

A. ECUACIONES DE LA RECTA EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

13.1. Determina la ecuación vectorial, paramétrica, continua y las ecuaciones implícitas de cada una de las rectas que cumplen las siguientes premisas,

a) Recta r que pasa por los puntos $A(1,2,3)$ y $B(-1,3,-2)$.

b) Recta r' que pasa por el punto $P(0,2,-1)$ sigue la dirección $\vec{u} = (1,-1,2)$.

c) Recta r'' que pasa por el punto $Q(1,2,3)$ y es paralela a la recta

$$s \equiv (x,y,z) = (2,1,-1) + (1,0,1) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}$$

d) Recta r''' que pasa por el punto $R(0,2,-1)$ y es perpendicular al plano

$$\pi \equiv x - y + z = 2$$

13.2. Determina el un punto y un vector director de cada una de las rectas dadas por las siguientes ecuaciones

a) Recta $r \equiv (x,y,z) = (0,0,1) + t \cdot (1,-2,1), \quad t \in \mathbb{R}$.

b) Recta $r' \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 + 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$.

c) Recta $r'' \equiv \frac{x-4}{-3} = y + 2 = \frac{z+3}{-5}$

d) Recta $r''' \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$

e) Recta $r'''' \equiv -x + 2 = \frac{3y+2}{2} = \frac{z+1}{3}$

f) Recta $r'''''' \equiv \begin{cases} -x + \quad - z = 1 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$

13.3. Determina el resto de ecuaciones (ecuación vectorial, paramétrica, continua y las ecuaciones implícitas) de cada una de las rectas dadas por las siguientes ecuaciones

a) Recta $r \equiv (x,y,z) = (2,-1,-1) + t \cdot (0,1,-2), \quad t \in \mathbb{R}$.

b) Recta $r' \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t + 2 \\ z = -1 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$.

c) Recta $r'' \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = z + 1$

d) Recta $r''' \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

e) Recta $r'' \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{2y-3}{3} = \frac{-z+1}{5}$

f) Recta $r''' \equiv \begin{cases} 2y + z = -1 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases}$

13.4. Comprueba si los puntos $A(1,2,-1)$ y $B(3,0,-1)$ pertenecen a las siguientes rectas,

a) Recta $r \equiv (x,y,z) = (1,0,1) + t \cdot (0,1,-1)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Recta $r' \equiv \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 3 - 2t \\ z = -1 \end{cases} = , t \in \mathbb{R}$.

c) Recta $r'' \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+3}{3} = z + 2$

d) Recta $r''' \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$

13.5. Determina las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones implícitas de los ejes de coordenadas OX, OY, OZ .

13.6. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - 3z = 2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$, calcula la ecuación paramétrica de la recta r y las ecuaciones implícitas de una recta r' paralela a ella y que pasa por el punto $A(1,-2,1)$.

13.7. Dada la recta s que pasa por los puntos $P(3,-1,-1)$ y $Q(-2,1,2)$. calcula la ecuación paramétrica de una recta paralela a ella y que pasa por el punto $R(0,-1,0)$.

13.8. Dada la recta $r' \equiv \frac{2x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{2}$, calcula la ecuaciones implícitas de una recta paralela a ella y que pasa por el punto $A(0,1,1)$.

13.9. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} -2y + z = 3 \\ -2x - z = 2' \end{cases}$, calcula su ecuación continua y las ecuaciones implícitas de una recta r' paralela a ella y que pasa por el punto $P(2,-1,3)$.

B. ECUACIONES DEL PLANO EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

13.11. Determina la ecuación vectorial, paramétrica e implícita o general (cartesiana) de cada uno de los planos que cumplen las siguientes premisas,

a) Plano π que pasa por los puntos $A(0, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$ y $C(2, 0, 1)$.

b) Plano π' que pasa por el punto $P(2, 3, 1)$ y sigue las direcciones $\vec{u} = (-1, -1, 0)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$

c) Plano π'' que pasa por el punto $Q(4, -3, 5)$ y es paralelo al plano

$$\pi''' \equiv (x, y, z) = (0, 2, -3) + (1, 3, -1) \cdot t + (3, 0, 1) \cdot s, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

d) Recta π'''' que pasa por el punto $R(0, 2, -1)$ y es perpendicular a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

13.12. Determina dos puntos, dos vectores directores y uno normal a cada uno de los siguientes planos,

a) Plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$

b) Plano $\pi' \equiv (x, y, z) = (1, 0, 2) + (0, 2, 1) \cdot t + (2, -1, 0) \cdot s, \quad t, s \in \mathbb{R}$.

c) Plano $\pi'' \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t + s \\ y = 2t \\ z = 2 - t - s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}$.

d) Plano π'''' que pasa por el punto $P(1, -1, 1)$ y es paralelo al plano

$$\pi''' \equiv y + z = 4$$

e) Plano $\pi' \equiv (x, y, z) = (-1, 0, 0) + (1, 1, -1) \cdot t + (-1, 1, -1) \cdot s, \quad t, s \in \mathbb{R}$.

f) Plano $\pi'' \equiv \begin{cases} x = 2 + t - 2s \\ y = 1 + t + s \\ z = -1 + 3t - 2s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}$.

13.13. Dado la recta r que pasa por los puntos $P(2, 1, 2)$ y $Q(1, 1, 2)$ calcula la ecuación del plano π que contiene a la recta r y al que pertenece el punto $R(1, -1, 1)$.

13.14. Determina algebraicamente la ecuación implícita de un plano π que pasa por los puntos $A(3, -1, 1)$ y $Q(2, 1, -1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ -2x - y = 1 \end{cases}$.

13.15. Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{-z+1}{3}$ y $r' \equiv \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$, calcula la ecuación general de un plano π paralelo a las dos rectas que pase por el punto $Q(1, 2, -1)$.

13.16. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} -2y + z = 3 \\ -2x - z = 2 \end{cases}$, calcula su ecuación general de un plano π perpendicular a ella y que pasa por el punto $P(1, -1, 1)$.

13.17. Determina algebraicamente la ecuación implícita de un plano π paralelo al plano $\pi' \equiv 2x - z = 1$ y que pasa por el punto $P(3, 0, -1)$.

13.18. Determina las ecuaciones paramétricas y la ecuación implícita de,

a) El plano OXY que contiene al eje OX y al eje OY .

b) El plano OXZ que contiene al eje OX y al eje OZ .

c) El plano OYZ que contiene al eje OY y al eje OZ .

13.19. Calcula la ecuación implícita del plano π al que pertenece la recta $r \equiv \begin{cases} -x + y - z = 2 \\ 3y - z = 1 \end{cases}$ y es paralelo al plano $\pi' \equiv 2x - y - 3z - 1 = 0$.

13.20. Calcula la ecuación implícita del plano π al que pertenece la recta $r \equiv \begin{cases} y + z = 3 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi' \equiv x + y - 2z = 0$.

13.21. Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r que está contenida en el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 6$ que pasa por el punto $P(0, 1, 1)$ y corta a la recta $s \equiv \frac{x-2}{2} = y = 1 - z$.

13.22. Calcula la ecuación general del plano π que contiene al punto $P(2, 1, 3)$ es paralelo a la recta $s \equiv \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2}$ y es perpendicular al plano $\pi' \equiv x + z = 2$.

13.23. Dadas las rectas $r \equiv 2x + 1 = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$, calcular la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

13.24. Dado la recta r que pasa por los puntos $P(-3, 2, 1)$ y $Q(-1, 4, -5)$ calcula la ecuación del plano π que contiene al punto medio del segmento PQ y es perpendicular la recta r .

C. POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS. INCIDENCIA. CÁLCULO DE RECTAS Y PLANOS.

13.31. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas. En caso de que se corten, calcula su intersección.

a) $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad r' \equiv \begin{cases} y - z = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

b) $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases} \quad \text{y} \quad r' \equiv \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$

c) $r \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases} \quad \text{y} \quad r' \equiv \frac{x+1}{2} = y + 1 = -z$

d) $r \equiv \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 - t \\ z = 6 - 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad r' \equiv x + 2 = 2y = \frac{z}{3}$

13.32. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas y planos. En caso de que se corten, calcula su intersección.

a) $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t + s \\ y = -1 + t \\ z = 1 - s \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad r' \equiv \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

b) $\pi \equiv 3x - 4y + 3z = 1 \quad \text{y} \quad r' \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2}$

d) $\pi \equiv x - 3y + z - 4 = 0 \quad \text{y} \quad r' \equiv \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$

13.33. Estudia la posición relativa de los siguientes planos. En caso de que se corten, calcula su intersección.

a) $\pi \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t + s \\ z = -1 - 2t - s \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \pi' \equiv \begin{cases} x = 2t + s \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2s \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b) $\pi \equiv -x + 3y + 2z = 1$ y $\pi' \equiv \begin{cases} x = -t - 2s \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t - s \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

c) $\pi \equiv 2x - 3y + 4z = 1$ y $\pi' \equiv -3x + 4,5y - 6z + 1,5 = 0$

13.34. Estudia la posición relativa de los siguientes tríos de planos. En caso de que se corten, calcula su intersección.

a) $\pi \equiv x - y + 2z = 2$
 $\pi' \equiv -2x - 4y + z = 1$
 $\pi'' \equiv x - 7y + 6z = 7$

b) $\pi \equiv x + 2y = -1$
 $\pi' \equiv -y + 2z = 3$
 $\pi'' \equiv x + 3z = 4$

c) $\pi \equiv 3x + 2y + z = 2$
 $\pi' \equiv -x - 3y - z = 1$
 $\pi'' \equiv 2x - 4y - z = 4$

d) $\pi \equiv x - y + z = -1$
 $\pi' \equiv -2x + 2y - 2z = 3$
 $\pi'' \equiv 4x - 4y + 4z = -5$

13.35. Determina la posición relativa de los siguientes tríos de planos en función del parámetro $k \in \mathbb{R}$.

a) $\pi \equiv x - ky + z = 1 + k$
 $\pi' \equiv 2x + y + kz = k$
 $\pi'' \equiv kx - y + 2z = 2$

b) $\pi \equiv kx + 2y - kz = 2k$
 $\pi' \equiv -ky - z = -k$
 $\pi'' \equiv x + z = 1 - k$

D. ECUACIÓN DE LA PERPENDICULAR COMÚN DE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN.
DISTANCIA ENTRE ELLAS.

13.41. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ y $r' \equiv \begin{cases} y - z = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$,

- Demuestra que las rectas se cruzan
- Calcula unas ecuaciones implícitas de la recta perpendicular común.
- Calcula la distancia entre r y r' .

13.42. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y + z = -3 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$ y $r' \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{2}$,

- Demuestra que las rectas se cruzan
- Calcula unas ecuaciones implícitas de la recta perpendicular común.
- Calcula la distancia entre r y r' .

13.43. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ y $r' \equiv \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$,

- Demuestra que las rectas se cruzan
- Calcula unas ecuaciones implícitas de la recta perpendicular común.
- Calcula la distancia entre r y r' .

