2 º BACH. – MATEMÁTICAS II

DISTANCIAS Y ÁNGULOS ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS. PUNTOS, RECTAS Y PLANOS SIMÉTRICOS Y PROYECCIONES ORTOGONALES

UNIDAD 14

A. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

14.1. Dados los siguientes segmentos, calcular las coordenadas de sus puntos medios.

$a)\ AB\ con\ A(1,2,3)\ y\ B(3,-2,1)$ $\quad$ $b)\ PQ\ con\ P(2{,}32,7)\ y\ Q(-3,-5,0)$

$c)\ RS\ con\ R(-1,2,-4)\ y\ S(1,-1,-1)$ $\quad$ $d)\ MNcon\ M(-4,1´5,5)\ y\ N(3´5,0´5,2)$

14.2. Dados los puntos $A(-2,3,-1)$, $B(4,-2,3)$ y $C(2,2,-1)$, calcular los puntos medios de los lados del triángulo ABC.

14.3. Dados los puntos $A(-1,2,-1)$, $B(2,-3,3)$ y $C(-3,-1,1)$, calcular las coordenads del paralelogramo $ABDC$. Calcular las coordenads del centro del paralelogramo.

B. DISTANCIAS ENTRE PUNTOS Y RECTAS O PLANOS, DISTANCIA ENTRE RECTAS Y PLANOS PARALELOS

14.5. Dada la recta $r \equiv \frac{x}{2} = y = z$ y el punto $P(-1{,}1,3)$, calcula la distancia entre el punto P y la recta r.

14.6. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ -3x + y - z = 0 \end{cases}$ y el punto $Q(2{,}1,2)$, calcula la distancia entre el punto Q y la recta r.

14.7. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = -1 \\ y - z = \ \ \ 1 \end{cases}$ y el punto $Q(a, 1-a, 1)$, calcula los valores de a para que la distancia entre el punto Q y la recta r sea de $\frac{2\sqrt{2}}{3}\ u$.

14.8. Dado el plano $\pi \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$ y el punto $P(2,-1{,}0)$, calcula la distancia mínima entre el punto P y el plano π.

14.9. Dado el plano $\pi \equiv (x,y,z) = (0{,}2{,}0) + t \cdot (1{,}1{,}1) + s \cdot (0{,}1,-1)$, $t,s \in \mathbb{R}$ y el punto $Q(1{,}0,-1)$, calcula la distancia mínima entre el punto Q y el plano π.

14.10. Dado el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ y el punto $P(m, 0, m+1)$, calcula los valores de m para que la distancia entre el punto P y el plano π sea de $\frac{\sqrt{6}}{6}\ u$.

14.11. Dadas las rectas $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{4}$ y $r´ \equiv \begin{cases} 2y - \ \ z = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$, demuestra que son paralelas y calcula la distancia mínima entre ellas.

14.12. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$, demuestra que son paralelas y calcula la distancia mínima entre ellas.

14.13. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2y + z - 2 = 0$, demuestra que son paralelas y calcula la distancia mínima entre la recta r y el plano π.

14.14. Dada la recta $r \equiv \frac{2x-4}{2} = 2 - y = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y - z = 4$, demuestra que son paralelas y calcula la distancia mínima entre la recta r y el plano π.

14.15. Dados los planos $\pi \equiv x + 2y - z = 3$ y $\pi' \equiv -x - 2y + z = 7$, demuestra que son paralelos y calcula la distancia mínima entre ellos.

14.16. Dados los planos $\pi \equiv 4x + 6y - 2z = 5$ y $\pi' \equiv 6x + 9y - 3z = 14$, demuestra que son paralelos y calcula la distancia mínima entre ellos.

14.17. Dado el plano $\pi \equiv x - y - z = a$ con $a \in \mathbb{R}$, y el plano $\pi' \equiv x - y - z = 4$, calcula el valor de a para que los planos disten entre sí 2 unidades.

C. ÁNGULOS ENTRE RECTAS Y PLANOS SECANTES

14.21. Dadas las rectas secantes $r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$ y $r' \equiv \begin{cases} x - y - z = -5 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$, calcular el punto en que se cortan y el ángulo agudo que forman.

14.22. Dadas las rectas secantes $r \equiv \begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x + y = -1 \\ x - z = 1 \end{cases}$, calcular el punto en que se cortan y el ángulo agudo que forman.

14.23. Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z = -1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y - z = -2 \end{cases}$, calcula el punto donde se cortan y el ángulo agudo que forman.

14.24. Dado el plano $\pi \equiv (x, y, z) = (2,1,-2) + t \cdot (1,0,1) + s \cdot (0,1,1)$, $t, s \in \mathbb{R}$ y la recta que pasa por los puntos $P(2,0,3)$ y $Q(1,2,1)$, calcula el punto en que se cortan y el ángulo agudo que forman.

14.25. Dados los planos secantes $\pi \equiv x - 3y + 2z = 1$ y el plano $\pi' \equiv 2x + y + 3z = 1$ calcula las ecuaciones paramétricas de la recta en que se cortan y el ángulo agudo que forman.

14.26. Dados los planos secantes

$$\pi \equiv (x,y,z) = (1,1,-1) + t \cdot (0,1,1) + s \cdot (1,0,-1) \quad , \quad t,s \in \mathbb{R}$$

$$\pi' \equiv x + z = 2$$

calcula las ecuaciones paramétricas de la recta en que se cortan y el ángulo agudo que forman.

D. PUNTO Y RECTA SIMÉTRICOS DESPECTO A UNA RECTA, PUNTO, RECTA Y PLANO SIMÉTRICO RESPECTRO DE UN PLANO

14.31. Dada la recta $r \equiv \frac{3x-6}{3} = y = \frac{z}{2}$ y el punto $P(1,0,2)$, calcula el punto simétrico P' del punto P respecto de la recta r.

14.32. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -3x + y - z = 1 \end{cases}$ y el punto $Q(2,-1,1)$, calcula el punto simétrico Q' del punto Q respecto de la recta r.

14.33. Calcula la recta de simetría ortogonal respecto de la cual el punto $Q(2,-1,1)$, se transforma mediante dicha simetría en el punto $Q'(2,-1,1)$,

14.34. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$ calcula la recta simétrica de la recta r respecto de la recta r'.

14.35. Dadas las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = y + 2 = \frac{z-1}{-3}$ y $r' \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ calcula la recta simétrica de la recta r respecto de la recta r'.

14.36. Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y}{3} = 2z + 1$ y $r' \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ calcula la recta simétrica de la recta r respecto de la recta r'.

14.37. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - \ \ y + z = 4 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x + y = -1 \\ x - z = \ \ 1 \end{cases}$ calcula la recta simétrica de la recta r respecto de la recta r'.

14.38. Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + z + 3 = 0$ y el punto $P(1,1,-1)$, calcula el punto simétrico P' del punto P respecto del plano π.

14.39. Dado el plano $\pi \equiv (x,y,z) = t \cdot (1,0,1) + s \cdot (0,1,-1) \quad , \quad t,s \in \mathbb{R}$ y el punto $Q(1,0,-1)$, calcula el punto simétrico Q' del punto Q respecto del plano π.

14.40. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = \ \ 2 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y + z = 2$ calcula la recta simétrica de la recta r respecto del plano π.

14.41. Dada la recta $r \equiv \frac{x+2}{3} = 1 - y = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ calcula la recta simétrica de la recta r respecto del plano π.

14.42. Dada la recta $r \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = 2z + 1$ y el plano $\pi \equiv x + 2z = 3$ calcula la recta simétrica de la recta r sobre el plano π.

14.43. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} -x - 2y + z = -2 \\ 2x + 3y - z = \ \ 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + y = 0$ calcula la recta simétrica de la recta r respecto del plano π.

14.44. Dado el plano $\pi \equiv x + y - z = 1$ y el plano $\pi' \equiv -2x - 2y + 2z = 3$ calcula el plano simétrico del plano π sobre el plano π'.

14.45. Dado el plano $\pi \equiv 3x - 2y - z = 2$, calcula el plano π' sobre el que se ha realizado su simetría para que su plano simétrico sea $\pi'' \equiv 3x - 2y - z = 9$.

E.PROYECCIONES ORTOGONALES RESPECTO DE RECTA Y PLANO

14.51. Dada la recta $r \equiv x = y - 1 = \frac{z}{2}$ y el punto $P(1,2,-2)$, calcula la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r.

14.52. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -2x \quad - \quad z = 2 \end{cases}$ y el punto $Q(-2,1,1)$, calcula la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r.

14.53. Dado el plano $\pi \equiv x - y - 1 = 0$ y el punto $P(2,1,0)$, calcula la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π.

14.54. Dada el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = \ \ 2 + \ \ t - 2s \\ y = \ \ 1 + \ \ t + \ \ s \\ z = -1 + 3t - 2s \end{cases}$, $t, s \in \mathbb{R}$ y el punto $Q(1,0,-1)$, calcula la proyección ortogonal del punto P sobre el plano π.

14.55. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ x + y \quad - \quad z = 3 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x - 3y + z = 2$ calcula la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

14.56. Dada la recta $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{2y-1}{2} = z - 1$ y el plano $\pi \equiv y - z = 1$ calcula la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

14.57. Dada la recta $r \equiv \frac{3x+1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-2}$ y el plano $\pi \equiv x + y - 2z = 4$ calcula la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

14.58. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + z = -2 \\ 3x + 2y - z = \quad 1 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x + 5y - 2z = 0$ calcula la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.