A. CÁLCULO DE LA FUNCIÓN DERIVADA

2.1. Calcula la función derivada de cada función con la definición de derivada.

$a)\ a(x) = 4$ $\quad b)\ b(x) = 2x$ $\quad c)\ c(x) = 1 - 3x$

$d)\ d(x) = 4x^2$ $\quad e)\ e(x) = 1 - x^2$ $\quad f)\ f(x) = x^3$

2.2. Deriva las siguientes funciones polinómicas,

$a)\ a(x) = 5x + 1$ $\quad b)\ b(x) = 2 - 4x^2$ $\quad c)\ c(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

$d)\ d(x) = -4x^2 + 3x - 1$ $\quad e)\ e(x) = 2x^9 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{2x^3}{5} - 4$ $\quad f)\ f(x) = 1 - \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x$

$g)\ g(x) = \frac{2x^3 - x + 1}{5}$ $\quad h)\ h(x) = -x^7 + \frac{4x^3}{6} - 2x^5 - 3x$ $\quad i)\ i(x) = 2 + \frac{2x^4 - x^2 + 1}{6}$

2.3. Deriva las siguientes funciones producto y cociente de polinomios sobre su dominio,

$a)\ a(x) = (2x - 1) \cdot (3x^2 + 2x)$ $\quad b)\ b(x) = (3x + 3x^2) \cdot (4x^2 - x)$ $\quad c)\ c(x) = (x + 1) \cdot (x^3 + x^2 - 1)$

$d)\ d(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$ $\quad e)\ e(x) = \frac{x^2}{2x - 3}$ $\quad f)\ f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{4x^2 + x - 1}$

$g)\ g(x) = (x^2 - x) \cdot \frac{x}{x + 1}$ $\quad h)\ h(x) = \frac{4}{2 - 3x^5 - x}$ $\quad i)\ i(x) = \frac{(x + 2) \cdot (x^2 - 1)}{x^2 + 1}$

2.4. Deriva las siguientes funciones potenciales o composición con funciones potenciales sobre su dominio,

$a)\ a(x) = (2x^3 + 2x - 1)^7$ $\quad b)\ b(x) = (3x + 3x^2 + 1)^4$ $\quad c)\ c(x) = (x^3 + x^2 - 1)^{-6}$

$d)\ d(x) = \frac{(2x^3 - 3x)^4}{x - 2}$ $\quad e)\ e(x) = \left(\frac{3x^2}{2x - 1}\right)^3$ $\quad f)\ f(x) = \frac{x^2 - x}{(x - 1)^3}$

$g)\ g(x) = \left(\frac{x}{x + 1}\right)^{-2}$ $\quad h)\ h(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x - 2)^{-2}}$ $\quad i)\ i(x) = \frac{(2x - 1)^3}{(x^3 - 1)^2}$

2.5. Deriva las siguientes funciones con radicales o irracionales transformándolas en racionales sobre su dominio,

$a)\ a(x)=\sqrt{2x^3-3x+2}$ $\quad b)\ b(x)=\sqrt[3]{3x^2-x+1}$ $\quad c)\ c(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x}{x^2-1}}$

$d)\ d(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+2x^3}}{x^3+4}$ $\quad e)\ e(x)=(x^3+2x)\cdot\sqrt{2x+1}$ $\quad f)\ f(x)=\dfrac{x^3+x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

$g)\ g(x)=\sqrt{\dfrac{2x^4-x}{x+2}}$ $\quad h)\ h(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x^4+x}}$ $\quad i)\ i(x)=\dfrac{\sqrt[4]{2x^3+1}}{x^2}$

2.6. Deriva las siguientes funciones exponenciales o composición con funciones exponenciales sobre su dominio,

$a)\ a(x)=3^{2x^2+1}$ $\quad b)\ b(x)=e^{\,x/x^2-1}$ $\quad c)\ c(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$

$d)\ d(x)=\left(\dfrac{5}{4}\right)^{2x^2-x}$ $\quad e)\ e(x)=5^{\sqrt{x}}$ $\quad f)\ f(x)=\dfrac{x-1}{2^{1/x}}$

$g)\ g(x)=\sqrt{\dfrac{e^{x^2}+1}{2x}}$ $\quad h)\ h(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{3^{x^2+1}-x}}$ $\quad i)\ i(x)=\left(2x-e^{x^3-x}\right)\cdot e^{\frac{4x^2}{x-2}}$

2.7. Deriva las siguientes funciones logarítmicas o composición con funciones logarítmicas, sobre su dominio.

$a)\ a(x)=\ln(x^2+1)$ $\quad b)\ b(x)=log_3(x^3-2x+2)$ $\quad c)\ c(x)=log_5\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)$

$d)\ d(x)=\sqrt{x}\cdot\ln\left(2^{x^3}-x\right)$ $\quad e)\ e(x)=\dfrac{\ln(x^2-1)}{3x+2}$ $\quad f)\ f(x)=(2x+1)\cdot\log\left(\dfrac{x^2+3}{3^{x+2}}\right)$

$g)\ g(x)=\dfrac{x}{\ln\sqrt[3]{2-3x^2}}$ $\quad h)\ h(x)=\dfrac{\log(x^2+2x)}{e^{2x^2-1}}$ $\quad i)\ i(x)=\ln\left(2x-e^{x^3-x}\right)\cdot e^{\frac{x^2}{x+1}}$

2.8. Deriva las siguientes funciones trigonométricas o composición con funciones trigonométricas, sobre su dominio.

$a)\ a(x)=sen(2x+1)$ $\quad b)\ b(x)=\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$ $\quad c)\ c(x)=\tan(1+x^2)$

$d)\ d(x)=\dfrac{sen\ 2x}{4x^2}$ $\quad e)\ e(x)=\dfrac{e^{2x+3}-1}{sen\ 3x}$ $\quad f)\ f(x)=x^2\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$g)\ g(x)=\cos x\cdot sen\ x$ $\quad h)\ h(x)=\dfrac{\tan x^2}{\sqrt{x}}$ $\quad i)\ i(x)=\dfrac{\ln\left(sen(2x^2)\right)}{\cos(x^3)}$

2.9. Deriva las siguientes funciones arco o composición con funciones arco, sobre su dominio.

$a)\ a(x) = arcsen(x^2)$ $\quad b)\ b(x) = \dfrac{\arccos(x)}{x}$ $\quad c)\ c(x) = x \cdot arctan(x^3)$

$d)\ d(x) = \arctan(\sqrt{x})$ $\quad e)\ e(x) = arcsen(e^{x^2})$ $\quad f)\ f(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$g)\ g(x) = arcsen(sen(x))$ $\quad h)\ h(x) = \arctan^2\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ $\quad i)\ i(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\arccos(x)}$

B. DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIO-EXPONENCIAL

2.11. Calcula la función derivada de las siguientes funciones,

$a)\ f(x) = (4+x)^{x^2-1}$ $\quad b)\ g(x) = x^{4x+3}$ $\quad c)\ h(x) = x \cdot e^{\sqrt{x}}$

$d)\ i(x) = sen\, x^{\cos 3x}$ $\quad e)\ j(x) = [\ln(2x)]^{sen\, x}$ $\quad f)\ k(x) = \sqrt[3x]{\cos 2x}$

2.12. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^x$ en $x = 1$.

2.13. Calcula la ecuación de la recta normal a la función $g(x) = \sqrt[x]{x+2}$ en $x = 2$.

2.14. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función $h(x) = x^{\arctan x}$ en $x = 1$.

C. ECUACIÓN RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL

2.21. Calcula la ecuación de la recta tangente y la recta normal a cada una de las siguientes funciones en los valores que se indican.

$a)\ f(x) = (x^2-1)^3\ en\ x = -1$ $\quad b)\ g(x) = \ln(3x^2+1)\ en\ x = 0$

$c)\ h(x) = 2^{x^2-4}\ en\ x = 2$ $\quad d)\ i(x) = arcsen(x^2)\ en\ x = 1$

$e)\ j(x) = x \cdot \ln x\ en\ x = e$ $\quad f)\ k(x) = \frac{x}{sen\, x}\ en\ x = \frac{\pi}{4}$

2.22. Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función: $f(x) = |x^2 - 9|$ en el punto de abcisa $x = 2$.

2.23. Hallar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función: $f(x) = \frac{x-2}{|x|}$ en el punto de abcisa $x = -4$.

2.24. En qué valor real "a", la recta tangente a $f(x) = \frac{ax+1}{x^2}$ es paralela a $y = x + 2$

2.25. Halla la recta tangente a la curva $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.

2.26. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $y = \frac{x-4}{x+2}$ que son paralelas a la recta $6x - y + 5 = 0.$

2.27. Dada la función $y = x^2 - x$, halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente sea $5/4$.

2.28. Halla los puntos de la curva $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$ en los que la recta tangente a ella pase por el punto $(0, -8)$. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes en dichos puntos.

2.29. Sea la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 - x + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 2)$ y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

2.30. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 16 - x^2 & si\ x \leq 2 \\ x^2 & si\ 2 < x \end{cases}$. Calcular la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 1$.

2.31. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{x} & si\ x < 1 \\ cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & si\ 1 \leq x \end{cases}$. Calcular la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 2$.

2.32. Sea la función $f(x) = \frac{2x}{x+5}$. Determinar los valores de a y b para que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto $x = -3$ sea $y = ax + b$.

2.33. Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = ax^2 - b$ en el punto (1,5) sea la recta $y = 3x + 2$.

C. REGLA DE L´HÔPITAL

2.41. Calcular aplicando la $regla\ de\ L'Hôpital$,

$a)\ \lim_{x \to 0} \frac{cos\,3x + 4x - 1}{3x}$ $\quad b)\ \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - cos2x}$ $\quad c)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,x}{x^2}$

$d)\ \lim_{x \to 1} \frac{ln(2x^2 - 1)}{tg(x - 1)}$ $\quad e)\ \lim_{x \to 0} \frac{x - senx}{x^3}$ $\quad f)\ \lim_{x \to 1} \frac{1 - cos(x - 1)}{(ln\,x)^2}$

$g)\ \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$ $\quad h)\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(x + 1)} - \frac{1}{x}\right)$ $\quad i)\ \lim_{x \to 0} \frac{cos^2 x - 1}{x^2}$

2.42. Calcular aplicando la $regla\ de\ L'Hôpital$,

$a)\ \lim_{x \to 0} (cos2x)^{\frac{3}{x^2}}$ $\quad b)\ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/\ln(x)}$ $\quad c)\ \lim_{x \to 0} x^{sen\,x}$

$d)\ \lim_{x \to \infty} (1+2x^3)^{\frac{1}{4+lnx}}$ $\quad e)\ \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{1/x}$ $\quad f)\ \lim_{x \to +\infty} \sqrt[x]{x}$

$g)\ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{e^x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\quad h)\ \lim_{x \to 0} (x \cdot lnx)$ $\quad i)\ \lim_{x \to 0^+} (\ln(x+1))^{\frac{1}{\ln(x)}}$

$j)\ \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad k)\ \lim_{x \to +\infty} (e^x+1)^{1/\ln x}$ $\quad l)\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2-x}{x^2}\right)^{lnx}$

D. TEOREMA DE BOLZANO

2.51. Sea la función $f(x) = \frac{e^x-4}{x}$. Probar que existe una raíz de la función $f(x)$ en el intervalo $[1,2]$ aplicando el teorema de Bolzano.

2.52. Sea la función $f(x) = \ln(x+1) - 2$. Probar que existe una raíz de la función $f(x)$ en el intervalo $[0,7]$ aplicando el teorema de Bolzano.

2.53. Sea la función $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$. Probar que existe una raíz de la función $f(x)$ en el intervalo $[0{'}5, e]$ aplicando el teorema de Bolzano.

2.54. Demostrar que la función $f(x) = sen\,x + \cos x$ tiene alguna raíz real negativa en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ mediante el teorema de Bolzano. Resuelve después la ecuación calculando dicha raíz.

2.55. Sea la función $f(x) = sen\,x - 2x^3$. Probar que existe una raíz positiva de la función $f(x)$ buscando el intervalo de longitud mínima y extremos naturales, aplicando el teorema de Bolzano.

2.56. Sea la función $f(x) = \sqrt{x} - \frac{2x}{5}$. Probar que existe una raíz positiva de la función $f(x)$ buscando el intervalo de longitud mínima y extremos naturales, aplicando el teorema de Bolzano.

2.57. Dado el polinomio $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 1$, demuestra que tiene al menos una raíz positiva.

2.58. Dada la función $g(x) = \frac{2e^x - 8x - 3}{x^2+2}$, demuestra que tiene al menos un corte con el eje OX.

2.59. Dada la función $f(x) = x^3 - e^x$, demostrar que existen al menos dos valores x_0 y x_1 para los que la función toma la imagen $y = 4$ localizándolos en sendos intervalos (a, b) con $a, b \in \mathbb{Z}$ de mínima amplitud donde esté dicho punto.

2.60. Probar que la ecuación $x = cos\,x$ tiene solución positiva encontrando el intervalo de longitud mínima y extremos enteros que la contiene.

2.61. Sea la función $f(x) = e^x - x$. Probar que existe un valor en el que la función toma el valor $y = 4$ buscando el intervalo de longitud mínima y extremos naturales, aplicando el teorema de Bolzano.

2.62. Sea la función $f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}$. Probar que existe un valor en el que la función toma el valor $y = 1$ buscando el intervalo de longitud mínima y extremos naturales, aplicando el teorema de Bolzano.

2.63. Sea la función $f(x) = \sqrt{x} - x^2$. Probar que existe un valor en el que la función toma el valor $y = -4$ buscando el intervalo de longitud mínima y extremos naturales, aplicando el teorema de Bolzano.

2.64. Dadas las funciones Dadas las funciones $f(x) = x \cdot sen\,x$ y $g(x) = ln\,x$ justifica que existe un punto del intervalo $[2, 3]$ donde ambas funciones toman el mismo valor.

2.65. Probar que la funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = sen\,x$ se cortan en al menos un valor, encontrando el intervalo de extremos enteros consecutivos donde está incluido ese valor.

2.66. Demostrar que las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = 1/x$ se cortan en algún punto $x > 0$.

2.67. Demostrar que las funciones $f(x) = ln\,x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto y localizándolo en el intervalo (a, b) con $a, b \in \mathbb{Z}$ de mínima amplitud donde esté dicho punto.

2.68. Aplica el teorema de Bolzano para demostrar que la ecuación

$$2^{x-1} = 1 + (1 + x)^2$$

tiene al menos una solución, determinando el intervalo (a, b) con $a, b \in \mathbb{Z}$ de mínima amplitud donde está dicha solución.

2.69. Aplica el teorema de Bolzano para demostrar que la ecuación

$$e^x - \pi = \sqrt{x}$$

tiene al menos una solución, determinando el intervalo (a, b) con $a, b \in \mathbb{Z}$ de mínima amplitud donde está dicha solución.

E. CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

2.71. Sea la función $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} & \mathrm{si\ x} \leq 1 \\ \mathrm{x} - 2 & \mathrm{si}\ 1 < x \end{cases}$. Estudiar la derivabilidad en $x = 1$.

2.72. Se considera la función definida por $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \mathrm{e^x} - 1 & \mathrm{si\ x} \leq 0 \\ \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} & \mathrm{si}\ 0 < x \end{cases}$. Estudiar la derivabilidad de la función en $x = 0$.

2.73. Sea la función $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} (\mathrm{x} - 1)^2 & \mathrm{si\ x} \leq 1 \\ (x - 1)^3 & \mathrm{si}\ 1 < x \end{cases}$.

a) Estudiar su continuidad en el intervalo $[-4,4]$

b) Analice su derivabilidad y su crecimiento en $[-4,4]$

c) Determine la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y derivable en $x = 1$.

2.74. Sea la función $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} e^x & si\ x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & si\ 0 \leq x \leq 2 \\ x & si\ 2 < x \end{cases}$.

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en $\mathbb{R}$.

b) Clasificar sus discontinuidades.

2.74. Sea la función $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & si\ x < 0 \\ be^x & si\ x \geq 0 \end{cases}$. Calcular los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.

2.75. Sea la función $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} sen\ x & si\ x \leq 0 \\ ax + b & si\ x > 0 \end{cases}$. Calcular los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

2.76. Sea la función $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} ax^2 + 1 & si\ x < 1 \\ x^2 + bx + 3 + b & si\ x \geq 1 \end{cases}$. Calcular los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 1$.

2.77. Sea la función $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} ax^2 + 3x & si\ x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & si\ x > 2 \end{cases}$. Calcular los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 2$.

2.78. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones,

$a)\ f(x)=|x-1|$ $\quad b)\ g(x)=|4-3x|$ $\quad c)\ h(x)=|2x-x^2|$

$d)\ i(x)=|x^2+6x+8|$ $\quad e)\ j(x)=\dfrac{|2x-1|}{x+2}$ $\quad f)\ k(x)=\dfrac{|x^2-1|}{|x|}$

$g)\ j(x)=\left|\dfrac{x}{2x+3}\right|$ $\quad h)\ k(x)=\dfrac{|x^2-1|}{|x-2|+1}$ $\quad i)\ l(x)=\dfrac{|x^2-x|}{1-|x|}$

2.79. Sea la función definida por $f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\le x \end{cases}$. Calcular los valores de a y b para que la función sea derivable en $x=0$.

2.80. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x<0 \\ xe^x & \text{si } 0\le x \end{cases}$,

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi,2)$. Demuestre que existe un punto $x_0\in[0,1]$ de manera que $f(x_0)=2$.

2.81. Sea la función definida por $f(x)=\begin{cases} x^3-x & \text{si } x<0 \\ ax+b & \text{si } 0\le x \end{cases}$. Calcular los valores de a y b para que la función sea derivable en $x=0$.

2.82. Sea la función definida por $f(x)=\frac{|x^2-x-2|}{x^2+2x+1}$.

a) Calcular sus asíntotas.

b) Calcular sus intervalos de crecimiento/decrecimiento y, si existen, sus extremos relativos.

2.83. Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^3\cdot e^{-1/x^{\wedge}2} & \text{si } x\ne 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$,

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x=0$.

b) Estudie si $f(x)$ presenta simetría par o impar.

2.84. Sea la función definida por $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2+a & \text{si } x<1 \\ x^3-2bx & \text{si } 1\le x \end{cases}$. Calcular los valores de a y b para que la función sea derivable en $x=1$.

2.85. Dada la función $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-9}}$, se pide,

a) Estudie el dominio, continuidad y derivabilidad de la función $f(x)$.

b) Estudie las asíntotas de $f(x)$.

c) Estudie si $f(x)$ presenta simetría par o impar.

2.86. Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & \text{si } x\le 1 \\ \ln x & \text{si } 1<x \end{cases}$. Calcular los valores de a y b para que la función sea derivable en $x=1$.

2.87. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x\le 0 \\ -x^2+bx+c & \text{si } 0<x \end{cases}$. Calcular los valores de b y c para que la función sea derivable en $x=0$.

2.88. Estudiar para qué valores de a y b la siguiente función sea continua. Para esos valores, ¿dónde es derivable?

$$f(x)=\begin{cases} bx^2+ax & \text{si } x\le -1 \\ \dfrac{a}{x+2} & \text{si } -1<x\le 1 \\ \dfrac{x^2+ax+1}{x+1} & \text{si } 1<x \end{cases}$$

2.89. Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x<0 \\ ax^2+bx+c & \text{si } 0\le x\le 3 \\ 3-x & \text{si } 3<x \end{cases}$$

a) Calcúlense a, b y c para que la función f sea continua en todos los puntos y derivable en $x=0$.

b) Para $a=0$, calcúlense b y c para que la función f sea continua en todos los puntos.

F. SIMETRÍAS PAR E IMPAR.

2.91. Comprueba si las siguientes funciones presentan simetría par o impar.

$a)\ f(x)=\sqrt{1+x^2}$ $\quad b)\ g(x)=sen(2x)$ $\quad c)\ h(x)=\dfrac{x}{\ln|x|}$ $\quad d)\ i(x)=\dfrac{3x^5}{3x^3-2x}$

$e)\ j(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$ $\quad f)\ k(x)=x\cdot e^{-x^2}$ $\quad g)\ l(x)=\dfrac{\tan(x)}{x}$ $\quad h)\ m(x)=x\cdot\cos x$

G. ESTUDIO MONOTONÍA Y CURVATURA DE UNA FUNCIÓN. EXTREMOS RELATIVOS.

2.101. Estudiar los extremos relativos y la monotonía de las siguientes funciones

$a)\ f(x)=x^3-12x$ $\quad b)\ g(x)=\dfrac{x^2-6x+5}{x-3}$ $\quad c)\ h(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ $\quad d)\ i(x)=\dfrac{x^2}{2x-2}$

$e)\ j(x)=x^3-3x+2$ $\quad f)\ g(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ $\quad g)\ g(x)=x^3$ $\quad h)\ h(x)=x^4-2x^3$

2.102. Halla los extremos, si los tiene, de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

2.103. Estudiar las asíntotas, extremos relativos y la monotonía de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

2.104. Estudia el dominio y la monotonía de la función $f(x) = \sqrt{x-3}$

2.105. Estudia el dominio, los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$a)\quad f(x) = x^4 - 6x^2$ $\qquad b)\quad g(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$ $\qquad c)\quad h(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$

$d)\quad i(x) = \dfrac{4x}{x^2+4}$ $\qquad e)\quad j(x) = x^4 - 12x$ $\qquad f)\quad k(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

2.106. Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide,

a) Determinar su dominio.

b) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) Calcular los límites laterales

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} \quad y \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$$

2.107. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$, se pide,

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular las asíntotas de la función.

c) Calcular los puntos de corte con los ejes de la función.

d) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

e) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

f) Representar la función.

2.108. Dada la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 9$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular los puntos de corte con los ejes de la función.

c) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

d) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

e) Representar la función.

2.109. Dada la función $f(x) = \mathrm{x} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$, se pide,

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular los puntos de corte con los ejes de la función.

c) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

d) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

e) Representar la función.

2.110. Sea la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular los puntos de corte con los ejes de la función.

c) Calcular las asíntotas de la función

d) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

e) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

f) Representar la función.

2.111. Sea la función $f(x) = e^{-x} \cdot senx$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular los puntos de corte con los ejes de la función.

c) Calcular las asíntotas de la función

d) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

e) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

f) Representar la función.

2.112. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular las asíntotas de la función.

c) Calcular los puntos de corte con los ejes de la función.

d) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

e) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

f) Representar la función.

2.113. Dada la función $f(x) = \sqrt{4 + x^2 + 5x}$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular los puntos de corte con los ejes de la función.

c) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

d) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

e) Representar la función.

2.114. Dada la función $f(x) = e^{-x} \cdot sen(x)$ en el semieje positivo real. Se pide:

a) Calcular los puntos de corte con los ejes de la función.

b) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

c) Representar la función.

2.115. Dada la función $f(x) = x \cdot \ln(x)$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular los puntos de corte con los ejes de la función.

c) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

d) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

e) Representar la función.

2.116. Dada la función $f(x) = \frac{|x-1|}{x}$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular las asíntotas de la función.

c) Calcular los puntos de corte de la función.

d) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

e) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

f) Representar la función.

2.117. Dada la función $f(x) = \left|\frac{x^2+2}{x^2-4}\right|$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función y las asíntotas de la función.

c) Calcular los puntos de corte de la función.

d) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

e) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

f) Representar la función.

2.118. Dada la función $f(x)=\frac{|x|}{|x+1|-1}$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular las asíntotas de la función.

c) Calcular los puntos de corte de la función.

d) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

e) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

f) Representar la función.

H. APLICACIONES DE LA DERIVADA EN CONTEXTOS REALES

2.121. El número de visitantes diarios a una feria de turismo viene dado por la función $V(t)=-30\cdot(t^2-14t-11)$ donde $t\in[0,10]$ es el tiempo (en horas) transcurrido desde la apertura de la feria. Se pide:

a)¿Cuándo aumenta la afluencia de público y cuándo disminuye? ¿En qué momento se alcanza el número máximo de visitantes?

b) Determina ese número máximo de visitantes.

2.122. El consumo de agua en un IES en la jornada de mañana (entre las 8:45 y las 14:45) viene dado por la función $C(t)=-0{,}05t^2+0{,}3t$ tal que $0\le t\le 6$ en donde t es el tiempo en horas a contar desde la apertura del centro y $C(t)$ es el consumo de agua en m^3. Se pide:

a) ¿Cuál es el consumo a las 2 horas de iniciada la jornada?

b) ¿En qué momento se produce el máximo consumo y valor de éste?

2.123. La temperatura T, en grados centígrados, de una reacción química viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión $T(t)=10t\cdot(3-t)$, en donde $0\le t\le 3$. Se pide:

a) Temperatura que habrá a los 30 minutos de comenzada la reacción.

b) ¿En qué momento se alcanza la máxima temperatura y cuál es ésta?

2.124. En una sesión de Bolsa el precio, en euros, que alcanza una acción viene dado por la función $f(t) = 2t^3 - 18t^2 + 48t + 1$, en donde t representa el tiempo, en horas, contado a partir del inicio de la sesión y $0 \leq t \leq 3$ Se pide:

a) Precio de la acción a las 3 horas de iniciada la sesión.

b) ¿A qué hora la acción alcanza su valor máximo? ¿Cuál es este valor?

2.125. La trayectoria seguida por un vagón de una atracción de feria viene definida por la función $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$ en donde t representa el tiempo en minutos contado desde el momento en que se pone en marcha la atracción y $f(t)$ representa la altura en metros, respecto del suelo, en la que se encuentra el vagón. Se pide:

a) Tiempo que tarda el vagón en alcanzar la altura máxima y valor de esta.

b) Si la atracción finalizara su recorrido en el minuto 4, ¿el punto de salida coincidirá con el de llegada?

2.126. El beneficio B, en miles de euros, de una sociedad de inversores, viene dado por la función $B(x) = -2x^2 + 56x + 3$ en donde x representa los miles de euros invertidos. Estudiadas las condiciones del mercado, se decide que $1 \leq x \leq 15$. Se pide:

a) Beneficio máximo.

b) Intervalos donde el beneficio crece y donde decrece.

2.127. El valor en millones de euros de una empresa en función del tiempo en años viene dado por la relación funcional $f(t) = 9 - (t-2)^2$ con $0 \leq t \leq 6$. ¿En qué momento alcanzó su máximo?

2.128. En una empresa de autobuses se observa que sus ingresos dependen del precio del billete según la función $I(t) = 18p - 3p^2$, siendo p el precio del billete en euros. ¿Para qué valores de p los ingresos aumentan?, ¿para cuáles disminuyen?

2.129. La producción de tomates en un invernadero depende de la temperatura que hay en el mismo mediante la expresión $P(x) = -x^3 + 48x^2 - 720x$, con $P(x)$ en kg y x en grados centígrados. ¿Entre qué valores hay que mantener la temperatura del invernadero para que la producción aumente?

2.130. Un agente comercial cobra por la venta de cierto producto una comisión dada por:

$$C(x) = 100 + \frac{x}{100} - \frac{x^2}{1000}$$

donde x representa la cantidad en miles de euros de la venta efectuada. Determina la cantidad que habrá de vender para que la comisión sea máxima.

2.131. El número de individuos en millones de una población viene dado por la función $P(t) = \frac{15+t^2}{(t+1)^2}$ donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$. Calcula:

a) La población inicial.

b) El año en que se alcanza la mínima población y el tamaño que tiene en ese momento.

c) El tamaño de la población a largo plazo.

I. APLICACIONES DE LA DERIVADA EN FUNCIONES CON PARÁMETROS

2.141. La función $f(x) = 2x^2 + ax + b$ tiene un mínimo en el punto $(2, -5)$. Se pide:

a) Determina el valor de a y b.

b) Para los valores hallados en el apartado anterior, escribe el intervalo en donde la función es creciente.

2.142. La función $f(x) = ax^2 + 6x + b$ tiene un máximo en el punto $(1{,}4)$. Se pide:

a) Determina el valor de a y de b.

b) Para los valores hallados en el apartado anterior, escribe el intervalo en donde la función es decreciente.

2.143. Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ de la que se sabe que para por el origen de coordenadas y que tiene un máximo relativo en el punto $(1, 2)$. Se pide

a) Determina los valores de $a, b, y\ c$.

b) Estudiar la monotonía y la curvatura de la función.

2.144. Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$. Calcúlense a, b para que la función f tenga un mínimo relativo en $x = 2$. Para los valores calculados determinar el punto de inflexión de la función.

2.145. De la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ se sabe que tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 1$, tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = -1$ y además su gráfica pasa por el punto $(2, 5)$. Se pide:

a) Determina los valores de a, b, y c.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en su punto de inflexión.

2.146. Halla los parámetros de a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en $(3, 2)$ y un mínimo relativo en $(1, -5)$.

2.147. Halla los parámetros a, b y c en la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ para que la función corte al eje de ordenadas en $y = -2$ y tenga un mínimo relativo en $(1, -4)$.

2.148. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ tiene un máximo en el punto $P(0, 1)$. Calcula a y b.

2.149. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + 5$, halla el valor de a para que tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) en $x = 1$.

2.150. Halla el valor de a, b, c y d para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo en $(1, 0)$ y un punto de inflexión en $(2, -2)$.

2.151. Halla los parámetros b y d en la función $f(x) = -x^3 + bx^2 + 2x + d$ para que tenga un punto de inflexión en $(3, 2)$.

J. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

2.161. Halla dos números cuya suma sea 6 unidades y el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

2.162. ¿En qué dos partes hemos de dividir el número 12 para que su producto alcance el máximo valor posible?

2.163. Halla dos números que sumen 20 y su producto sea máximo.

2.164. Halla las dimensiones del rectángulo de mayor área que podemos cercar con una cuerda de 24cm.

2.165. Un agricultor dispone de 400 m de alambre con los que quiere vallar un campo rectangular aprovechando que un río hace ya de valla en uno de sus lados. ¿Cómo debe hacerlo para cercar la máxima superficie?

2.166. ¿Cuál es el número que sumado con 25 veces su inverso da un valor mínimo? ¿Cuál es este valor?

2.167. Dos números no negativos son tales que sumando el primero al cuadrado del segundo resulte 9. Halle estos números de manera que su suma sea tan grande como sea posible

2.168. Un pastor dispone de 1.000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. ¿Podrías indicar las dimensiones para que el corral sea lo mayor posible?

2.169. Entre todos los rectángulos de perímetro 12 cm. ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?

2.170. ¿Qué medidas tiene el triángulo rectángulo de máxima área entre todos los que tienen 10 cm de hipotenusa?

2.171. A un placa de vidrio rectangular de 15 cm de largo y 10 cm de ancho se le ha roto en una esquina un pedazo triangular de tal modo que la longitud ha disminuido en 5cm y la anchura en 3cm. Queremos aprovechar el vidrio de manera que forme una nueva placa rectangular. ¿Cómo debemos hacer los cortes si queremos que tenga la mayor superficie posible?

2.172. Una hoja de papel debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm. cada uno, y los laterales 1 cm. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

2.173. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

2.174. La suma del perímetro de un cuadrado de lado *a* cm, y de la circunferencia de un círculo de radio *r* cm es de 240 cm. ¿Cuál es el valor de *r* si la suma de las áreas ha de ser mínima?

2.175. Una empresa de productos de limpieza fabrica cajas de cartón con tapa, para comercializar un determinado tipo de detergente. Las cajas son prismas rectos de 9.000 cm^2 de volumen y base rectangular de largo igual al doble de su anchura. Calcúlense las dimensiones en centímetros (largo, ancho y alto) que ha de tener cada caja para que la superficie de cartón empleada en su fabricación sea mínima.

2.176. Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa, de capacidad 500 dm^3. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben ser sus medidas para minimizar la superficie total del cristal empleado?

K. PROBLEMAS DE DERIVACIÓN EN ECUACIONES IMPLÍCITAS

2.181. Calcula $\frac{dy}{dx}$ en función de x y de y mediante la derivación implícita,

$$a)\quad x^3-4xy=5 \qquad b)\quad \frac{x}{y}=3 \qquad c)\quad x^3-y^2=2x$$

$$d)\quad \ln y=2x^2 \qquad e)\quad \sqrt{xy}=y \qquad f)\quad (x+2y)^2=4x$$

2.182. Calcula $y´$ en función de x y de y mediante la derivación implícita,

$$a)\quad \frac{x^2}{x-y}=5x \qquad b)\quad xy^2=8 \qquad c)\quad x^2+2y^2=x$$

$$d)\quad e^{xy}=x^2 \qquad e)\quad \sqrt{xy}=y \qquad f)\quad (x-y)^3=x^2$$

2.183. En cada apartado del ejercicio 1 calcule la pendiente de la recta tangente en $x = 1$.

2.184. En cada apartado del ejercicio 1 calcule la pendiente de la recta normal en $x = -1$.