A. PUNTOS COLINEALES Y COPLANARIOS. COORDENADAS DE UN VECTOR. OPERACIONES CON VECTORES. MÓDULO DE UN VECTOR. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

12.1. Dadas las siguientes colecciones de puntos, determinar cuáles son colineales, cuáles coplanarias y cuáles ni lo uno ni lo otro.

$a)\ \ S = \{ (-2,1,1),\ \ (3,4,3),\ \ (8,7,5),\ \ (18,13,9)\}$

$b)\ \ S' = \{ (0,-1,0,1),\ \ (-1,1,-1,1),\ \ (2,-5,2,1), (-1,-3,1,1)\}$

$c)\ \ S'' = \{ (2,6,-4),\ \ (-1,-3,2),\ \ (-3,-9,6)\}$

$d)\ \ S''' = \{ (0,1,1),\ \ (1,3,0),\ \ (-2,-3,3)\}$

12.2. Demuestra que los siguientes puntos están en la misma recta,

$$A(0,3,-1)\quad ,\quad B(-1,4,-3)\quad ,\quad C(1,2,1)\quad ,\quad D(2,1,3)$$

12.3. Demuestra que los siguientes puntos están en el mismo plano,

$$A(1,-1,1)\quad ,\quad B(3,0,-1)\quad ,\quad C(4,2,-4)\quad ,\quad D(2,4,-6)$$

12.4. Demuestra que los siguientes puntos forman un triángulo

$$A(4,-2,1)\quad ,\quad B(-2,0,2)\quad ,\quad C(3,2,1)$$

12.5. Dados los puntos siguientes,

$$A(1,2,3)\quad ,\quad B(2,-1,0)\quad ,\quad C(-2,1,2)\quad ,\quad D(-3,2,-1)$$

Calcule las coordenadas libres de los vectores,

$a)\ \ \overrightarrow{AB}$	$b)\ \ \overrightarrow{BC}$	$c)\ \ \overrightarrow{CA}$	$d)\ \ \overrightarrow{DA}$
$e)\ \ \overrightarrow{BA}$	$f)\ \ \overrightarrow{CB}$	$g)\ \ \overrightarrow{CD}$	$h)\ \ \overrightarrow{BD}$

12.6. Dados las coordenadas libres de los siguientes vectores,

$$\vec{u} = (2,-1,4)\quad ,\quad \vec{v} = 3\,\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}\quad ,\quad \vec{w} = (-3,0,4)\quad ,\quad \vec{r} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\,\vec{k}$$

Calcule el módulo de cada vector

12.7. Dados las coordenadas libres de los siguientes vectores,

$$\vec{u} = (2,1,5) \quad , \quad \vec{v} = -\vec{j} + 2\vec{k} \quad , \quad \vec{w} = (3,4,-2) \quad , \quad \vec{r} = 12\vec{i} + 13\vec{j}$$

a) Calcule el vector con el mismo sentido que los dados y unitario.
b) Calcule un vector con el mismo sentido que los dados pero de módulo 2.
c) Calcule un vector con sentido contrario a los dados y con módulo 3.

12.8. Dados las coordenadas libres de los siguientes vectores,

$$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad , \quad \vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \quad , \quad \vec{w} = \vec{i} + 3\vec{k} \quad , \quad \vec{r} = (1,-1,-2)$$

$a)\ \vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$ $\qquad b)\ 3\vec{v} + 4\vec{w} - \vec{r}$ $\qquad c)\ \vec{w} - 2\vec{r} + \vec{u} + \vec{v}$ $\qquad d)\ \vec{u} - \vec{v} + \vec{w} - \vec{r}$

$e)\ \vec{w} - \vec{u} - 2\vec{v}$ $\qquad f)\ \vec{u} - 3\vec{w} + 2\vec{r}$ $\qquad g)\ \vec{v} - 2\vec{w} + 3\vec{r}$ $\qquad h)\ \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{r}$

12.9. Determina una base para las siguientes colecciones de vectores y señala qué generan

$a)\ S = \{(1,-1,0),\ (5,-2,-4),\ (3,0,-2)\}$

$b)\ S' = \{(1,-1,0,3),\ (0,-1,-3,2),\ (-1,-1,-3,4), (-2,1,0,-1)\}$

$c)\ S'' = \{(2,6,-4),\ (-1,-3,2),\ (-3,-9,6)\}$

$d)\ S''' = \{(2,1,-2),\ (1,0,1),\ (3,2,2)\}$

$e)\ S'''' = \{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k},\ \vec{i} - \vec{j} - \vec{k},\ 2\vec{i} + 3\vec{k}\}$

12.10. Dados los puntos siguientes,

$$A(1,-1,0) \quad , \quad B(-1,2,3) \quad , \quad C(2,5,2)$$

Comprobar que generan un triángulo y calcular los puntos medios de sus lados.

12.11. Dados los puntos siguientes,

$$A(2,-1,0) \quad , \quad B(1,3,-1) \quad , \quad C(3,-2,4) \quad , \quad D(4,-4,-2)$$

Calcule las coordenadas de los puntos medios de los lados del cuadrilátero $ABCD$ y los puntos medios de sus diagonales. ¿Cuándo coincidirán los puntos medios de sus diagonales?

12.12. A partir de los puntos $A(4,-1,-1)\ y\ B(1,3,-1)$ da otros dos puntos que hagan que ABCD sea un cuadrado.

12.13. A partir de los puntos $A(-2,1,-9)\ y\ B(4,1,-1)$ da otros dos puntos que hagan que ABCD sea un rectángulo de área $20\ u^2$.

B. PRODUCTO ESCALAR. ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES. ORTOGONALIDAD DE VECTORES.

12.16. Tenemos tres vectores libres de los que sabemos que,

$$|\vec{u}| = 2 \quad , \quad |\vec{v}| = \sqrt{8} \quad , |\vec{w}| = 4$$

$$Ángulo(\vec{u},\vec{v}) = 30° \quad , \quad Ángulo(\vec{v},\vec{w}) = 60° \quad , \quad Ángulo(\vec{w},\vec{u}) = 45°$$

Calcule los productos escalares siguientes,

$a)\ \vec{u}\cdot\vec{v}$ $\quad b)\ \vec{u}\cdot\vec{w}$ $\quad c)\ \vec{w}\cdot\vec{v}$ $\quad d)\ \vec{v}\cdot\vec{u}$

12.17. Dados los siguientes vectores, calcula los productos escalares que se piden,

$$\vec{u} = \vec{\imath} + 2\,\vec{k} \quad , \quad \vec{v} = 3\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + \vec{k} \quad , \quad \vec{w} = 2\vec{\imath} - 6\,\vec{k} \quad , \quad \vec{r} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\,\vec{k}$$

$a)\ \vec{u}\cdot\vec{w}$ $\quad b)\ \vec{w}\cdot\vec{r}$ $\quad c)\ \vec{u}\cdot\vec{r}$ $\quad d)\ \vec{v}\cdot\vec{w}$

$e)\ \vec{w}\cdot\vec{u}$ $\quad f)\ \vec{u}\cdot\vec{r}$ $\quad g)\ \vec{v}\cdot\vec{r}$ $\quad h)\ \vec{w}\cdot\vec{v}$

¿Qué vectores son ortogonales (perpendiculares)?

12.18. Dados las coordenadas libres de los siguientes vectores,

$$\vec{u} = (1,-1,2) \quad , \quad \vec{v} = (1,1,-1) \quad , \quad \vec{w} = (2,4,1) \quad , \quad \vec{z} = (3,-1,2)$$

Determine cuáles son los vectores que son ortogonales (perpendiculares).

12.19. Dado el vector $\vec{u} = (1,-1,2)$, calcula el parámetro en los siguientes vectores no nulos para que sean ortogonales a $\vec{u}$,

$a)\ \vec{v} = (2,1,a)$ $\quad b)\ \vec{w} = (b,-b^2,1)$ $\quad c)\ \vec{r} = (c^4,1,0)$ $\quad d)\ \vec{m} = (d,2d,d^2)$

12.20. Dados los siguientes vectores libres,

$$\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\,\vec{k} \quad , \quad \vec{v} = \vec{\imath} - 3\,\vec{\jmath} + \vec{k} \quad , \quad \vec{w} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} \quad , \quad \vec{r} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\,\vec{k}$$

Calcula los ángulos que forman las siguientes parejas,

$a)\ \vec{u},\vec{w}$ $\quad b)\ \vec{w},\vec{r}$ $\quad c)\ \vec{u},\vec{r}$ $\quad d)\ \vec{v},\vec{w}$

$e)\ \vec{w},\vec{u}$ $\quad f)\ \vec{u},\vec{r}$ $\quad g)\ \vec{v},\vec{r}$ $\quad h)\ \vec{w},\vec{v}$

12.21. Dados los puntos siguientes $A, B\ y\ C$, comprobar que generan un triángulo y calcular los ángulos que forman a partir del producto escalar.

$a)\ A(2,1,-1), B(-1,0,1), C(3,4,-2)$

$b)\ A(0,2,1), B(1,3,2), C(1,0,3)$

$c)\ A(-1,3,2), B(4,0,1), C(2,-2,1)$

12.22. Dados los puntos siguientes $A, B, C\ \ y\, D$ y el cuadrilátero que generan, calcular los ángulos de cada vértice.

$a)\ A(1,2,1), B(2,3,2), C(-1,5,-1), D(0,1,0)$

$b)\ A(3,-1,0), B(2,1,3), C(1,1,-1), D(0,1,-5)$

C. PRODUCTO VECTORIAL. ÁREA DE UN PARALELOGRAMO.

12.31. Tenemos tres vectores libres de los que sabemos que,

$$|\vec{u}| = \sqrt{6} \quad , \quad |\vec{v}| = \sqrt{12} \quad , |\vec{w}| = \sqrt{3}$$

$$Ángulo(\vec{u},\vec{v}) = 60° \quad , \quad Ángulo(\vec{v},\vec{w}) = 45° \quad , \quad Ángulo(\vec{w},\vec{u}) = 30°$$

Calcule los productos vectoriales siguientes,

$a)\ \vec{u} \times \vec{v}$ $\quad b)\ \vec{u} \times \vec{w}$ $\quad c)\ \vec{w} \times \vec{v}$ $\quad d)\ \vec{v} \times \vec{u}$

12.32. Dados los siguientes vectores, calcula los productos vectoriales que se piden,

$$\vec{u} = (1,-3,2) \quad , \quad \vec{v} = 2\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k} \quad , \quad \vec{w} = (2,3,-1) \quad , \quad \vec{r} = -\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + 2\,\vec{k}$$

$a)\ \vec{u} \times \vec{w}$ $\quad b)\ \vec{w} \times \vec{r}$ $\quad c)\ \vec{u} \times \vec{r}$ $\quad d)\ \vec{v} \times \vec{w}$

$e)\ \vec{w} \times \vec{u}$ $\quad f)\ \vec{u} \times \vec{r}$ $\quad g)\ \vec{v} \times \vec{r}$ $\quad h)\ \vec{w} \times \vec{v}$

12.33. Dados los siguientes planos determinados por sus ecuaciones paramétricas, calcula un vector perpendicular a cada uno de ellos,

$$a)\quad \pi \equiv \begin{cases} x = -2 + \alpha - \beta \\ y = \beta \\ z = 1 - 2\alpha + \beta \end{cases}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad b)\quad \pi' \equiv \begin{cases} x = 2 + \alpha + \beta \\ y = -1 + \alpha \\ z = 2 + 2\beta \end{cases}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$c)\quad \pi'' \equiv \begin{cases} x = 3\alpha - 2\beta \\ y = 1 - \alpha + \beta \\ z = 1 - 2\alpha - \beta \end{cases}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad d)\quad \pi''' \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\alpha + \beta \\ y = 2 - \beta - 2\alpha \\ z = 1 + \alpha - \beta \end{cases}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

12.34. Calcula el área de los paralelogramos generados por los puntos,

$a)\ A(3,-1,-2), B(2,0,-1), C(-2,1,2)$

$b)\ A(1,2,3), B(3,2,1), C(1,3,2)$

$c)\ A(0,1,1), B(1,0,1), C(1,1,0)$

$d)\ A(0,1,1), B(1,0,1), C(1,1,0)$

D. PRODUCTO MIXTO. VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO.

12.41. Dados los vectores,

$$\vec{u} = (3,-1,4) \quad , \quad \vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k} \quad , \quad \vec{w} = (-2,1,1) \quad , \quad \vec{r} = 2\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\,\vec{k}$$

Calcule los productos mixtos siguientes,

$a)\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ $\quad b)\ [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$ $\quad c)\ [\vec{v}, \vec{w}, \vec{r}]$ $\quad d)\ [\vec{r}, \vec{v}, \vec{w}]$

$e)\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{r}]$ $\quad f)\ [\vec{w}, \vec{r}, \vec{v}]$ $\quad g)\ [\vec{u}, \vec{w}, \vec{r}]$ $\quad h)\ [\vec{r}, \vec{v}, \vec{u}]$

12.42. Dados los siguientes vectores,

$$\vec{u} = (1,-3,2) \quad , \quad \vec{v} = 2\,\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k} \quad , \quad \vec{w} = (2,3,-1) \quad , \quad \vec{r} = -\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + 2\,\vec{k}$$

Calcula los volúmenes de los paralelepípedos formados por los vectores,

$$a)\ \vec{u},\vec{v},\vec{w} \qquad b)\ \vec{v},\vec{w},\vec{r} \qquad c)\ \vec{u},\vec{v},\vec{r} \qquad d)\ \vec{u},\vec{w},\vec{r}$$

12.43. De un paralelepípedo se sabe que su base está formada por los puntos,

$$A(1,2,-1), B(2,1,1), C(2,1,2)$$

Sabiendo que su volumen es $14\,u^3$, calcula su altura.

12.44. Dados los siguientes vectores,

$$\vec{u} = (0,-1,1) \quad , \quad \vec{v} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k} \quad , \quad \vec{w} = (1,2,-3) \quad , \quad \vec{r} = \vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} - \vec{k}$$

Calcula los volúmenes de los tetraedros formados por los vectores,

$$a)\ \vec{u},\vec{v},\vec{w} \qquad b)\ \vec{v},\vec{w},\vec{r} \qquad c)\ \vec{u},\vec{v},\vec{r} \qquad d)\ \vec{u},\vec{w},\vec{r}$$

12.45. Dados los siguientes puntos, calcula el volumen del tetraedro que generan,

$a)\ A(1,0,-1), B(0,1,1), C(0,0,1), D(1,2,0)$

$b)\ A(0,-2,1), B(1,1,-1), C(2,0,-1), D(-1,2,1)$

$c)\ A(4,2,-3), B(5,-1,2), C(2,3,2), D(-1,3,1)$

12.46. Dados los puntos siguientes,

$a)\ A(3,-1,2), B(1,-1,0), C(0,1,1), D(4,1,2)$

$b)\ A(1,2,4), B(3,-2,1), C(4,-1,0), D(-3,1,2)$

$c)\ A(-2,3,3), B(4,2,-1), C(0,-1,4), D(2,-3,2)$

i) Calcula el área del triángulo ABC
ii) Calcula el volume del tretraedro $ABCD$
iii) Concluye cuál es la distancia entre el plano que contiene a los puntos $A, B\ y\ C$ y el punto D.