CONTROL 8

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Lunes 4 de MARZO de 2024

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10,75 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.
- Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

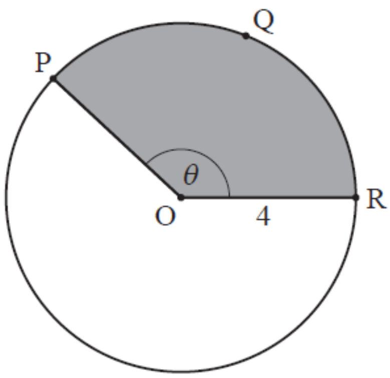
No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques P1, Mayo 2023 ej.1)**

1. La siguiente figura muestra un círculo de centro O y de $4\ cm$ de radio.

la figura no está dibujada a escala



Los puntos $P, Q\ y\ R$ pertenecen a la circunferencia del círculo y $\widehat{POR} = \theta$, donde θ se mide en radianes. La longitud del arco PQR es igual a $10\ cm$.

(a) (i) Halle el perímetro del sector circular **contrario** al que está sombreado. (0,25 puntos)

(ii) Halle el ángulo θ en radianes. (0,25 puntos)

(b) Halle el área del sector circular **contrario** al sombreado. (0,25 puntos)

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Matemáticas NM P2, Mayo 2014 ej 5)**

2. En el triángulo ABC, $AB = 6\ cm$ y $AC = 8\ cm$. El área del triángulo es igual a $16cm^2$

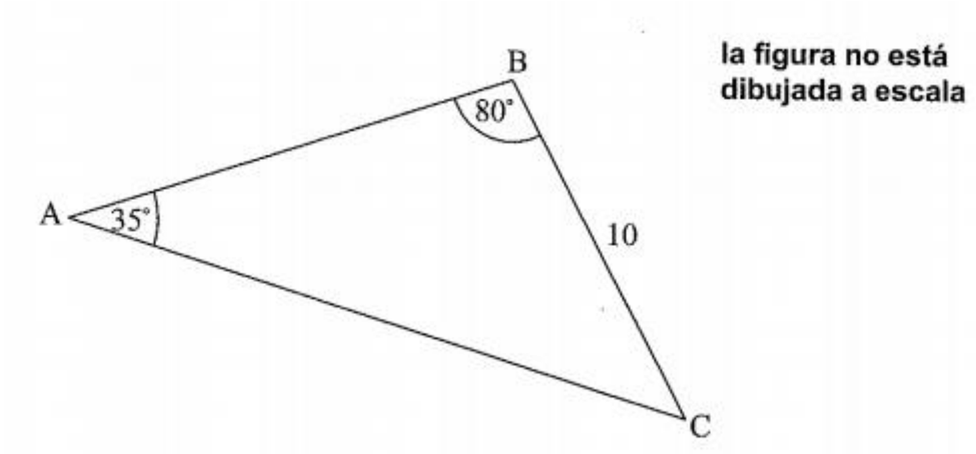
(a) Halle los dos posibles valores de $\hat{A}$. (1 punto)

(b) Sabiendo que $\hat{A}$ es obtuso, halle BC. (0,5 puntos)

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Matemáticas NM P2, Mayo 2015 ej 1)**

3. La siguiente figura muestra al triángulo ABC



$$BC = 10\ cm\ ,\ \ \widehat{ABC} = 80°\ y\ \widehat{BAC} = 35°$$

a) Halle AC. (0,5 puntos)

b) Halle el perímetro del triángulo ABC. (0,5 puntos)

c) Halle el área del triángulo ABC (0,5 puntos)

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Análisis y Enfoques NS P2, Mayo 2022 ej.5)**

4. Considere el siguiente desarrollo de la potencia de un binomio:

$$(x+1)^7 = x^7 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + \cdots + 1, \;\; donde \;\; y \;\; a, b, c \in \mathbb{Z}$$

(a) Demuestre calculándolo que $b = 21$. (0,5 puntos)

(b) Para algunos valores $x \neq 0$,el término de grado 5 del desarrollo es la media del término de grado seis y término de grado cuatro del desarrollo, halle los posibles valores de x. (1 punto)

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

Puntuación máxima: 2 puntos]

5. (a) Considere el conjunto de números enteros positivos de seis cifras que se pueden formar con las cifras $0,1,2,3,4,5,6,7$. Halle cuántos números enteros positivos de seis cifras **con centena de millar distinta de cero** se pueden formar y que cumplan lo siguiente en cada apartado:

(i) Las cifras son todas distintas. (0,5 puntos)

(ii) Los números son capicúa, pudiéndose repetir cifras. (0,5 puntos)

(b) Demuestra por inducción matemática que (1 punto)

$$7^n - 1 \text{ es múltiplo de 6 para cualquier } n \in \mathbb{N}$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

6. (a) Considere la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$. Usando la factorización del polinomio, y sabiendo que sus raíces que son $x = sen\,\theta$ y $x = cos\,\theta$, muestre que $b^2 = a^2 + 2ac$. (0,75 puntos)

(b) Demuestre, sin utilizar la calculadora, la siguiente igualdad, (0,75 puntos)

$$\frac{sen\ 2a}{1 - sen^2 a} = 2 \cdot tan\ a$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2 puntos]

7. Sea $sen\ 80° = m$ y $cos\ 65° = n$. Halle una expresión en función de m y/o n para cada uno de los siguientes elementos, usando para ello fórmulas trigonométricas y nunca la calculadora.

$a)$ $\operatorname{sen} 160°$ $b)$ $\cos 15°$ $c)$ $\tan 130°$ $d)$ $\cos 32{,}5°$

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

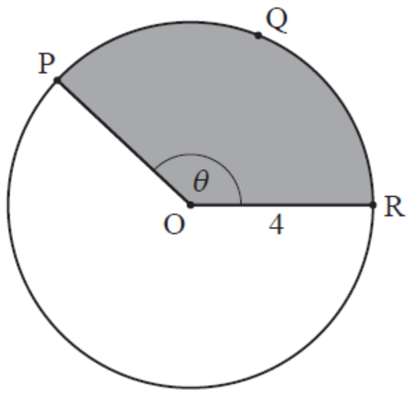
SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº 8

ANALISIS Y ENFOQUES NS – MATEMÁTICAS I

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Análisis y Enfoques P1, Mayo 2023 ej.1)**

1. La siguiente figura muestra un círculo de centro O y de $4\ cm$ de radio.

la figura no está dibujada a escala



Los puntos $P, Q\ y\ R$ pertenecen a la circunferencia del círculo y $\widehat{POR} = \theta$, donde θ se mide en radianes. La longitud del arco PQR es igual a $10\ cm$.

(a) (i) Halle el perímetro del sector circular **contrario** al que está sombreado. (0,25 puntos)

(ii) Halle el ángulo θ en radianes. (0,25 puntos)

(b) Halle el área del sector circular **contrario** al sombreado. (0,25 puntos)

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(a) (i) Halle el perímetro del sector circular contrario al que está sombreado.

Como el radio de la circunferencia es $4\ cm$ y la longitud del arco es $10\ cm$, entonces el perímetro del sector circular contrario al que está sombreado será,

$$L = (2\pi r - 10) + 2 \cdot 4 = 2\pi \cdot 4 - 10 + 8 = 8\pi - 2 \approx 23{,}1323\ cm$$

(ii) Halle el ángulo θ en radianes.

Hacemos regla de tres sobre la longitud de arco POR del siguiente modo,

Rad		Longitud
$2\pi\ rad$	$\leftrightarrow$	$2\pi \cdot 4$
$\theta\ rad$	$\leftrightarrow$	10

$$\theta = \frac{10 \cdot 2\pi}{8\pi} = 2{,}5\ rad$$

(b) Halle el área del sector circular contrario al sombreado.

Hacemos regla de tres sobre el área a del sector circular contrario al sombreado según,

Rad		Área
$2\pi\ rad$	$\leftrightarrow$	$\pi \cdot 4^2$
$2\pi - 2{,}5\ rad$	$\leftrightarrow$	a

$$a = \frac{(2\pi - 2{,}5) \cdot 16\pi}{2\pi} \approx 30{,}265\ \text{cm}^2$$

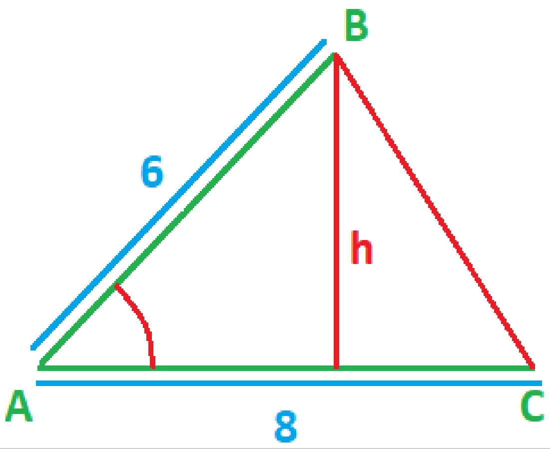
[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Matemáticas NM P2, Mayo 2014 ej 5)**

2. En el triángulo ABC, $AB = 6\ cm$ y $AC = 8\ cm$. El área del triángulo es igual a $16 cm^2$

(a) Halle los dos posibles valores de $\hat{A}$. (1 punto)

(b) Sabiendo que $\hat{A}$ es obtuso, halle BC. (0,5 puntos)

(a) Halle los dos posibles valores de $\hat{A}$.



Si h es la altura desde el vértice B al lado AC entonces,

$$sen\ (\hat{A}) = \frac{h}{6}$$

Por lo tanto,

$$h = 6 \cdot sen\ (\hat{A})$$

Entonces el área del triángulo es,

$$Área(ABC) = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{8\ cm \cdot 6\ cm \cdot sen(\hat{A})}{2} = 24 \cdot sen(\hat{A})\ cm^2$$

Como el área es $16\ cm^2$ entonces,

$$24 \cdot sen(\hat{A}) = 16 \quad \Leftrightarrow \quad sen(\hat{A}) = \frac{16}{24} \quad \Leftrightarrow \quad sen(\hat{A}) = \frac{2}{3}$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Haciendo la función arco correspondiente y teniendo en cuenta el cuadrante tendremos dos soluciones,

$$sen(\hat{A}) = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A} = arc\ sen\left(\frac{2}{3}\right) = \begin{cases} \hat{A} = 41{,}81031489° = 41°\ 48'\ 37{,}13'' \\ \hat{A} = 180° - (41°\ 48'\ 37{,}13'') = 138°\ 11'\ 22{,}8'' \end{cases}$$

(b) Sabiendo que $\hat{A}$ es obtuso, halle BC.

Si $\hat{A}$ es obtuso entonces $\hat{A} = 138°\ 11'\ 22{,}8''$. En ese caso, por el teorema del coseno,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC}$$

Entonces,

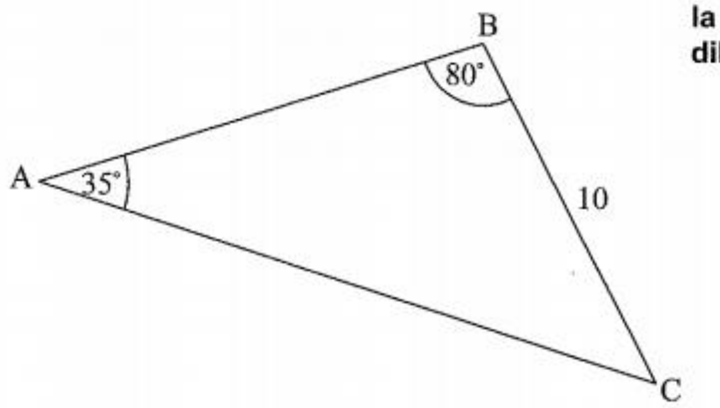
$$BC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos(138°\ 11'\ 22{,}8'') \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad BC^2 = 36 + 64 - 96 \cdot (-0{,}745) = 171{,}554\ cm \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad BC = \sqrt{171{,}554} \approx 13{,}098\ cm$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Matemáticas NM P2, Mayo 2015 ej 1)**

3. La siguiente figura muestra al triángulo ABC



$$BC = 10\ cm\ \ ,\ \ \widehat{ABC} = 80°\ y\ \widehat{BAC} = 35°$$

a) Halle AC. (0,5 puntos)

b) Halle el perímetro del triángulo ABC. (0,5 puntos)

c) Halle el área del triángulo ABC (0,5 puntos)

LA WEB DEL PROFE DE MATES

a) Halle AC.

Por el teorema del seno,

$$\frac{sen\left(\widehat{BAC}\right)}{BC} = \frac{sen\left(\widehat{ABC}\right)}{AC}$$

Entonces,

$$\frac{sen\ (35°)}{10} = \frac{sen\ (80°)}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad AC = \frac{10 \cdot sen\ (80°)}{sen\ (35°)} \approx 17{,}17\ cm$$

b) Halle el perímetro del triángulo ABC.

El ángulo $\widehat{ACB}$ mide,

$$\widehat{ACB} = 180° - \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 180° - 35° - 80° = 65°$$

Calculamos el lado AB. Por el teorema del seno,

$$\frac{sen\left(\widehat{BAC}\right)}{BC} = \frac{sen\left(\widehat{ACB}\right)}{AB}$$

Entonces,

$$\frac{sen\,(35°)}{10} = \frac{sen\,(65°)}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad BC = \frac{10 \cdot sen\,(65°)}{sen\,(35°)} \approx 15{,}8\ cm$$

Por lo tanto, el perímetro del triángulo ABC es,

$$Perímetro(ABC) = AB + BC + AC = 10\ cm + 15{,}8\ cm + 17{,}17\ cm = 42{,}97\ cm$$

c) Halle el área del triángulo ABC **(0,5 puntos)**

Por la fórmula de Herón, el área del triángulo ABC,

$$Área(ABC) = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

con semi-perímetro s,

$$s = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{42{,}97\ cm}{2} = 21{,}485\ cm$$

Por lo tanto, el área del triángulo es,

$$Área(ABC) = \sqrt{21{,}485 \cdot (21{,}485 - 10) \cdot (21{,}485 - 15{,}8) \cdot (21{,}485 - 17{,}17)} =$$

$$= \sqrt{21{,}485 \cdot 11{,}485 \cdot 5{,}685 \cdot 4{,}315} \approx 77{,}802\ \ cm^2$$

LA WEB DEL
PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Análisis y Enfoques NS P2, Mayo 2022 ej.5)**

4. Considere el siguiente desarrollo de la potencia de un binomio:

$$(x+1)^7 = x^7 + ax^6 + bx^5 + cx^4 + \cdots + 1, \ \ donde \ \ y \ \ a, b, c \in \mathbb{Z}$$

(a) Demuestre calculándolo que $b = 21$. (0,5 puntos)

(b) Para algunos valores $x \neq 0$,el término de grado 5 del desarrollo es la media del término de grado seis y término de grado cuatro del desarrollo, halle los posibles valores de x. (1 punto)

(a) Demuestre calculándolo que $b = 21$.

Como,

$$(x+1)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \cdot x^{7-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \cdot x^{7-k}$$

entonces el valor de k para obtener el grado cinco es,

$$7 - k = 5 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

y el coeficiente del grado cinco ($k = 2$) será,

$$\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

Por lo tanto, $b = 21$.

(b) Para un determinado valor $x \neq 0$,el término de grado 5 del desarrollo es la media del término de grado seis y término de grado cuatro del desarrollo, halle los posibles valores de x.

El término de grado 5 ($k = 2$) será,

$$\binom{7}{2} \cdot x^5 = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} x^5 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} x^5 = \frac{7 \cdot 6}{2!} x^5 = \frac{7 \cdot 6}{2} x^5 = 21x^5$$

El término de grado seis ($k = 1$) será,

$$\binom{7}{1} x^{7-1} = \frac{7!}{1! \cdot (7-1)!} \cdot x^6 = \frac{7!}{1! \cdot 6!} x^6 = 7x^6$$

El término de grado cuatro ($k = 3$) será,

$$\binom{7}{3} x^{7-3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} \cdot x^4 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} x^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} x^4 = 35x^4$$

Como el término de grado 5 del desarrollo es la media del término de grado seis y término de grado tres del desarrollo entonces,

$$21x^5 = \frac{7x^6 + 35x^4}{2} \Leftrightarrow 42x^5 = 7x^6 + 35x^4 \Leftrightarrow 6x = x^2 + 5 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{6+4}{2} = 5 \\ x = \dfrac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $x = 1$ o $x = 5$.

LA WEB DEL PROFE DE MATES

Puntuación máxima: 2 puntos]

5. (a) Considere el conjunto de números enteros positivos de seis cifras que se pueden formar con las cifras $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Halle cuántos números enteros positivos de seis cifras **con centena de millar distinta de cero** se pueden formar y que cumplan lo siguiente en cada apartado:

(i) Las cifras son todas distintas. (0,5 puntos)

(ii) Los números son capicúa pudiéndose repetir cifras. (0,5 puntos)

(b) Demuestra por inducción matemática que (1 punto)

$$7^n - 1 \text{ es múltiplo de 6 para cualquier } n \in \mathbb{N}$$

(a) i) Las cifras son todas distintas.

Elegimos la unidad de millón entre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. El resto de las cinco posiciones que quedan las completamos con cinco de los 9 números que quedan teniendo en cuenta que no se pueden repetir

$$7 \cdot V_{7,5} = 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 17\,640 \; números$$

(a) ii) Los números son capicúa.

Formamos tríos en los que la primera cifra no sea 0 y puedan repetir cifras.

$$7 \cdot VR_{8,2} = 7 \cdot 8^2 = 448 \; números$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

(b) Demuestra por inducción matemática que

$$\mathbf{7^n - 1 \text{ es múltiplo de 6 para cualquier } n} \in \mathbb{N}$$

- Probamos el caso para $n = 1$

$$7^1 - 1 = 7 - 1 = 6 \; que \; es \; múltiplo \; de \; 6 \;\; \surd$$

- Suponemos cierto el caso $n = k$, es decir, que $7^k - 1$ *es múltiplo de* 6, y probaremos el caso $n = k + 1$, es decir, que $7^{k+1} - 1$ *es múltiplo de* 6.

  En ese caso,

$$7^{k+1} - 1 = 7^k \cdot 7 - 1 \quad (1)$$

  Como $7^k - 1$ *es múltiplo de* 6 entonces,

$$\exists\, p \in \mathbb{N} \;\; , \;\; 7^k - 1 = 6p \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, p \in \mathbb{N} \;\; , \;\; 7^k = 6p + 1$$

  Entonces, volviendo a (1) tendremos que

$$7^{k+1} - 1 = 7^k \cdot 7 - 1 = (6p + 1) \cdot 7 - 1 = 6p \cdot 7 + 7 - 1 = 6 \cdot (7p) + 6 = 6 \cdot (7p + 1)$$

  Por lo tanto, $7^{k+1} - 1$ es múltiplo de 6 y la inducción queda completada.

La conclusión es que $\mathbf{7^n - 1}$ **es múltiplo de 6 para cualquier** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

6. (a) Considere la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$. Usando la factorización del polinomio, y sabiendo que sus raíces que son $x = sen\,\theta$ y $x = cos\,\theta$, muestre que $b^2 = a^2 + 2ac$. (0,75 puntos)

(b) Demuestre, sin utilizar la calculadora, la siguiente igualdad, (0,75 puntos)

$$\frac{sen\,2a}{1 - sen^2 a} = 2 \cdot tan\,a$$

(a) Considere la ecuación $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, donde $\boldsymbol{a \neq 0}$. Sabiendo que las raíces de esta ecuación son $\boldsymbol{x = sen\,\theta}$ y $\boldsymbol{x = cos\,\theta}$, muestre que $\boldsymbol{b^2 = a^2 + 2ac}$.

La factorización del polinomio es,

$$a \cdot (x - sen\,\theta) \cdot (x - cos\,\theta)$$

Por lo tanto, el término independiente es,

$$c = a \cdot sen\theta \cdot cos\,\theta$$

Y el coeficiente de grado uno es,

$$b = a \cdot (-sen\theta - cos\,\theta)$$

En ese caso,

$$b^2 = a^2 \cdot (-sen\,\theta - cos\,\theta)^2 = a^2 \cdot (sen^2\theta + cos^2\theta + 2sen\,\theta \cdot cos\,\theta) =$$
$$= a^2 \cdot (1 + 2sen\,\theta \cdot cos\,\theta) = a^2 + 2a \cdot sen\,\theta \cdot cos\,\theta = a^2 + 2ac$$

Por lo tanto,

$$b^2 = a^2 + 2ac$$

(b) Demuestre, sin utilizar la calculadora, la siguiente igualdad, (0,75 puntos)

$$\frac{sen\,2a}{1 - sen^2 a} = 2 \cdot tan\,a$$

Como

$$sen\,2a = 2 \cdot sen\,a \cdot \cos a$$

Y

$$sen^2 a + \cos^2 a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 a = 1 - sen^2 a$$

Entonces,

$$\frac{sen\,2a}{1 - sen^2 a} = \frac{2sen\,a \cdot \cos a}{cos^2 a} = \frac{2sen\,a}{\cos a} = 2 \cdot \tan a$$

LA WEB DEL PROFE DE MATES

[Puntuación máxima: 2 puntos]

7. Sea $sen\ 80° = m$ y $cos\ 65° = n$. Halle una expresión en función de m y/o n para cada uno de los siguientes elementos, usando para ello fórmulas trigonométricas y nunca la calculadora.

$a)$ sen 160° $\quad$ $b)$ cos 15° $\quad$ $c)$ tan 130° $\quad$ $d)$ cos 32,5°

Solución.

$\boldsymbol{a)}$ **sen 160°**

Como

$$\text{sen } 160° = 2 \cdot \text{sen } 80° \cdot \cos 80°$$

Calculamos primeramente cos 80°. Mediante la igualdad fundamental de la trigonometría y sabiendo que el seno de 80° tendrá signo positivo al ser un ángulo del primer cuadrante, tendremos,

$$\text{sen}^2\, 80° + cos^2\, 80° = 1 \quad \Leftrightarrow \quad sen^2\, 80° + m^2 = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad cos^2\, 80° = 1 - m^2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 80° = \sqrt{1 - m^2}$$

En ese caso, aplicando la fórmula del seno del ángulo doble,

$$\text{sen } 160° = 2 \cdot \text{sen } 80° \cdot \cos 80° = 2 \cdot m \cdot \sqrt{1 - m^2}$$

$\boldsymbol{b)}$ **cos 15°**

Mediante la fórmula de la adición,

$$\cos 15° = \cos(80° - 65°) = \cos 80° \cdot \cos 65° + sen\ 80° \cdot sen\ 65° =$$

$$= \sqrt{1 - m^2} \cdot n + m \cdot \sqrt{1 - n^2}$$

$\boldsymbol{c)}$ **tan 130°**

Aplicando la fórmula de la tangente,

$$\tan 160° = \frac{sen\ 65º}{\cos 65º} = \frac{2 \cdot sen\ 65° \cdot \cos 65°}{cos^2\, 65° - \text{sen}^2\, 65°} = \frac{2 \cdot \sqrt{1 - n^2} \cdot n}{n^2 - \left(\sqrt{1 - n^2}\right)^2} = \frac{2 \cdot n \cdot \sqrt{1 - n^2}}{2n^2 - 1}$$

$\boldsymbol{d)}$ **cos 32,5°**

Aplicando la fórmula del coseno del ángulo mitad,

$$\cos 32{,}5° = \sqrt{\frac{1 + \cos 65°}{2}} = \sqrt{\frac{1 + n}{2}}$$