2 º BACH. – MATEMÁTICAS II

DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES. PROBLEMAS CON SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

UNIDAD 11

A. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS POR EL MÉTODO DE GAUSS, CRAMER Y ROUCHÉ-FRÖBENIUS

11.1. Resuelve los siguientes sistemas por el método de Gauss-Jordán:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x-y=5 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \quad b)\ \left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=4 \\ x-y+2z=5 \\ 3x+2y+z=7 \end{array}\right\} \quad c)\ \left.\begin{array}{r} 3x-2y+z=6 \\ 2x+4y-3z=8 \\ x+y+z=5 \end{array}\right\} \quad d)\ \left.\begin{array}{r} 4x+2y-z=7 \\ x-3y+2z=4 \\ 2x+5y+z=0 \end{array}\right\}$$

11.2. Resuelve los siguientes sistemas compatibles determinados por el método de Cramer:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=10 \\ 3x-y+2z=7 \\ 2x+y-4z=3 \end{array}\right\} \quad b)\ \left.\begin{array}{r} 2x+y+4z=13 \\ x-y-2z=1 \\ 3x+2y+z=10 \end{array}\right\} \quad c)\ \begin{array}{r} x+3y-2z=5 \\ 2x-y+z=4 \\ 3x+2y+2z=11 \end{array} \quad d)\ \left.\begin{array}{r} 3x-y+2z=8 \\ x+2y-z=3 \\ 2x+3y+z=9 \end{array}\right\}$$

11.3. Resuelve los siguientes sistemas compatibles indeterminados por el método de Rouché-Fröbenius:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} x+y+z=5 \\ 2x+3y-z=7 \\ 3x-y+2z=8 \end{array}\right\} \quad b)\ \left.\begin{array}{r} 4x+y+2z=8 \\ 3x+2y-z=5 \\ 2x-y+z=4 \end{array}\right\} \quad c)\ \left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=6 \\ x+2y-z=3 \\ 3x+y+2z=7 \end{array}\right\} \quad d)\ \left.\begin{array}{r} x-2y+2z=4 \\ 3x+y+z=7 \\ 2x+3y-z=8 \end{array}\right\}$$

11.4. Resuelve los siguientes sistemas homogéneos:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} 2x+4y-3z=0 \\ x-3y+5z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{array}\right\} \quad b)\ \left.\begin{array}{r} 3x-6y+4z=0 \\ 2x+7y-5z=0 \\ x-4y+3z=0 \end{array}\right\} \quad c)\ \left.\begin{array}{r} 4x-2y+6z=0 \\ x+5y-4z=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{array}\right\} \quad d)\ \left.\begin{array}{r} 5x+3y-2z=0 \\ 2x-4y+6z=0 \\ x+2y-3z=0 \end{array}\right\}$$

B. DISCUSIÓN DEL NÚMERO DE SOLUCIONES Y CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCÓGNITAS POR EL MÉTODO DE GAUSS, CRAMER Y ROUCHÉ-FRÖBENIUS

11.11. Clasifica los siguientes sistemas y resuélvelos, en el caso en que se pueda, por el método de Gauss-Jordan o por el método de Rouché-Cramer:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=3 \\ 4x-y+2z=6 \\ 6x+5y+3z=9 \end{array}\right\} \quad b)\ \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x-y+3z=5 \\ 3x+2y+4z=7 \end{array}\right\} \quad c)\ \left.\begin{array}{r} 2x+y-z=5 \\ x-3y+2z=3 \\ 3x+2y+z=8 \end{array}\right\} \quad d)\ \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=4 \\ 2x+y+z=5 \\ 3x-2y+4z=6 \end{array}\right\}$$

$$e)\ \left.\begin{array}{r} -4x+6y-2z=-8 \\ 6x-9y+3z=12 \\ 2x-3y+z=4 \end{array}\right\} \quad g)\ \left.\begin{array}{r} x+2y-z+t=4 \\ 2x-y+3z-2t=2 \\ 3x+y+z+t=5 \end{array}\right\} \quad h)\ \left.\begin{array}{r} 2x-y+z+t=7 \\ 3x+2y-2z+3t=3 \\ x+y-z+2t=8 \end{array}\right\}$$

11.12. Discute los siguientes sistemas en función del parámetro establecido mediante el teorema de Rouché y resuélvelos, en caso de ser compatibles, por el método Rouché-Cramer:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x+ky+2z=5 \\ kx+y+z=0 \end{array}\right\} \quad b)\ \left.\begin{array}{r} x+ky+z=1 \\ 2y+kz=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \quad c)\ \left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ x+ky+z=3 \\ kx-3z=6 \end{array}\right\} \quad d)\ \left.\begin{array}{r} kx-y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ kx+y-z=k \end{array}\right\}$$

11.13. Dados los siguientes sistemas, discutirlos en función del parámetro el número de soluciones y resolverlos en el caso de ser compatibles:

$$a)\ \left.\begin{array}{r} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a \end{array}\right\} \quad b)\ \left.\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x+ay+3z=2 \\ 2x+(2+a)y+6z=3 \end{array}\right\} \quad c)\ \left.\begin{array}{r} x+ay+z=2 \\ x+z=a \\ ax+2y+z=3 \end{array}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+2y+(2a+5)\cdot z=0 \\ 2x+ay+3z=a \\ -x+ay-z=0 \end{array}\right\} \quad d)\ \left.\begin{array}{r} -2x+y-z=-1 \\ -x+ay+z=2 \\ 2x+y+az=3 \end{array}\right\} \quad e)\ \left.\begin{array}{r} mx+y=-3m \\ (m-1)x-my=5 \\ 2mx-(m+1)y=2m \end{array}\right\}$$

$$f)\ \left.\begin{array}{r} (a+1)x+4z=0 \\ (a-1)y+z=3 \\ 4x+2ay+z=3 \end{array}\right\} \quad g)\ \left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ y+2z+t=0 \\ 2x+2ky-t=0 \end{array}\right\} \quad h)\ \left.\begin{array}{r} ax+z+t=1 \\ ay+z-t=1 \\ ay+z-2t=2 \\ az-t=0 \end{array}\right\}$$

11.14. Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=a \\ x+a^2z=2a+1 \\ x-y+a(a-1)z=2a \end{array}\right\}$$

a) Discutir el número de soluciones del sistema en función los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para el $a=0$.

11.15. Consideramos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} kx+y+kz=1 \\ x+ky+z=k \\ kx+ky+z=k \end{array}\right\}$$

a) Clasificar el sistema en función del parámetro k.

b) Resolver el sistema para el valor $k=1$.

c) Resolver el sistema para el valor $k=-1$.

C. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES.

11.21. Una empresa instala casas prefabricadas de tres tipos A, B y C. Cada casa de tipo A necesita 10 horas de albañilería, 2 de fontanería y 2 de electricista. Cada casa de tipo B necesita 15 horas de albañilería, 4 de fontanería y 3 de electricista. Cada casa de tipo C necesita 20 horas de albañilería, 6 de fontanería y 5 de electricista. La empresa emplea exactamente 270 horas de trabajo al mes de albañilería, 68 de fontanería y 58 de electricista. ¿Cuántas casas de cada tipo instala la empresa en un mes? *(Solución: 10 casas tipo A; 6 casas tipo B; y 4 casas tipo C)*

11.22. En la liga de futbol profesional de Libertonia compiten veinte equipos. Cada equipo debe tener exactamente veinticinco jugadores de los que tres, y no más, han de ser porteros. Se sabe que la tercera parte del número de defensas coincide con la diferencia entre el número de centrocampistas y el número de delanteros. Por otro lado, la suma de la mitad del número de centrocampistas y el doble del número de delanteros excede en 25 unidades al número de defensas. Calcule el número de defensas, el número de centrocampistas y el número de delanteros que juegan en la liga. *(Solución: Defensas 210, centrocampistas 150 y delanteros 80).*

11.23. He pensado un número de tres cifras tal que la cifra de las decenas es la media aritmética de las otras dos. Además, si a dicho número se le resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198. Por último, las tres cifras de mi número suman 12.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales que recoja la información anterior y clasifícalo. Para ello, puede serte útil observar que el número cuya cifra de las centenas es x, la de las decenas y, y la de las unidades z, puede expresarse como 100x + 10y + z.
b) Determina, si el problema tiene solución, el número de tres cifras que he pensado.

11.24. Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno de barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho? *(Solución: 2 hectáreas de barbecho; 5 hectáreas de trigo; y 3 hectáreas de cebada)*

11.25. Antes de comenzar la 1a clase de la mañana, hay aparcados en el recinto de un IES coches de color azul, de color rojo y de color verde, de modo que la suma del nº de rojos y del nº de verdes excede en dos unidades al nº de azules. Al finalizar 1a clase y antes de comenzar la 2ª abandonan el centro tres coches de color azul y llegan tres coches de color rojo, de tal modo que, en esos momentos la suma del nº de azules y del nº de verdes excede al nº de rojos en dos unidades Al finalizar la 2ª clase y antes de comenzar la 3ª abandonan el centro 2 coches verdes. En ese momento la suma del nº de rojos y del nº de azules excede en dos unidades al quíntuplo del nº de verdes. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que responda a las condiciones del enunciado.
b) Calcula el número de coches de cada color que hay en el I.E.S antes del comienzo de la clase. *(Solución: Hay aparcados 10 coches azules, 7 rojos y 5 verdes)*

11.26. En una caja hay monedas de 1, de 2 y de 5 céntimos de euro. El número de monedas de 1 céntimo excede en cuatro unidades a la suma del número de las de 2 céntimos y del número de las de 5 céntimos. El número de monedas de 2 céntimos excede en una unidad al 40% del número de monedas de 1 céntimo. Sabiendo que si tuviéramos una moneda más de 1 céntimo, el valor de todas ellas sería de 50 céntimos, calcula el número de monedas que hay de cada clase. *(Solución: En la caja hay 15 monedas de 1 céntimo, 7 monedas de 2 céntimos y 4 monedas de 5 céntimos).*

11.27. En una clase se celebran elecciones para Delegado. Se presentan dos candidatos: X e Y. El 5% del total de votos emitidos es nulo. Cuatro veces el número de votos obtenidos por Y menos tres veces el número de votos obtenidos por X excede al número de votos nulos en una unidad. Si dividimos el número de votos obtenidos por X entre el número de los obtenidos por Y se obtiene de cociente 1 y de resto 7. ¿Cuántos votos obtuvo cada candidato? Resuélvelo mediante el método Gauss o de Cramer. *(Solución: El candidato X recibe 32 votos, el candidato Y recibe 25 votos, y 3 votos son nulos)*

11.28. Con las 12 monedas que tengo en el bolsillo (de 50 céntimos, de 20 céntimos y de 10 céntimos de euro) puedo comprar un pastel cuyo precio es 2,80 euros. Si una moneda de 50 céntimos lo fuera de 20, entonces el número de las de 20 céntimos y el número de las de 10 céntimos coincidiría. ¿Cuántas monedas tengo de cada clase? *(Solución: el pastel se compra con 3 monedas de 50 céntimos, 4 monedas de 20 céntimos y 5 monedas de 10 céntimos.)*

11.29. En la XXI Olimpiada Nacional de Química se contrataron 5 autobuses de 55 plazas cada uno, incluida la del conductor, para el transporte de alumnos, profesores y acompañantes. Todos los autobuses iban fueron al completo. La suma del 10% del número de profesores y del 20% del número de acompañantes excede en una unidad al 10% del número de alumnos. El número de alumnos duplicaría al de profesores en el caso de que hubieran asistido 5 profesores menos. Determina el número de alumnos, de profesores y de acompañantes. *(Solución: van a la Olimpiada 150 alumnos, 80 profesores y 40 acompañantes)*

11.30. Al 50 % del total de los alumnos de una clase les gusta sólo el fútbol, al 20 % del total les gusta sólo el baloncesto y el resto, que son 6 alumnos, no les gustan estos deportes. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que responda a las condiciones del enunciado.
b) Calcula el total de alumnos y el número de aficionados al fútbol y al baloncesto.

(Solución: El total de alumnos es 20, los alumnos que sólo les gusta el fútbol son 10 mientras que los que sólo les gusta el baloncesto son 4)

11.31. Un popular grupo musical realiza tres conciertos únicos: el lunes, el miércoles y el viernes. Se sabe que el número de espectadores del miércoles se incrementó un 12 % respecto al lunes; el viernes, este número disminuyó un 12 % respecto al miércoles; el lunes el número de espectadores superó en 36 a los espectadores del viernes. Resuelve mediante un sistema cuántos espectadores hubo en cada concierto que dio este grupo. *(Solución: El lunes había 2500 espectadores; el miércoles 2.800 espectadores; y el viernes había 2.464 espectadores).*

11.32. Un alumno de 2º de Bachillerato emplea en la compra de tres lápices, un sacapuntas y dos gomas de borrar, tres euros. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un sacapuntas y de una goma de borrar. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una goma de borrar. Determina el precio de un lápiz, de un sacapuntas y de una goma de borrar. *(Solución: el precio de un lápiz es 55 céntimos; el de un sacapuntas 75 céntimos; y el de una goma de borrar 30 céntimos).*

11.33. En una fábrica de artículos deportivos se dispone de 10 cajas de diferente tamaño: Grandes, Medianas y Pequeñas para envasar las camisetas de atletismo producidas, con capacidad para 50, 30 y 25 camisetas, respectivamente. Si una caja grande fuera mediana, entonces habría el mismo número de grandes y de medianas. En total se envasan 390 camisetas. Determina el número de cajas que hay de cada clase. *(Solución: se disponen de 5 cajas grandes, 3 cajas medianas y 2 cajas pequeñas)*

11.34. La suma de las edades actuales de los tres hijos de un matrimonio es 59 años. Hace cinco años, la edad del menor era un tercio de la suma de las edades que tenían los otros dos. Dentro de cinco años, el doble de la edad del hermano mediano excederá en una unidad a la suma de las edades que tendrán los otros dos. Halla las edades actuales de cada uno de los hijos. *(Solución: Las edades son 23, 20 y 16 años)*

11.34. Un alumno de 2º de Bachillerato emplea en la compra de tres lápices, un sacapuntas y dos gomas de borrar, tres euros. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euro a la suma de los precios de un sacapuntas y de una goma de borrar. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una goma de borrar. Determina el precio de un lápiz, de un sacapuntas y de una goma de borrar. *(Solución: el precio de un lápiz es 55 céntimos; el de un sacapuntas 75 céntimos; y el de una goma de borrar 30 céntimos).*

11.35. Para la compra de un artículo de precio 10,70 euros se utilizan monedas de 1 euro, de 50 céntimos de euro y de 20 céntimos de euro. El número total de monedas excede en una unidad al triple de monedas de 1 euro. El 30% de la suma del número de monedas de 1 euro con el doble del número de monedas de 50 céntimos coincide con el número de monedas de 20 céntimos. Halla el número de monedas que se utilizan de cada clase. *(Solución: el artículo se compra con 6 monedas de 1 euro, 7 monedas de 50 céntimos y 6 monedas de 20 céntimos)*

11.36. Un dietista veterinario ha establecido la alimentación diaria (en términos de grasas, carbohidratos y proteínas) de un quebrantahuesos pirenaico que se ha recogido en el hogar de recuperación de fauna en el que trabaja. Se sabe que el quebrantahuesos necesita 500 g de alimento al día y que necesita 2500 Kcal. También se sabe que cada gramo de grasa proporciona 9 Kcal, cada gramo de carbohidratos 4 Kcal y cada gramo de proteínas 4 Kcal. Debido a que el ave ha llegado en un estado de debilidad, el veterinario estima que el consumo de carbohidratos debe ser 40 g más del doble de proteínas. Determine la cantidad de kilocalorías diarias que obtendrá el quebrantahuesos procedentes de grasas, de carbohidratos y de proteínas. *(Solución: Obtiene diariamente 900 Kcal procedentes de grasas, 1120 Kcal procedentes de carbohidratos y 480 Kcal procedentes de proteínas).*

11.37. Un hombre le dice a su esposa: "¿Te has dado cuenta que desde el día de nuestra boda hasta el día del nacimiento de nuestro hijo transcurrieron el mismo número de años que desde el día del nacimiento de nuestro hijo hasta hoy? El día del nacimiento de nuestro hijo la suma de nuestras edades era de 55 años". La mujer le replicó: "Me acuerdo que en ese día del nacimiento de nuestro hijo, tú tenías la edad que yo tengo ahora y además recuerdo que el día de nuestra boda el doble de la edad que tú tenías excedía en 20 años a la edad que yo tengo hoy". Halla las edades actuales de ambos. *(Solución: La edad actual del padre es 35 años, 30 años la de la madre y 5 años la del hijo).*

11.38. Los 30 alumnos de un grupo de 4º de ESO cursan tres asignaturas optativas distintas: Francés, Cultura Clásica y Energías alternativas. Si dos alumnos de Francés se hubiesen matriculado de Cultura Clásica, entonces estas dos asignaturas tendría el mismo número de alumnos. Si dos alumnos de Cultura Clásica se hubiesen matriculado en Energías Alternativas, entonces Energías Alternativas tendría doble número de alumnos que Cultura Clásica. Halla el número de alumnos matriculado en cada asignatura. *(Solución: 12 alumnos cursan Francés, 8 alumnos Cultura Clásica y 10 alumnos Energías Alternativas).*

11.39. En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B de 24 toneladas y los de tipo C de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10% de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo? *(Solución: Cantidad transportada por A: 7x14=98 toneladas Cantidad transportada por B: 5x24=120 toneladas. Cantidad transportada por C: 3x28=84 toneladas).*