WPM/5/ANEN/MAT1/LWDPM/SPA/P07

LA WEB DEL PROFE DE MATES

CONTROL 7

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Lunes 19 de FEBRERO de 2024

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10,75 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.
- Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

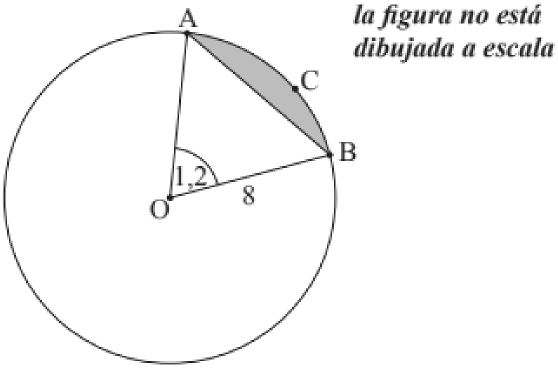
SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1 punto]

1. En una llanura inmensa, a las doce de la mañana, Mario y Elena se encuentran separados por una distancia de $20\ km$. La aparición de un OVNI suspendido en el aire entre ambos los sorprende. Tratan de comunicarse por móvil y se dan la siguiente información: Mario observa el artefacto bajo un ángulo de $15°$ sobre la horizontal y Elena lo observa con un ángulo de $25°$ sobre la horizontal. Calcula algebraicamente a qué altura se encuentra suspendido el OVNI y cuál es la distancia sobre el terrero a la que están cada uno de la sombra del OVNI. (1 punto)

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Matemáticas NS, P2, Noviembre 2014 ej, 3)**

2. La siguiente figura muestra un círculo de centro O y radio $8cm$.



Los puntos $A, B\ y\ C$ pertenecen a la circunferencia del círculo y $\widehat{AOB} = 1{,}2\ rad$.

(a) Halle la longitud del arco ACB. (0,25 puntos)

(b) Halle AB. (0,25 puntos)

(c) A partir de lo anterior, halle el perímetro de la zona sombreada ABC. (0,25 puntos)

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Análisis y Enfoques NS P2, Mayo 2023 ej 4)**

3. El desarrollo de $(x + h)^8$, donde $h \in \mathbb{R}^+$, se puede escribir así:

$$x^8 + ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + \ldots + h^8$$

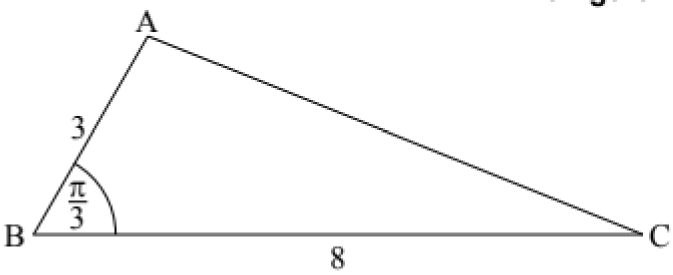
donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Sabiendo que los coeficientes $a, b\ y\ d$ son los tres primeros términos de una progresión geométrica, halle el valor de h.

[Puntuación máxima: 2,25 puntos] **(Matemáticas NM, P1, Noviembre 2017 ej, 4)**

4. La siguiente figura muestra el triángulo ABC, siendo $AB = 3cm$, $BC = 8cm$, y $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}\ rad$.

la figura no está dibujada a escala

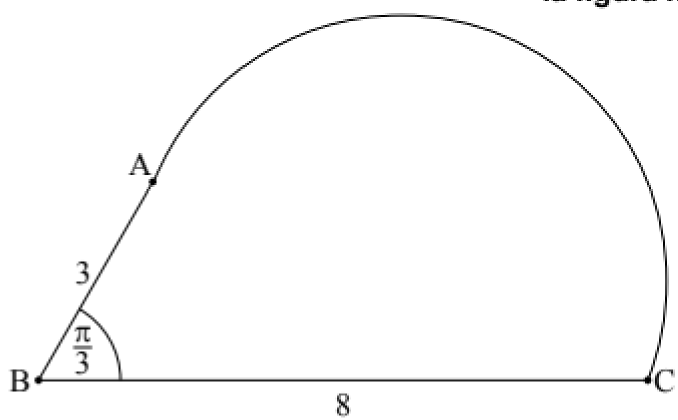


(a) Muestre que la longitud del lado AC = 7cm. (0,5 puntos)

(b) Calcule los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{ACB}$. (0,75 puntos)

(c) En el diagrama que aparece a continuación, la figura se ha formado añadiendo al triángulo un semicírculo de diámetro AC.

la figura no está dibujada a escala



Halle el área y el perímetro exacto de esta figura. (1 punto)

[Puntuación máxima: 3,25 puntos] **(Análisis y Enfoques NS, P1, Noviembre 2022 ej, 11)**

5. Considere un código de tres cifras abc , donde a cada letra $a, b\ y\ c$ se le asigna uno de los siguientes valores: $1, 2, 3, 4\ o\ 5$.

(a) Halle el número total de códigos posibles:

(i) Suponiendo que los valores se pueden repetir (por ejemplo, 121 o 444). (0,5 puntos)

(ii) Suponiendo que no se repite ningún valor. (0,5 puntos)

Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a cada letra $a, b\ y\ c$ se le asigna uno de los siguientes valores: $1, 2, 3, 4$ o 5. Suponga que no se repite ningún valor.

Considere el caso en el que uno de los factores de $P(x)$ es $(x^2 + 3x + 2)$.

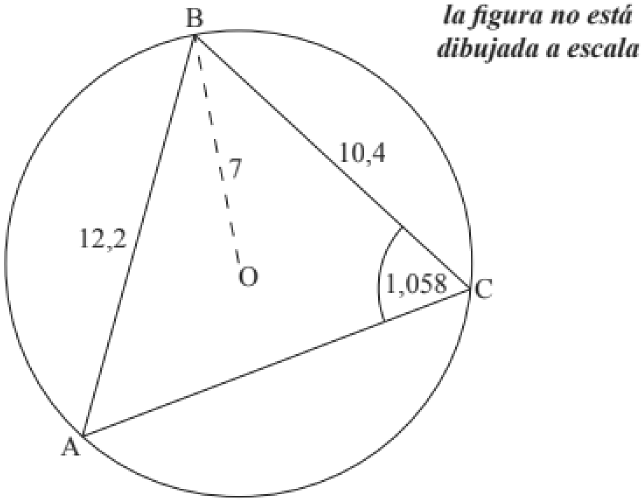
(b) (i) Halle una expresión que dé b en función de a. (1 punto)

(ii) A partir de lo anterior, muestre que la única manera en la que se pueden asignar los valores es $a = 4, b = 5\ y\ c = 2$. (0,75 puntos)

(iii) Exprese $P(x)$ como un producto de factores lineales. (0,5 puntos)

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Matemáticas NM, P2, Noviembre 2013 ej, 8)**

6. Considere un círculo de centro O y radio $7\ cm$. El triángulo ABC se dibuja de tal modo que sus vértices están sobre la circunferencia del círculo.



$$AB = 12{,}2\ cm\ ,\ \ BC = 10{,}4\ cm\ \ y\ \ \widehat{ACB} =\ 1{,}058\ radianes$$

(a) Halle $\widehat{BAC}$ en radianes. (0,5 puntos)

(b) Halle AC. (0,5 puntos)

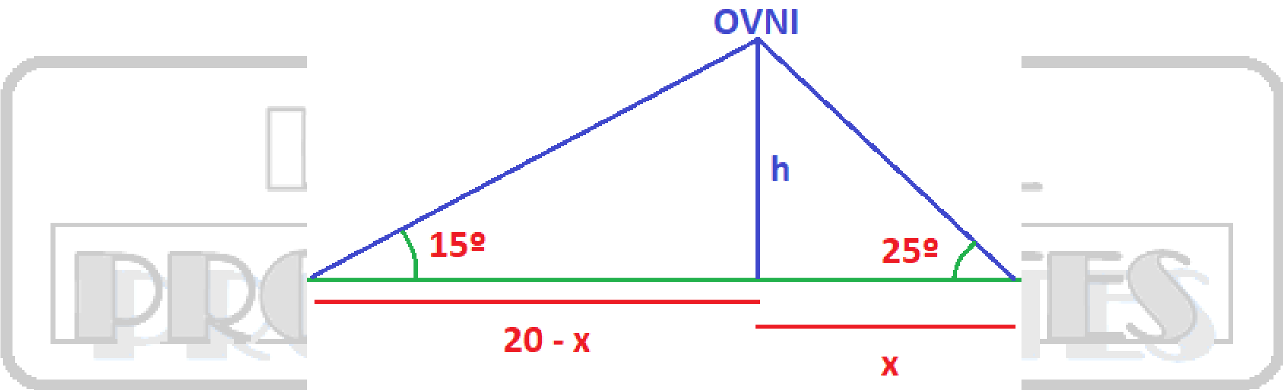
(c) Halle la longitud del arco ABC. (1 punto)

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CONTROL Nº 5 DE ANÁLISIS Y ENFOQUES

[Puntuación máxima: 1 punto]

1. En una llanura inmensa, a las doce de la mañana, Mario y Elena se encuentran separados por una distancia de $20\,km$. La aparición de un OVNI suspendido en el aire entre ambos los sorprende. Tratan de comunicarse por móvil y se dan la siguiente información: Mario observa el artefacto bajo un ángulo de $15°$ sobre la horizontal y Elena lo observa con un ángulo de $25°$ sobre la horizontal. Calcula algebraicamente a qué altura se encuentra suspendido el OVNI y cuál es la distancia sobre el terrero a la que están cada uno de la sombra del OVNI. (1 punto)

En una llanura inmensa, a las doce de la mañana, Mario y Elena se encuentran separados por una distancia de $20\,km$. La aparición de un OVNI suspendido en el aire entre ambos los sorprende. Tratan de comunicarse por móvil y se dan la siguiente información: Mario observa el artefacto bajo un ángulo de $15°$ sobre la horizontal y Elena lo observa con un ángulo de $25°$ sobre la horizontal. Calcula algebraicamente a qué altura se encuentra suspendido el OVNI y cuál es la distancia sobre el terrero a la que están cada uno de la sombra del OVNI.



Llamando x a la distancia entre Elena y la sombra del OVNI, y h a la altura a la que está suspendido el OVNI tendremos el sistema de ecuaciones siguiente,

$$\left.\begin{array}{r} tan\ 15 = \dfrac{h}{20-x} \\ tan\ 25 = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \ h = (20-x)\cdot tan\ 15 \\ \Leftrightarrow \ h = x \cdot tan\ 25 \end{array}$$

Resolvemos,

$$\left.\begin{array}{r} tan\ 15 = \dfrac{h}{20-x} \\ tan\ 25 = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow \ h = (20-x)\cdot tan\ 15 \\ \Leftrightarrow \ h = x \cdot tan\ 25 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \ (20-x)\cdot tan\ 15 = x \cdot tan\ 25$$

Por lo tanto,

$$(20-x)\cdot \tan 15 = x\cdot \tan 25 \ \Leftrightarrow \ 20\cdot \tan 15 - x\cdot \tan 15 = x \cdot \tan 25 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 20\cdot \tan 15 = x\cdot \tan 25 + x\cdot \tan 15 = \ \Leftrightarrow \ x = \frac{20 \tan 15}{\tan 25 + \tan 15} \approx 7{,}29\ km$$

Por lo tanto, Elena está a 7,29 km de la sombra del OVNI y Mario,

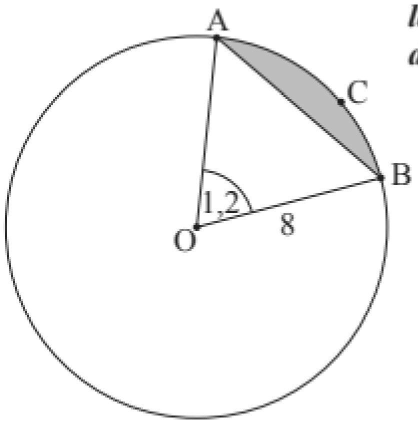
$$20\ km - 7{,}29\ km = 12{,}71\ km$$

La altura a la que está suspendido el OVNI es,

$$h = \frac{20 \tan 15 \cdot \tan 25}{\tan 25 + \tan 15} \approx 3{,}4\ km$$

[Puntuación máxima: 0,75 puntos] **(Matemáticas NS, P2, Noviembre 2014 ej, 3)**

2. La siguiente figura muestra un círculo de centro O y radio $8cm$.



la figura no está dibujada a escala

Los puntos $A, B\ y\ C$ pertenecen a la circunferencia del círculo y $\widehat{AOB} = 1{,}2\ rad.$

(a) Halle la longitud del arco ACB. (0,25 puntos)

(b) Halle AB. (0,25 puntos)

(c) A partir de lo anterior, halle el perímetro de la zona sombreada ABC. (0,25 puntos)

(a) Halle la longitud del arco ACB.

Hacemos regla de tres para calcular la longitud de arco ACB

Rad		Longitud
$2\pi\ rad$	$\leftrightarrow$	$2 \cdot \pi \cdot 8$
$1{,}2\ rad$	$\leftrightarrow$	x

$$x = \frac{1{,}2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 8}{2\pi} = 9{,}6 \text{ cm}$$

(b) Halle AB.

Por el teorema del coseno,

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}$$

Entonces,

$$AB^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos(1{,}2) = 128 + 128 \cdot 0{,}362 \approx 81{,}618$$

Por lo tanto,

$$AB = \sqrt{81{,}618} = 9{,}03\ cm$$

(c) A partir de lo anterior, halle el perímetro del segmento circular sombreado ABC.

El perímetro de la zona sombreada es,

$$Perímetro = AB + ABC = \sqrt{81{,}618}\ cm + 9{,}6\ cm \approx 18{,}63\ cm$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Análisis y Enfoques NS P2, Mayo 2023 ej 4)**

3. El desarrollo de $(x + h)^8$, donde $h \in \mathbb{R}^+$, se puede escribir así:

$$x^8 + ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + \ldots + h^8$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Sabiendo que los coeficientes $a, b \; y \; d$ son los tres primeros términos de una progresión geométrica, halle el valor de h.

Puesto que,

$$(x + h)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \cdot x^{8-k} \cdot h^k$$

Entonces,

- Como,

$$8 - k = 7 \quad \Leftrightarrow \quad k = 1$$

Entonces,

$$\binom{8}{1} \cdot x^{8-1} \cdot h^1 = ax^7 \quad \Leftrightarrow \quad 8h = a$$

- Como,

$$8 - k = 6 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2$$

Entonces,

$$\binom{8}{2} \cdot x^{8-2} \cdot h^2 = bx^6 \quad \Leftrightarrow \quad 28h^2 = b$$

- Como,

$$8 - k = 4 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4$$

Entonces,

$$\binom{8}{4} \cdot x^{8-4} \cdot h^2 = bx^4 \quad \Leftrightarrow \quad 70h^4 = d$$

Como a, b, d están en progresión geométrica entonces

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{28h^2}{8h} = \frac{70h^4}{28h^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7h}{2} = \frac{5h^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 7h = 5h^2 \quad \Leftrightarrow$$

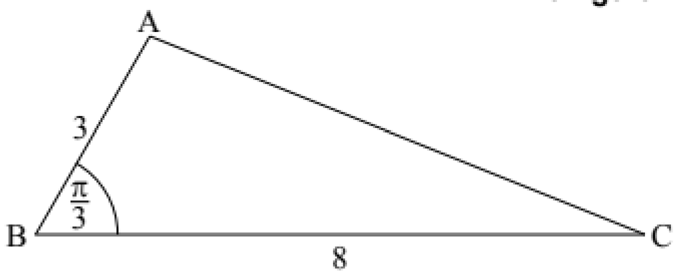
$$\Leftrightarrow \quad 5h^2 - 7h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h \cdot (5h - 7) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} h = 0 \\ h = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

Como $h \in \mathbb{R}^+$, entonces $h = \frac{7}{5}$.

[Puntuación máxima: 2,25 puntos] **(Matemáticas NM, P1, Noviembre 2017 ej, 4)**

4. La siguiente figura muestra el triángulo ABC, siendo $AB = 3cm$, $BC = 8cm$, y $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}\ rad.$

la figura no está dibujada a escala

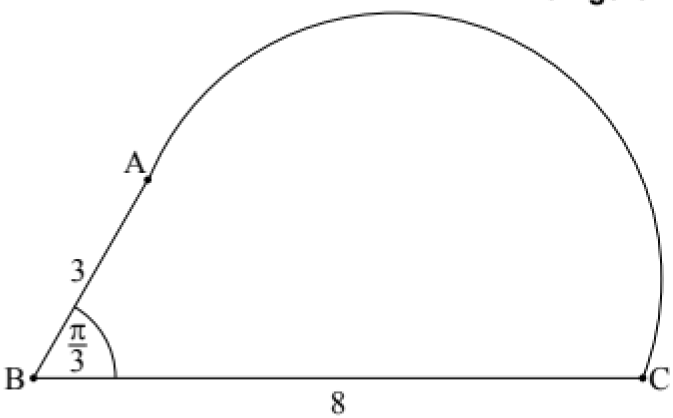


(a) Muestre que la longitud del lado AC = 7cm. (0,5 puntos)

(b) Calcule los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{ACB}$. (0,75 puntos)

(c) En el diagrama que aparece a continuación, la figura se ha formado añadiendo al triángulo un semicírculo de diámetro AC.

la figura no está dibujada a escala



Halle el área y el perímetro exacto de esta figura. (1 punto)

(a) Muestre que la longitud del lado AC = 7cm.

Por el teorema del coseno,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$$

Entonces,

$$AC^2 = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 9 + 64 - 48 \cdot \frac{1}{2} = 73 - 24 = 49$$

Por lo tanto,

$$AC = \sqrt{49} = 7\ cm$$

(b) Calcule los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{ACB}$.

Calculamos $\widehat{ACB}$, teniendo en cuenta que es un ángulo agudo. Por el teorema del seno,

$$\frac{sen\left(\widehat{ABC}\right)}{AC}=\frac{sen\left(\widehat{ACB}\right)}{AB}$$

Entonces,

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}{7}=\frac{sen\left(\widehat{ACB}\right)}{3} \quad \Leftrightarrow \quad sen\left(\widehat{ACB}\right)=\frac{3\cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}{7}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{14}$$

Por lo tanto,

$$\left(\widehat{ACB}\right)=arcsen\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{14}\right)=0{,}38\,rad$$

El ángulo $\widehat{BAC}$, que es obtuso, los calculamos mediante la propiedad de la suma de ángulos de un triángulo cualquiera. Si lo hiciéramos por el teorema del seno, hay que tener en cuenta que este ángulo es obtuso. Por tanto será,

$$\widehat{BAC}=\pi\,rad-\widehat{ABC}-\widehat{ACB}=\pi\,rad-\frac{\pi}{3}rad\;-0{,}38\,rad=1{,}714\,rad$$

O bien,

$$\widehat{ACB}=21°\;\;47'\,12{,}44'' \quad y \quad \widehat{BAC}=98°\,12'47{,}56''$$

(c) Halle el área y el perímetro exacto de esta figura.

El semicírculo tiene por radio,

$$r=\frac{AC}{2}=\frac{7}{2}=3{,}5\;cm$$

Por tanto, su área es,

$$Área(semicírculo)=\frac{\pi\cdot r^2}{2}=\frac{\pi\cdot 3{,}5^2}{2}=19{,}2423\;cm^2$$

Por otra parte, la fórmula de Herón, el área del triángulo ABC,

$$Área(ABC)=\sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

con semiperímetro s,

$$s=\frac{AB+AC+BC}{2}=\frac{3\;cm+8\;cm+7\;cm}{2}=\frac{18\;cm}{2}=9\;cm$$

Por lo tanto, el área del triángulo es,

$$Área(ABC)=\sqrt{9\cdot(9-8)\cdot(9-7)\cdot(9-3)}=\sqrt{108}\approx 10{,}392\;\;cm^2$$

En conclusión, el área de la figura es la suma de las áreas del triángulo y el semicírculo, es decir,

$$\acute{A}rea\ figura = \frac{\pi \cdot 3{,}5^2}{2} + \sqrt{108} \approx 19{,}2423\ cm^2 + 10{,}39\ cm^2 \approx 29{,}635\ cm^2$$

En cuanto al perímetro, la longitud de la semicircunferencia de radio $r = 3{,}5\ cm$ es,

$$\frac{L}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} = \pi \cdot 3{,}5 = 10{,}996\ cm$$

El perímetro de la figura se completa con las medidas de AB y BC de tal modo que el perímetro pedido mide,

$$Per\acute{i}metro = 3\ cm + 8\ cm + \pi \cdot 3{,}5\ cm \approx 21{,}996\ cm$$

[Puntuación máxima: 3,25 puntos] **(Análisis y Enfoques NS, P1, Noviembre 2022 ej, 11)**

5. Considere un código de tres cifras abc, donde a cada letra $a, b\ y\ c$ se le asigna uno de los siguientes valores: $1, 2, 3, 4\ o\ 5$.

(a) Halle el número total de códigos posibles:

(i) Suponiendo que los valores se pueden repetir (por ejemplo, 121 o 444). (0,5 puntos)

(ii) Suponiendo que no se repite ningún valor. (0,5 puntos)

Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a cada letra $a, b\ y\ c$ se le asigna uno de los siguientes valores: $1, 2, 3, 4$ o 5. Suponga que no se repite ningún valor.

Considere el caso en el que uno de los factores de $P(x)$ es $(x^2 + 3x + 2)$.

(b) (i) Halle una expresión que dé b en función de a. (1 punto)

(ii) A partir de lo anterior, muestre que la única manera en la que se pueden asignar los valores es $a = 4, b = 5\ y\ c = 2$. (0,75 puntos)

(iii) Exprese $P(x)$ como un producto de factores lineales. (0,5 puntos)

(a) (i) Suponiendo que los valores se pueden repetir (por ejemplo, 121 o 444).

Se trata de ordenaciones de 5 elementos tomados de 3 en tres en las que importa el orden y hay repetición. Por lo tanto el número total de códigos será,

$$VR_{5,3} = 5^3 = 125\ códigos$$

(a) (ii) Suponiendo que no se repite ningún valor.

Se trata de ordenaciones de 5 elementos tomados de 3 en tres en las que importa el orden y no hay repetición. Por lo tanto el número total de códigos será,

$$V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60\ códigos$$

(b) (i) Halle una expresión que dé b en función de a.

Si $(x^2 + 3x + 2)$ es un factor de $P(x)$ entonces las raíces del polinomio $x^2 + 3x + 2$ son raíces de $P(x)$. Calculamos las raíces de $x^2 + 3x + 2$,

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} =$$

$$= \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{-3 + 1}{2} = -1 \\ x = \dfrac{-3 - 1}{2} = -2 \end{cases}$$

Entonces $P(-1) = 0$ y $P(-2) = 0$.

En ese caso,

$$P(-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 + a - b + c = 0$$

$$P(-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -8 + 4a - 2b + c = 0$$

Si restamos las dos igualdades obtenemos,

$$\begin{array}{rl} & -1 + \ \ a - \ \ b + c = 0 \\ - & \underline{-8 + 4a - 2b + c = 0} \\ & 7 - 3a + \ \ b \quad \ \ = 0 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$7 - 3a + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 3a - 7$$

(b)(ii) A partir de lo anterior, muestre que la única manera en la que se pueden asignar los valores es $\boldsymbol{a = 4, b = 5 \ y \ c = 2}$.

Como $b = 3a - 7$ entonces,

- Si $a = 1$ entonces $b = 3 \cdot 1 - 7 = -4 \notin \{1,2,3,4,5\}$
- Si $a = 2$ entonces $b = 3 \cdot 2 - 7 = -1 \notin \{1,2,3,4,5\}$
- Si $a = 3$ entonces $b = 3 \cdot 3 - 7 = +2 \notin \{1,2,3,4,5\}$
- Si $a = 4$ entonces $b = 3 \cdot 4 - 7 = +5 \in \{1,2,3,4,5\}$
- Si $a = 5$ entonces $b = 3 \cdot 5 - 7 = +8 \in \{1,2,3,4,5\}$

Por tanto, $P(x)$ solo puede ser de dos tipos,

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + d \qquad o \qquad P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + d$$

Como $x = -1$ es raíz de $P(x)$ entonces, para el primer polinomio tendríamos que,

$$P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 + 3 - 2 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 0$$

Cosa que no puede ser.

Como $x = -1$ es raíz de $P(x)$ entonces, para el segundo polinomio tendríamos que,

$$P(-1) = (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 + 4 - 5 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 2$$

Cosa que es posible. Por lo tanto, $a = 4, b = 5 \ y \ \ c = 2$

(b) (iii) Exprese $P(x)$ como un producto de factores lineales.

Si $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ y sabiendo que dos de sus raíces son $x = -1$ y $x = -2$ solo nos falta por calcular la tercera raíz r.

Como la factorización de $P(x)$ es,

$$P(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - r)$$

Y el término independiente 2 se calcula multiplicando los términos independientes de los tres factores fórmulas *Cardano-Vieta*) entonces,

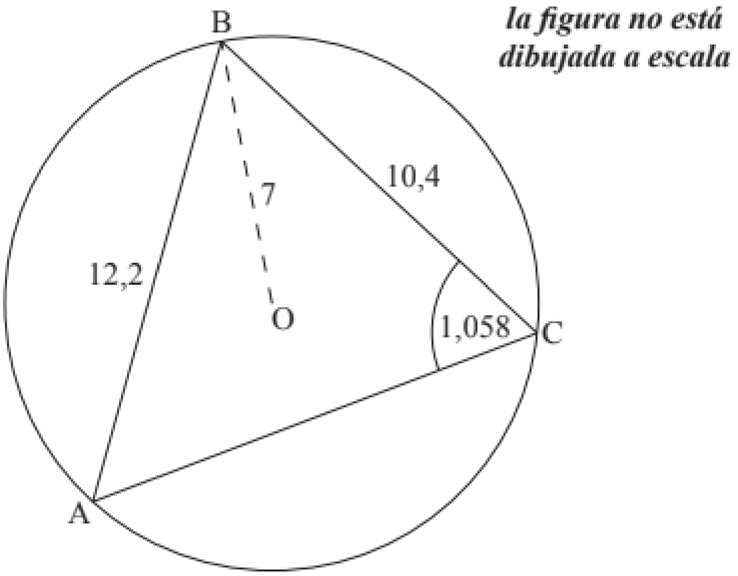
$$2 = 1 \cdot 2 \cdot (-r) \quad \Leftrightarrow \quad 2 = -2r \quad \Leftrightarrow \quad r = -1$$

En ese caso, se puede expresar $P(x)$ como un producto de factores lineales según,

$$P(x) = (x + 1)^2 \cdot (x + 2)$$

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Matemáticas NM, P2, Noviembre 2013 ej, 8)**

6. Considere un círculo de centro O y radio $7\ cm$. El triángulo ABC se dibuja de tal modo que sus vértices están sobre la circunferencia del círculo.



$$AB = 12{,}2\ cm\ ,\ \ BC = 10{,}4\ cm\ \ y\ \ \widehat{ACB} = 1{,}058\ radianes$$

(a) Halle $\widehat{BAC}$ en radianes. (0,5 puntos)

(b) Halle AC. (0,5 puntos)

(c) Halle la longitud del arco ABC. (1 punto)

(a) Halle $\widehat{BAC}$.

Por el teorema del seno,

$$\frac{sen\left(\widehat{ACB}\right)}{AB} = \frac{sen\left(\widehat{BAC}\right)}{BC}$$

Entonces,

$$\frac{sen\ (1{,}058)}{12{,}2} = \frac{sen\left(\widehat{BAC}\right)}{10{,}4} \quad \Leftrightarrow \quad sen\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{10{,}4 \cdot sen\ (1{,}058)}{12{,}2} = 0{,}743$$

Por lo tanto,

$$\widehat{BAC} = arcsen\ (0{,}743) \approx 0{,}837\ rad$$

(b) Halle AC.

Como, el ángulo $\widehat{ABC}$ mide,

$$ABC = 2\pi - \widehat{ACB} - \widehat{BAC} = \pi - 1{,}058 - 0{,}837 = 1{,}246\ rad$$

Por el teorema del seno,

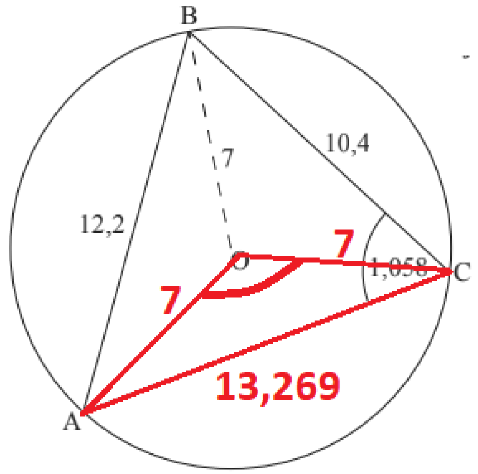
$$\frac{sen\,(\widehat{ACB})}{AB} = \frac{sen\,(\widehat{BAC})}{AC}$$

Entonces,

$$\frac{sen\,(1{,}058)}{12{,}2} = \frac{sen\,(1{,}246)}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad AC = \frac{12{,}2 \cdot sen\,(1{,}246)}{sen\,(1{,}058)} = 13{,}269\ cm$$

(c) Halle la longitud del arco ABC.

Debemos calcular primero el ángulo central $\widehat{AOC}$, a partir del teorema del coseno,



$$AC^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos(\widehat{AOC})$$

Sustituimos,

$$13{,}269^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos(\widehat{AOC}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 13{,}269^2 = 49 + 49 - 98 \cdot \cos(\widehat{AOC})$$

$$\frac{13{,}269^2 - 98}{-98} = \cos(\widehat{AOC}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos(\widehat{AOC}) \approx -0{,}797$$

Por lo tanto,

$$\widehat{AOC} = arc\cos(-0{,}797) \approx 2{,}492\ rad$$

Hacemos regla de tres para calcular la longitud de arco contrario a ABC

Rad		Longitud
$2\pi\ rad$	$\leftrightarrow$	$2\pi \cdot 7$
$2{,}492\ rad$	$\leftrightarrow$	x

$$x = \frac{2{,}492 \cdot 2\pi \cdot 7}{2\pi} = 17{,}447\ \text{cm}$$

Por lo tanto, la longitud de arco de ABC es,

$$L = 2\pi \cdot 7 - 17{,}447 = 26{,}536\ \text{cm}$$