CONTROL 9

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

LUNES 18 de MARZO de 2024

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10,25 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.
- Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **[Matemáticas NM, Mayo 2013 P2, Ej.6]**

1. Resuelva los siguientes apartados correctamente, (0,75 + 0,75 puntos)

(a) Halle el valor constante de $x^4\left(x+\frac{3}{x^2}\right)^5$.

(b) Encuentre el valor no nulo de $k \in \mathbb{R}$ en $(1+kx)^5$ si los coeficientes de x^3 y x^4 son iguales.

[Puntuación máxima: 2 puntos]

2. (a) Resuelva algebraicamente, **dando todas las soluciones**, la ecuación,

$$\cos 2x + \operatorname{sen} x = 4\operatorname{sen}^2 x \qquad \text{(1 punto)}$$

(b) Dado un complejo cualquiera en forma polar de la forma $z = m \cdot (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)$ con $m, \alpha \in \mathbb{R}$ demuestre por inducción que

$$z^n = m^n \cdot \left(\cos(n\alpha) + i \cdot \operatorname{sen}(n\alpha)\right) \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (1\ punto)$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

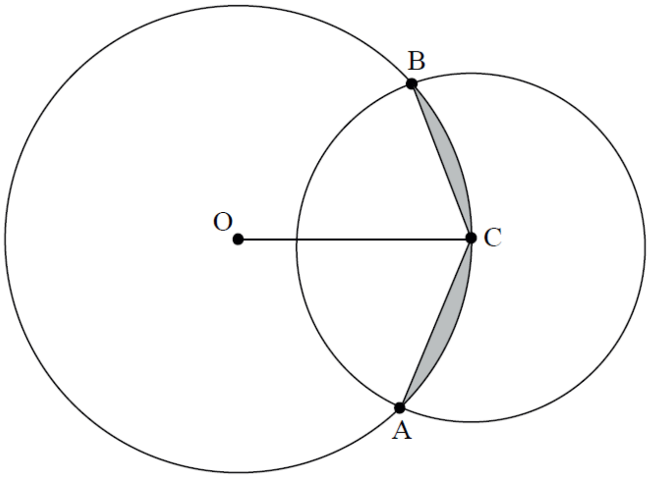
3. El triángulo ABC tiene un ángulo obtuso en B y se sabe que el $BC = 10{,}2\ cm$ y los ángulos $\hat{A} = x$ y $\hat{B} = 2x$.

a) Halle AC, en función de $\cos x$. (1,25 puntos)

b) Sabiendo que el área del triángulo ABC es $52{,}02 \cdot \cos x$, halle el ángulo C. (1,25 puntos)

[Puntuación máxima: 1,25 puntos] **(Matemáticas NS P2, Mayo 2014 ej.4)**

4. La siguiente figura muestra dos círculos que se cortan, de radios $4\ cm\ y\ 3\ cm$. El centro C del círculo pequeño está situado en la circunferencia del círculo grande. El punto O es el centro del círculo grande, y los dos círculos se cortan en los puntos $A\ y\ B$



Halle:

(a) El ángulo $\widehat{BOC}$ (0,5 puntos)

(b) el área de la región sombreada. (0,75 puntos)

[Puntuación máxima: 2 puntos]

5. (a) Demuestre algebraicamente que (1 punto)

$$\left(cos(x-y)-cos(x+y)\right)^2 = 4 \cdot sen^2 x \cdot sen^2\, y \quad , x, y \in \mathbb{R}$$

(b) En un puesto de mando, y para trasmitir señales, hay en línea recta, cuatro astas; en cada asta solamente se puede colocar una bandera. Se dispone de siete tipos de banderas monocolor con un color distinto a las demás cada una de ellas. Hay al menos 4 banderas de cada color. Las señales consisten en colocar una bandera en cada asta. Según los colores de las mismas y lugar que ocupen, la señal será distinta. Hallar el número de señales que se pueden trasmitir si

(i) No se pueden repetir banderas en la señal. (0,25 puntos)

(ii) Se pueden repetir banderas en la señal. (0,25 puntos)

(iii) Deben aparecer el color rojo y verde en cualquier señal y van siempre juntos aunque no necesariamente en el mismo orden, no repitiéndose colores. (0,5 puntos)

[Puntuación máxima: 1 punto]

6. El polinomio $q(x) = x^3 + ax^2 - 3x + b$ es divisible entre $(x - 2)$ y da resto 6 al dividirlo entre $(x + 1)$,

(a) Halle el valor de $a\ y\ de\ b$. (0,5 puntos)

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo factorice $q(x)$ como producto de factores lineales **<u>sin usar la calculadora</u>**. (0,5 puntos)

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº 9 DE ANÁLISIS Y ENFOQUES/MATEMÁTICAS II

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **[Matemáticas NM, Mayo 2013 P2, Ej.6]**

1. Resuelva los siguientes apartados correctamente, (0,75 + 0,75 puntos)

(a) Halle el valor constante de $x^4\left(x+\frac{3}{x^2}\right)^5$.

(b) Encuentre el valor no nulo de $k \in \mathbb{R}$ en $(1+kx)^5$ si los coeficientes de x^3 y x^4 son iguales.

(a) Halle el valor constante de $x^4\left(x+\frac{3}{x^2}\right)^5$.

Aplicando la fórmula del binomio,

$$x^4\left(x+\frac{3}{x^2}\right)^5 = x^4\cdot\sum_{n=0}^{5}\binom{5}{n}\cdot x^{5-n}\cdot\left(\frac{3}{x^2}\right)^n = \sum_{n=0}^{5}\binom{5}{n}\cdot x^4\cdot x^{5-n}\cdot\frac{3^n}{x^{2n}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{5}\binom{5}{n}\cdot x^{9-n}\cdot\frac{3^n}{x^{2n}} = \sum_{n=0}^{5}\binom{5}{n}\cdot 3^n\cdot\frac{x^{9-n}}{x^{2n}} = \sum_{n=0}^{5}\binom{5}{n}\cdot 3^n\cdot x^{9-n-2n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{5}\binom{5}{n}\cdot 3^n\cdot x^{9-3n} =$$

El término independiente o constante será el valor de n tal que,

$$9-3n=0 \quad\Leftrightarrow\quad 9=3n \quad\Leftrightarrow\quad \frac{9}{3}=n \quad\Leftrightarrow\quad 3=n$$

Por lo tanto, el término independiente de la expresión es,

$$\binom{5}{3}\cdot 3^3\cdot x^{9-3\cdot 3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot 27\cdot x^0 = 10\cdot 27 = 270$$

(b) Encuentre el valor no nulo de $k \in \mathbb{R}$ en $(1+kx)^5$ si los coeficientes de x^3 y x^4 son iguales.

Aplicando la fórmula del binomio,

$$(1+kx)^5 = \sum_{n=0}^{5}\binom{5}{n}\cdot 1^{5-n}\cdot(kx)^n = \sum_{n=0}^{5}\binom{5}{n}\cdot k^n\cdot x^n$$

Por lo tanto, el coeficiente de x^3 es

$$\binom{5}{3}\cdot k^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!}\cdot k^3 = 10\cdot k^3$$

Y el coeficiente de x^4 es

$$\binom{5}{4} \cdot k^4 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot k^4 = 5 \cdot k^4$$

Si ambos coeficientes son iguales entonces:

$$10 \cdot k^3 = 5 \cdot k^4 \quad \Leftrightarrow \quad 2k^3 = k^4 \quad \Leftrightarrow \quad k^4 - 2k^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^3 \cdot (k-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k = 0 \\ k = 2 \end{cases}$$

En conclusión, el valor no nulo pedido es $\boldsymbol{k = 2}$.

[Puntuación máxima: 2 puntos]

2. (a) Resuelva algebraicamente, dando todas las soluciones, la ecuación,

$$cos\ 2x + sen\ x = 4sen^2\ x \qquad \text{(1 punto)}$$

(b) Dado un complejo cualquiera en forma polar de la forma $z = m \cdot (cos\ \alpha + i \cdot sen\ \alpha)$ con $m, \alpha \in \mathbb{R}$ demuestre por inducción que

$$z^n = m^n \cdot \big(cos\ (n\alpha) + i \cdot sen\ (n\alpha)\big) \quad , \quad \forall\, n\ \in \mathbb{N} \qquad (1\ punto)$$

a) Resuelva algebraicamente, dando todas las soluciones, la ecuación,

$$\mathbf{cos\ 2x + sen\ x = 4sen^2\ x}$$

Aplicando la fórmula del coseno del ángulo doble tendremos que,

$$\cos 2x + sen\ x = 4sen^2\ x \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x - sen^2 x + sen\ x = 4sen^2\ x$$

Aplicando la igualdad fundamental de la trigonometría sobre $cos^2\ x$,

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \text{sen}^2\ x - sen^2 x + sen\ x = 4sen^2\ x \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2sen^2 x + sen\ x = 4sen^2\ x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 6sen^2\ x - sen\ x - 1$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado resultante,

$$sen\ x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6} = \frac{+1 \pm \sqrt{+1 + 24}}{12} =$$

$$= \frac{+1 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{+1 \pm 5}{12} = \begin{cases} sen\ x = \dfrac{+1+5}{12} = \dfrac{1}{2} \\ sen\ x = \dfrac{+1-5}{12} = -\dfrac{4}{12} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$sen\ x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 30° \pm 360° \cdot k\ \ , k \in \mathbb{Z} \\ 150° \pm 360° \cdot k\ \ , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

O bien,

$$sen\ x = -\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right) = \begin{cases} 199°\, 28'\, 16{,}3'' + 360° \cdot k\ \ , k \in \mathbb{Z} \\ 340°\, 31'\, 43{,}6'' + 360° \cdot k\ \ , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En radianes las soluciones son:

Por lo tanto,

$$sen\ x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\ \ , k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\ \ , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

O bien,

$$sen\ x = -\frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right) = \begin{cases} 5{,}943 + 2k\pi\ \ , k \in \mathbb{Z} \\ 3{,}481 + 2k\pi\ \ , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(b) Dado un complejo cualquiera en forma polar de la forma $\boldsymbol{z = m \cdot (cos\ \alpha + i \cdot sen\ \alpha)}$ con $\boldsymbol{m, \alpha} \in \mathbb{R}$ demuestre por inducción que

$$\boldsymbol{z^n = m^n \cdot \left(cos\ (n\alpha) + i \cdot sen\ (n\alpha)\right) \quad , \quad \forall\, n\ \in \mathbb{N}}$$

calcule $\boldsymbol{a}$.

Sea un complejo en forma polar $\boldsymbol{z} = m \cdot (cos\ \alpha + i \cdot sen\ \alpha)$ con $m, \alpha \in \mathbb{R}$ entonces,

- Para $n = 1$ tendremos que probar que

$$z^1 = m^1 \cdot \left(cos\ (1\alpha) + i \cdot sen\ (1\alpha)\right)$$

  Como,

$$z^1 = \left(m \cdot (cos\ \alpha + sen\ \alpha)\right)^1 = m^1 \cdot (cos\ \alpha + sen\ \alpha) = m^1 \cdot \left(cos\ (1 \cdot \alpha) + sen\ (1 \cdot \alpha)\right)$$

  Entonces el caso $n = 1$ está demostrado.

- Suponemos ahora cierto el caso $n = k$, es decir,

$$z^k = m^k \cdot \left(cos\ (k\alpha) + i \cdot sen\ (k\alpha)\right)$$

- Y vamos a probar el caso $n = k + 1$, es decir,

$$z^{k+1} = m^k \cdot \left(cos\ \left((k+1)\alpha\right) + i \cdot sen\ \left((k+1)\alpha\right)\right)$$

  Como,

$$z^{k+1} = z^k \cdot z^1 = m^k \cdot \left(cos\ (k\alpha) + i \cdot sen\ (k\alpha)\right) \cdot m^1 \cdot \left(cos\ (1\alpha) + i \cdot sen\ (1\alpha)\right) =$$
$$= m^k \cdot \left(cos\ (k\alpha) + i \cdot sen\ (k\alpha)\right) \cdot \left(cos\ (\alpha) + i \cdot sen\ (\alpha)\right) =$$
$$= m^k \cdot m \cdot (cos\ (k\alpha) \cdot cos\ (\alpha) + i \cdot cos\ (k\alpha) \cdot sen\ (\alpha) + i \cdot sen\ (k\alpha) \cdot cos\ (\alpha) +$$
$$+ i^2 \cdot sen\ (k\alpha) \cdot sen\ (\alpha)\big) == m^{k+1} \cdot (cos\ (k\alpha) \cdot cos\ (\alpha) + i \cdot cos\ (k\alpha) \cdot sen\ (\alpha) +$$
$$+ i \cdot sen\ (k\alpha) \cdot cos\ (\alpha) + (-1) \cdot sen\ (k\alpha) \cdot sen\ (\alpha)\big) =$$
$$= m^{k+1} \cdot (\left(cos\ (k\alpha) \cdot cos\ (\alpha) - sen\ (k\alpha) \cdot sen\ (\alpha)\right) +$$
$$+ i \cdot \left(sen\ (k\alpha) \cdot cos\ (\alpha) + cos\ (k\alpha) \cdot sen\ (\alpha)\right)) =$$
$$= m^{k+1} \cdot \left(\cos\left((k+1)\alpha\right) + \mathrm{sen}\left((k+1)\alpha\right)\right)$$

  Por lo tanto, se verifica el caso $n = k + 1$ y queda completa la inducción.

  En conclusión,

$$z^n = m^n \cdot \left(cos\ (n\alpha) + i \cdot sen\ (n\alpha)\right) \quad , \quad \forall\, n\ \in \mathbb{N}$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos]

3. El triángulo ABC tiene un ángulo obtuso en B y se sabe que el $BC = 10,2\ cm$ y los ángulos $\hat{A} = x\ y\ \hat{B} = 2x$.

a) Halle AC, en función de $cos\ x$. (1,25 puntos)

b) Sabiendo que el área del triángulo ABC es $52,02 \cdot cosx$, halle el ángulo C. (1,25 puntos)

a) Halle AC, en función de $cos\ x$.

Aplicando el teorema del seno tendremos que,

$$\frac{sen\ \hat{A}}{BC} = \frac{sen\ \hat{B}}{AC} \Leftrightarrow \frac{sen\ x}{10,2} = \frac{sen\ 2x}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{10,2 \cdot sen\ 2x}{sen\ x}$$

En tal caso,

$$AC = \frac{10,2 \cdot sen\ 2x}{sen\ x} = \frac{10,2 \cdot 2 \cdot sen\ x \cdot \cos x}{sen\ x} = 20,4 \cdot \cos x$$

b) Sabiendo que el área del triángulo ABC es $52,02 \cdot cos\ x$, halle el ángulo C.

La altura h sobre la base AC puede hallarse mediante,

$$sen\ C = \frac{h}{BC} \Leftrightarrow sen\ \hat{C} = \frac{h}{10,2} \Leftrightarrow h = 10,2 \cdot sen\ \hat{C}$$

El área vendrá dada por,

$$Área(ABC) = \frac{AC \cdot h}{2} = \frac{20,4 \cdot \cos x \cdot 10,2 \cdot sen\ \hat{C}}{2} = 104,04 \cdot \cos x \cdot sen\ \hat{C}$$

Como el área del triángulo mide $52,02 \cdot \cos x$ entonces,

$$52,02 \cdot \cos x = 104,04 \cdot \cos x \cdot sen\ \hat{C}$$

entonces,

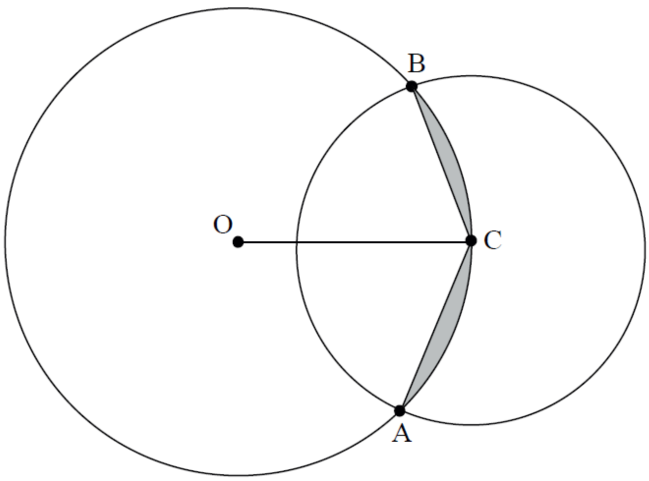
$$\frac{1}{2} = sen\ \hat{C}$$

Puesto que el ángulo $\hat{B}$ es obtuso, el ángulo $\hat{C}$ es agudo, y por supuesto, menor que 90°, y entonces,

$$\hat{C} = arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

[Puntuación máxima: 1,25 puntos] **(Matemáticas NS P2, Mayo 2014 ej.4)**

4. La siguiente figura muestra dos círculos que se cortan, de radios $4\ cm\ y\ 3\ cm$. El centro C del círculo pequeño está situado en la circunferencia del círculo grande. El punto O es el centro del círculo grande, y los dos círculos se cortan en los puntos $A\ y\ B$

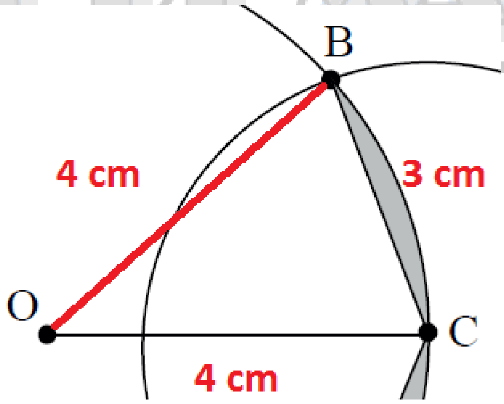


Halle:

(a) El ángulo $\widehat{BOC}$ (0,5 puntos)

(b) el área de la región sombreada. (0,75 puntos)

(a) El ángulo $\widehat{BOC}$



Por el teorema del coseno en el triángulo isósceles BOC tendremos que el ángulo $\widehat{BOC}$ debe cumplir que,

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos\left(\widehat{BOC}\right)$$

En ese caso,

$$3^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos\left(\widehat{BOC}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 9 = 32 - 32 \cdot \cos\left(\widehat{BOC}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{23}{32} = \cos\left(\widehat{BOC}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \widehat{BOC} = \arccos\left(\frac{23}{32}\right) \approx 44{,}049° = 44° \quad 2'55{,}05''$$

(b) el área de la región sombreada.

Calculamos el área del sector circular que genera $\widehat{BOC}$

Ángulo	$\leftrightarrow$	Área
$360°$	$\leftrightarrow$	$\pi \cdot 4^2$
$44{,}049°$	$\leftrightarrow$	$A_{\widehat{BOC}}$

$$A_{\widehat{BOC}} \approx 6{,}15\ cm^2$$

Calculamos el área del triángulo BOC mediante la fórmula de Herón, con

$$s = \frac{4+4+3}{2} = 5{,}5\ cm$$

Calculamos el área,

$$A_{BOC} = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} =$$

$$= \sqrt{5{,}5 \cdot (5{,}5-4) \cdot (5{,}5-4) \cdot (5{,}5-3)} \approx 5{,}562\ cm^2$$

Como el área de la región sombreada es el doble del área diferencia entre la superficie del sector circular $\widehat{BOC}$ y la superficie del triángulo entonces el área sombreada mide,

$$A = 2 \cdot (A_{\widehat{BOC}} - A_{BOC}) \approx 2 \cdot (6{,}15 - 5{,}562\ ) \approx 2 \cdot 0{,}588 = 1{,}176\ \ cm^2$$

[Puntuación máxima: 2 puntos]

5. (a) Demuestre algebraicamente que (1 punto)

$$\left(cos(x-y)-cos(x+y)\right)^2 = 4\cdot sen^2 x\cdot sen^2\, y \quad ,x,y\in\mathbb{R}$$

(b) En un puesto de mando, y para trasmitir señales, hay en línea recta, cuatro astas; en cada asta solamente se puede colocar una bandera. Se dispone de siete tipos de banderas monocolor con un color distinto a las demás cada una de ellas. Hay al menos 4 banderas de cada color. Las señales consisten en colocar una bandera en cada asta. Según los colores de las mismas y lugar que ocupen, la señal será distinta. Hallar el número de señales que se pueden trasmitir si

(i) No se pueden repetir banderas en la señal. (0,25 puntos)

(ii) Se pueden repetir banderas en la señal. (0,25 puntos)

(iii) Deben aparecer el color rojo y verde en cualquier señal y van siempre juntos aunque no necesariamente en el mismo orden, no repitiéndose colores. (0,5 puntos)

(a) Demuestre algebraicamente que

$$\boldsymbol{\left(cos(x-y)-cos(x+y)\right)^2 = 4\cdot sen^2 x\cdot sen^2\, y \quad ,x,y\in\mathbb{R}}$$

Aplicando las fórmulas de la adición,

$$\left(cos(x-y)-cos(x+y)\right)^2 = (\cos x\cdot\cos y + sen\, x\cdot sen\, y\ -(\cos x\cdot \cos y - sen\, x\cdot sen\, y))^2$$

Simplificamos y obtenemos la solución,

$$= (\cos x\cdot\cos y + sen\, x\cdot sen\, y\ - \cos x\cdot\cos y + sen\, x\cdot sen\, y\,)^2 =$$

$$= (2\cdot sen\, x\cdot sen\, y\,)^2 = \boldsymbol{4\cdot sen^2 x\cdot sen^2\, y}$$

(b) (i) No se pueden repetir banderas en la señal

Se trata de una variación sin repetición ya que importa el orden pero no se pueden repetir banderas. Hay 7 banderas y 4 posiciones. Por lo tanto,

$$V_{7,4} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840\ señales$$

(b) (ii) Se pueden repetir banderas en la señal.

Se trata de una variación con repetición ya que importa el orden pero no se pueden repetir banderas. Hay 7 banderas y 4 posiciones. Por lo tanto,

$$VR_{7,4} = 7^4 = 2401\ señales$$

(b) (iii) Deben aparece el color rojo y verde en cualquier señal y van siempre juntos aunque no necesariamente en el mismo orden, no repitiéndose colores.

Las combinaciones de colores $R\ y\ V\ son\ 2$. Suponemos que ese RV son "una bandera" y que está siempre en la señal. En ese caso tendremos que elegir de los 5 colores que quedan, los dos que van a acompañar a la bandera RV en 2 posiciones que quedan. Por tanto, se trata de una combinación de 4 elementos tomados de 2 en 2. Una vez que tenemos los "tres" colores, lo que debemos hacer es permutarlos y mutiplicar el resultado por 2 por la posición doble de las banderas Roja y Verde.

$$C_{5,2} \cdot P_3 \cdot 2 = \binom{5}{2} \cdot 3! \cdot 2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 3! \cdot 2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120\ señales$$

[Puntuación máxima: 1 punto]

6. El polinomio $q(x) = x^3 + ax^2 - 3x + b$ es divisible entre $(x-2)$ y da resto 6 al dividirlo entre $(x+1)$,

(a) Halle el valor de $a \ y \ de \ b$. (0,5 puntos)

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo factorice $q(x)$ como producto de factores lineales **<u>sin usar la calculadora</u>**. (0,5 puntos)

(a) Halle el valor de $\boldsymbol{a \ y \ de \ b}$.

Si el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 - 3x + b$ es divisible entre $(x-2)$ entonces $p(2) = 0$. En tal caso,

$$p(2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 + a \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + b = 0 \quad \Leftrightarrow 8 + 4a - 6 + b = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a + b = -2 \quad \Leftrightarrow \quad b = -2 - 4a$$

Si el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 - 3x - 2 - 4a$ da resto 6 al dividirlo entre $(x+1)$ entonces, al dividirlo entre $(x+1)$ el método de Ruffini debemos obtener resto 6,

	1	a	-3	$(-2-4a)$
-1		-1	$-a+1$	$2+a$
	1	$a-1$	$-a-2$	$-3a$

Por lo tanto, si el resto es 6 y hemos obtenido por el método de Ruffini que el resto es $-3a$ entonces,

$$-3a = 6 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{6}{-3} \quad \Leftrightarrow \quad a = -2$$

Y por lo tanto,

$$b = -2 - 4a = -2 - 4 \cdot (-2) == -2 + 8 = 6$$

En conclusión, $a = -2$, $b = 6$.

(b) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo factorice $\boldsymbol{q(x)}$ como producto de factores lineales <u>sin usar la calculadora</u>.

Aplicando el método de Ruffini sobre el polinomio resultante del apartado a)

$$q(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6$$

Mediante la raíz $x = 2$ tendremos que,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -3 & +6 \\ 2 & & +2 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

Factorizando el polinomio cociente $x^2 - 3$ mediante el producto notable suma por diferencia,

$$x^2 - 3 = \left(x + \sqrt{3}\right) \cdot \left(x - \sqrt{3}\right)$$

tendremos que $q(x)$ se descompone mediante producto de factores lineales como,

$$q(x) = 1 \cdot (x - 2) \cdot \left(x + \sqrt{3}\right) \cdot \left(x - \sqrt{3}\right)$$