## A. OPERACIONES CON MATRICES

**9.1.** Calcula $a, b, c$ $y$ $d$ para que se cumpla

$$2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & (a+b) \\ (c+d) & 4 \end{pmatrix}$$

**9.2.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $y$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:

$a)\ A + B$ $\quad b)\ A + B + C - I$ $\quad c)\ A - B - C$ $\quad d)\ 3A + 5B - 6C + 2I$

**9.3.** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $y$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

calcula:

$a)\ A - B$ $\quad b)\ A - 2B + C$ $\quad c)\ A - B - 3C$ $\quad d)\ 3A + 5B - 6C + 2I$

**9.4.** Halla la matriz A que cumple la igualdad $A - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

**9.5.** Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ $y$ $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, calcula,

cuando se pueda, las siguientes multiplicaciones de matrices,

$a)\ A \cdot B$ $\quad b)\ B \cdot A$ $\quad c)\ B \cdot C$ $\quad d)\ C \cdot B$ $\quad e)\ A \cdot C$ $\quad f)\ C \cdot A$

$g)\ A^t \cdot B^t$ $\quad h)\ B \cdot A \cdot C$ $\quad i)\ B \cdot C \cdot A$ $\quad j)\ C \cdot B^t$ $\quad k)\ A^t \cdot C$ $\quad l)\ C \cdot A \cdot B$

**9.6.** Calcular los siguientes productos de matrices:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad d)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$e)\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad f)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**9.7.** Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} \text{ y } D=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

calcula:

$a)\ A \cdot B$ $\quad b)\ B \cdot A$ $\quad c)\ A^t \cdot C^t$ $\quad d)\ D \cdot A^t$

$a)\ A \cdot B \cdot C$ $\quad b)\ C \cdot B \cdot A$ $\quad c)\ D \cdot (B \cdot A)$ $\quad d)\ (C \cdot A)^t$

**9.9.** Calcula la matriz solución $A^2 - 3A - 1$ siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2.

**9.9.** Calcula los valores de $a, b, c\ y\ d$ para que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & 3\\ -1 & d\end{pmatrix}$$

**9.10.** Calcula los valores de $a$ para que la matriz $\begin{pmatrix}2a & 4a-5\\ -a^2 & a/2\end{pmatrix}$ sea simétrica.

**9.11.** Calcula los valores de a, b y c para que la matriz $\begin{pmatrix}a+b & a^2 & 2b-3\\ a & a-b & a^2+1\\ b & 2a & a\end{pmatrix}$ sea simétrica.

**9.12.** Calcula los valores de a y de b para que la matriz $W=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ conmute con la matriz $\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 1\end{pmatrix}$.

**B) MATRIZ INVERSA Y ECUACIONES MATRICIALES.**

**9.21.** Comprueba que la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ tiene por matriz inversa $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

**9.22.** Calcular la matriz inversa de las siguientes matrices por el método de Gauss-Jordan.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad D=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

**9.23.** Halla todas las matrices cuadradas X triangulares superiores tales que $A^t \cdot X = X^t \cdot A$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**9.24.** Determina la matriz $X$ que verifica que $AX - B = O$ con $O$ la matriz nula de orden 2, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

**9.25.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3, resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

$a)\ A + X = B \qquad b)\ XA + B = 3I \qquad c)\ BX - 2I = A$

**9.26.** Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular la matriz X que verifica en cada apartado la ecuación.

$a)\ AX = BX + I \qquad b)\ XA - X = B \qquad c)\ B^tX + I = 2X$

**9.27.** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3, resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

$a) A \cdot X \cdot B = I \qquad b)\ X \cdot A^{-1} - B = I \qquad c)\ A = X - B^{-1} \cdot X$

**9.28** Resolver los siguientes sistemas matriciales siendo $X$ e $Y$ matrices cuadradas de orden 2,

$a)\ \left.\begin{matrix} X + 2Y = A \\ X - Y = 2B \end{matrix}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{matrix} 2X + 3Y = C \\ 3X - 2Y = I \end{matrix}\right\} \qquad c)\ \left.\begin{matrix} 3X + 4Y = A \\ 2X - Y = B \end{matrix}\right\}$

$d)\ \left.\begin{matrix} -X + Y = B \\ X - 3Y = A \end{matrix}\right\} \qquad e)\ \left.\begin{matrix} X + 4Y = C - A \\ -2X + Y = A - 2C \end{matrix}\right\} \qquad f)\ \left.\begin{matrix} 2X + 5Y = C - I \\ 3X + 4Y = B + I \end{matrix}\right\}$

Con $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden dos.

## C. POTENCIAS DE MATRICES CUADRADAS.

**9.31.** Halla todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**9.32.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula razonadamente la matriz $A^2$ Y $A^3$ en función de $n$. Calcula una expresión general para $A^n$ en función de $n$ y, a través de ella, calcula $A^{15}$.

**9.33.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula una expresión general para $A^n$ en función de $n$ y, a través de ella, calcula $A^{350} - A^{250}$.

**9.34.** Dada la matriz $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcula razonadamente la matriz $Y^n$ en función de $n$.

**9.35.** Dada la matriz $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula razonadamente la matriz $Z^n$ en función de $n$.

**9.36.** Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula razonadamente la matriz $B^n$ en función de $n$.

**9.37.** Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pruebe que $C^n = 2^{n-1} \cdot C$ para $n \in \mathbb{N}$.

**9.38.** Para la matriz $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $W^{50}$ y $W^{97}$.

**9.39.** Sea la matriz cuadrada $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Demostrar que $A^3 - I = O$ siendo I la matriz identidad de orden 3 y $O$ la matriz nula de orden 3.

b) Calcular razonadamente $A^{10}$.

**9.40.** Sea la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Demostrar que $A^3 + I = O$ siendo I la matriz identidad de orden 3 y $O$ la matriz nula de orden 3.

b) Calcular razonadamente $A^{13}$.

c) A partir de los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz $X$ que verifica la igualdad $A^2X + I = A$

## D. RANGO DE UNA MATRIZ.

**9.51.** Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 4 & 10 \\ 3 & -6 & -15 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**9.52.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$, ¿Qué valor debe tener el parámetro k para que el rango de la matriz sea 1?, ¿y para que sea 2?, ¿La matriz puede tener rango mayor que 2?

**9.53.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$, determinar si existe algún valor o valores de $k$ para que $Rg(A) = 1$. ¿Para qué valores de $k$ ocurre que $Rg(A) = 2$?

**9.54.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$, ¿Qué valor debe tener el parámetro k para que el rango de la matriz sea 2?, ¿y para que sea 3?, ¿para algún valor de k, el rango de la matriz A puede ser 1?

**9.55.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$, discute el valor del rango de $A$ según los distintos valores del parámetro $k$.

**9.56.** Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$, discute el valor del rango de $M$ según los distintos valores del parámetro $m$.

**9.57.** Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$, discute el valor del rango de $M$ según los distintos valores del parámetro $m$.

**9.58.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$, discute el valor del rango de $A$ según los distintos valores del parámetro $\alpha$.

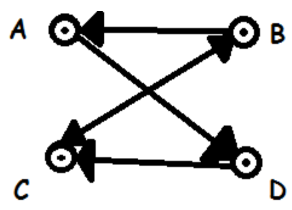
**9.59.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 2-\alpha \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, discute el valor del rango de $A$ según los distintos valores del parámetro $\alpha$.



## E) APLICACIONES DE LAS MATRICES A GRAFOS

**9.61.** Calcula las matrices de adyacencia y el número de caminos de longitud 3 que unen a todos los nodos o vértices de los siguientes grafos:

a)




b)