad , \quad w_1 = -\sqrt{3} + i \quad , \quad w_2 = -2i$$

Una de las raíces, w_i, satisface la condición $Re(w_1) = 0$.

(b) Sabiendo que $w_i = \frac{z}{1-z}$ exprese z en la forma $a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{Q}$.

El valor w_i para el que su parte real es cero es $w_2 = -2i$. En ese caso,

$$w_i = \frac{z}{1-z} \quad \Leftrightarrow \quad -2i = \frac{z}{1-z}$$

Resolvemos,

$$\Leftrightarrow \quad -2i = \frac{z}{1-z} \quad \Leftrightarrow \quad -2i \cdot (1-z) = z \quad \Leftrightarrow \quad -2i + 2zi = z \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2zi - z = 2i \quad \Leftrightarrow \quad z \cdot (2i - 1) = 2i \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2i}{2i-1}$$

Para expresarlo en forma binómica, multiplicamos en numerador y denominador por el complejo $2i + 1$,

$$z = \frac{2i}{2i-1} = \frac{2i \cdot (2i+1)}{(2i-1) \cdot (2i+1)} = \frac{2i \cdot (2i+1)}{(2i)^2 - 1^2} = \frac{(2i)^2 + 2i}{-4-1} = \frac{-4+2i}{-5} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} \cdot i$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos] **(Matemáticas NS, Mayo 2018, P1, ej.7)**

2. (a) Resuelva la siguiente ecuación bicuadrada aportando todas las soluciones complejas, (1,5 puntos)

$$z^4 + (4-i)z^2 - 4i = 0$$

(b) Calcule en forma polar, dando el resultado en forma binómica, (1 punto)

$$\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}} \cdot \left(\frac{3_{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{3}_{\frac{\pi}{3}}} \right)^2$$

(a) Resuelva la siguiente ecuación bicuadrada aportando todas las soluciones en el plano complejo,

$$\boldsymbol{z^4 + (4-i)z^2 - 4i = 0}$$

Se trata de una ecuación bicuadrada donde, si hacemos el cambio $w = z^2$, tendremos que,

$$z^4 + (4-i)z^2 - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w^2 + (4-i)w - 4i = 0$$

Resolvemos mediante la fórmula de la ecuación polinómica de segundo grado,

$$w^2 + (4-i)w - 4i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{-(4-i) \pm \sqrt{(4-i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4i)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{-(4-i) \pm \sqrt{4^2 + i^2 - 8i + 16i}}{2} = \frac{-(4-i) \pm \sqrt{4^2 + i^2 + 8i}}{2} =$$

$$\frac{-(4-i) \pm \sqrt{(4+i)^2}}{2} = \frac{-(4-i) \pm (4+i)}{2} = \begin{cases} w_1 = \dfrac{-(4-i) + (4+i)}{2} = i \\ w_2 = \dfrac{-(4-i) - (4+i)}{2} = -4 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio,

- Si $w = i$ entonces,

  $$z^2 = i \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{i}$$

  Por lo tanto, aplicando la $fórmula\ de\ Moivre$,

  $$z = \sqrt{1_{90°}} = \sqrt{1} \cdot \left(\cos\left(\frac{90° + 360° \cdot k}{2} \right) + \operatorname{sen}\left(\frac{90° + 360° \cdot k}{2} \right) \right), \quad k \in \{0,1\}$$

  - Para $k = 0$, $z_0 = \cos 45° + i \cdot sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$

  - Para $k = 1$, $z_1 = \cos 225° + i \cdot sen\ 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$

- Si $w = -4$ entonces,

  $$z^2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt{-4} = \begin{cases} z_3 = +2 \\ z_4 = -2i \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones son $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i, z' = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i\ , z'' = 2i\ \ y\ \ z''' = -2i$

(b) Calcule en forma polar, dando el resultado en forma binómica,

$$\sqrt{\mathbf{12}}_{-\frac{\pi}{6}} \cdot \left(\frac{\mathbf{3}_{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\mathbf{3}}_{\frac{\pi}{3}}} \right)^{\mathbf{2}}$$

Solución,

$$\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}} \cdot \left(\frac{3_{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{3}_{\frac{\pi}{3}}} \right)^2 = \sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{3}}_{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}} \right)^2 = \sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}} \cdot \left(\sqrt{3}_{-\frac{\pi}{12}} \right)^2 =$$

$$= \sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}} \cdot 3_{-\frac{2\pi}{12}} =$$

$$= \sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}} \cdot 3_{-\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{12}_{-\frac{2\pi}{6}} = 3\sqrt{12}_{-\frac{\pi}{3}} =$$

$$= 3\sqrt{12} \cdot \left(cos\ \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \cdot sen \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) =$$

$$3\sqrt{12} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right) = 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right) =$$

$$= 6\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right) = 3\sqrt{3} - 9i$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

3. El triángulo ABC tiene por vértices $A=(a^2-1,-2)$, $B(-4,5)\ y\ C(2{,}3c)$ con $a,c\in\mathbb{R}$. Si el baricentro del triángulo ABC es $P(-1,2)$

a) Calcule los valores $a\ y\ c$. (0,5 puntos)

b) Calcule la longitud del radio de la circunferencia que circunscribe al triángulo ABC si $A(-1,-2)$, $B(-4,5)\ y\ C(2{,}3)$. (2 puntos)

a) Calcule los valores $a\ y\ c$.

Como el baricentro se puede calcular a partir de la fórmula,

$$P=\frac{A+B+C}{3}$$

Entonces,

$$(-1,2)=\frac{(a^2-1,-2)+(-4{,}5)+(2{,}3c)}{3}\ \Leftrightarrow\ (-1,2)=\left(\frac{a^2-3}{3},\frac{3+3c}{3}\right)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (-3,6)=(a^2-3{,}3+3c)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}-3=a^2-3\\ 6=3+3c\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}0=a^2\\ 3=3c\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}0=a\\ 1=c\end{cases}$$

Por lo tanto, los vértices del triángulo son ABC son $A(-1,-2)$, $B(-4,5)\ y\ C(2{,}3)$

b) Calcule la longitud de la circunferencia que circunscribe al triángulo ABC.

Calcularemos el circuncentro para luego calcular el radio a partir de la distancia de dicho punto a cualquiera de los vértices.

Para ello, primero calculo la ecuación de la mediatriz m_{BC} que pasa por el punto medio del segmento BC.

Las coordenadas del punto medio del segmento BC son,

$$M_{BC}=\frac{B+C}{2}=\frac{(-4,5)+(2,3)}{2}=(-1{,}4)$$

Ahora calculo un vector director de la recta BC según,

$$\vec{v}_{BC}=\overrightarrow{BC}=C-B=(2,3)-(-4{,}5)=(6,-2)$$

Por tanto, un vector director de la mediatriz m_{BC} es cualquiera que sea perpendicular al vector $\vec{v}_{BC}$. Por lo tanto, un vector director de la mediatriz es

$$\vec{v}_{m_{BC}}=(1,3)$$

Una ecuación continua de la recta mediatriz m_{BC} es,

$$m_{BC} \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{3}$$

Y una ecuación general de la mediana m_{BC} es,

$$m_{BC} \equiv 3x+3 = y-4 \iff 3x-y=-7$$

Calculo ahora la ecuación de la mediatriz m_{AB} que pasa por el punto medio del segmento AB.

Las coordenadas del punto medio del segmento AB son,

$$M_{AB} = \frac{A+B}{2} = \frac{(-1,-2)+(-4,5)}{2} = \left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Ahora calculo un vector director de la recta AB según,

$$\vec{v}_{AB} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-4,5) - (-1,-2) = (-3,7)$$

Por tanto, un vector director de la mediatriz m_{AB} es cualquiera que sea perpendicular al vector $\vec{v}_{AB}$. Por lo tanto, un vector director de la mediatriz es

$$\vec{v}_{m_{AB}} = (7,3)$$

Una ecuación paramétrica de la recta mediatriz m_{AB} es,

$$m_{AB} \equiv \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} + 7t \\ y = \dfrac{3}{2} + 3t \end{cases}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Calculamos el Circuncentro P del triángulo ABC, que es el punto de corte de las tres mediatrices, sustituyendo las paramétricas de la mediatriz m_{AB} en la ecuación general de la mediatriz m_{BC}.

$$3 \cdot \left(-\frac{5}{2} + 7t\right) - \left(\frac{3}{2} + 3t\right) = -7 \iff -\frac{15}{2} + 21t - \frac{3}{2} - 3t = -7 \iff$$

$$\iff 18t = 2 \iff t = \frac{2}{18} \iff t = \frac{1}{9}$$

Por lo tanto, el Circuncentro P del triángulo ABC tiene por coordenadas,

$$P = \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} + 7 \cdot \dfrac{1}{9} = -\dfrac{31}{18} \\ y = \dfrac{3}{2} + 3 \cdot \dfrac{1}{9} = \dfrac{11}{6} \end{cases} \iff P\left(-\frac{31}{18}, \frac{11}{6}\right)$$

Por lo tanto, el radio de la circunferencia que circunscribe al triángulo ABC es,

$$d(P,A) = \left|\overrightarrow{PA}\right| = \sqrt{\left(-1 + \frac{31}{18}\right)^2 + \left(-2 - \frac{11}{6}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{18}\right)^2 + \left(-\frac{23}{6}\right)^2} \approx 3{,}901\ u$$

[Puntuación máxima: 3,5 puntos]

4. Dado el punto $A(1,2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 0 + 3t \end{cases}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ resuelva las siguientes cuestiones,

(a) Calcule una ecuación general de la recta paralela a la recta r que pasa por el punto A. (0,5 puntos)

(b) Calcule el punto simétrico A' del punto A respecto de la recta r. (1 punto)

(c) Calcule los dos puntos P de la recta r de tal modo que la recta que pasa por los puntos P y A forman un ángulo de $60°$ con la recta r. (1 punto)

(d) Calcule la ecuación general de las dos rectas r' que distan $\sqrt{40}$ unidades de la recta r. (1 punto)

(a) Calcule una ecuación general de la recta paralela a la recta r que pasa por el punto A.

Un vector director de cualquier recta paralela a la recta r, es,

$$\vec{v} = (-1,3)$$

Por lo tanto, una ecuación continua de la recta s que pasa por A y es paralela a r es,

$$s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3}$$

Y una ecuación general de la recta s que pasa por A y es paralela a r es,

$$s \equiv 3x - 3 = -y + 2 \quad \Leftrightarrow \quad s \equiv 3x + y = 5$$

(b) Calcule el punto simétrico A´ del punto A respecto de la recta r.

Un vector normal de cualquier recta perpendicular a la recta r, es,

$$\vec{n} = (3,1)$$

Por lo tanto, una ecuación continua de la recta w que pasa por A y es perpendicular a r es,

$$s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1}$$

Y una ecuación general de la recta s que pasa por A y es paralela a r es,

$$w \equiv x - 1 = 3y - 6 \quad \Leftrightarrow \quad w \equiv x - 3y = -5$$

El punto Q de intersección de la recta r y la recta w se calcula sustituyendo las paramétricas de la recta r en la ecuación general de la recta w

$$2 - t - 3 \cdot (3t) = -5 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - t - 9t = -5 \quad \Leftrightarrow \quad -10t = -7 \quad \Leftrightarrow \quad t = 0{,}7$$

Por lo tanto, el punto de intersección Q es,

$$Q \equiv \begin{cases} x = 2 - \ \ 0{,}7 = 1{,}3 \\ y = 0 + 3 \cdot 0{,}7 = 2{,}1 \end{cases}$$

Como el punto Q es el punto medio de los puntos A y su simétrico A´ entonces

$$Q = \frac{A + A´}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2Q = A + A´ \quad \Leftrightarrow \quad A´ = 2Q - A = 2 \cdot (1´3{,}2´1) - (1{,}2) = (1´6, 2´2)$$

Por lo tanto, el punto simétrico del punto A respecto de la recta r es,

$$Q(1´6, 2´2)$$

(c) Calcule los dos puntos P de la recta r de tal modo que la recta que pasa por los puntos P y A forman un ángulo de $60°$ con la recta r.

Un vector director de la recta r es $\vec{v} = (-1{,}3)$ y un punto P de la recta r viene determinado por las paramétricas $P(2 - \ \ t, 3t)$.

Un vector formado por los puntos P y A viene dado por,

$$\overrightarrow{PA} = (2 - t - 1, 3t - 2) = (1 - t, 3t - 2)$$

Si el ángulo que forman las rectas r y la que forman los puntos P y A es de 60º entonces,

$$\cos 60° = \frac{|\vec{v} \cdot \overrightarrow{PA}|}{|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{PA}|}$$

Por lo tanto,

$$\cos 60° = \frac{|\vec{v} \cdot \overrightarrow{PA}|}{|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{PA}|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{|-1 \cdot (1 - t) + 3 \cdot (3t - 2)|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(1 - t)^2 + (3t - 2)^2}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|-1 + t + 9t - 6|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{1 + t^2 - 2t + 9t^2 + 4 - 12t}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{|10t - 7|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10t^2 + 5 - 14t}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{10} \cdot \sqrt{10t^2 + 5 - 14t} = 2 \cdot |10t - 7|$$

Elevamos al cuadrado,

$$10 \cdot (10t^2 + 5 - 14t) = 4 \cdot (10t - 7)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 100t^2 + 50 - 140t = 400t^2 + 196 - 560t$$

$$\Leftrightarrow \quad 300t^2 - 420t + 146 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 150t^2 - 210t + 73 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad t=\frac{+210\pm\sqrt{(-210)^2-4\cdot 150\cdot 73}}{2\cdot 150}=\frac{+210\pm\sqrt{300}}{300}=\frac{+21\pm\sqrt{3}}{30}=\begin{cases} t_1 = 0'7577 \\ t_2 = 0'6423 \end{cases}$$

Por lo tanto, los puntos P de la recta r de tal modo que la recta que pasa por los puntos $P\ y\ A$ forman un ángulo de 30° con la recta r son,

$$P_1=(2-0'7577, 3\cdot 0'7577)=(1'242, 2'273)$$

$$P_2=(2-0'6423, 3\cdot 0'6423)=(1'358, 1'927)$$

(d) Calcule la ecuación general de las dos rectas r' que distan $\sqrt{40}$ unidades de la recta r.

Sean las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular s a la recta r,

$$s\equiv\begin{cases} x=2+3t \\ y=0+\ \ t \end{cases},\ \ \forall\, t\in\mathbb{R}$$

En tal caso, un punto Q de la recta s vendrá dado por,

$$Q(2+3t, t)$$

La distancia entre el punto $R(2,0)\in r$ y el punto P es,

$$d(R,Q)=\left|\overrightarrow{RQ}\right|=\sqrt{(2+3t-2)^2+(t-0)^2}=\sqrt{10t^2}$$

Por lo tanto, si la distancia entre las rectas debe ser $\sqrt{40}$, tendremos que

$$d(r,r')=d(R,Q)\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{40}=\sqrt{10t^2}\quad\Leftrightarrow\quad 40=10\mathrm{t}^2\Leftrightarrow\quad 4=\mathrm{t}^2\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{t}=\pm 2$$

Los puntos Q son entonces,

$$Q_1(2+3\cdot 2, 2)=Q_1(8,2)\qquad , \qquad Q_2(2-3\cdot 2, -2)=Q_2(-4,-2)$$

En tal caso, las dos rectas pedidas son:

- la recta paralela a la recta r que dista de ella $\sqrt{40}$ unidades es la que pasa por el punto Q_1 y tiene ecuación continua,

$$r'_1\equiv\frac{x-8}{-1}=\frac{y-2}{3}\quad\Leftrightarrow\quad r'_1\equiv 3x-24=-y+2\quad\Leftrightarrow\quad r'_1\equiv 3x+y=26$$

- la recta paralela a la recta r que dista de ella $\sqrt{40}$ unidades es la que pasa por el punto Q_2 y tiene ecuación continua,

$$r'_2\equiv\frac{x+4}{-1}=\frac{y+2}{3}\quad\Leftrightarrow\quad r'_2\equiv 3x+12=-y-2\quad\Leftrightarrow\quad r'_2\equiv 3x+y=-14$$