

A. OPERACIONES CON MATRICES

9.1. Calcula a, b, c y d para que se cumpla

$$2 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 7 \\ -2 & 3d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & (a+b) \\ (c+d) & 4 \end{pmatrix}$$

9.2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $A + B$ b) $A + B + C^t - I$ c) $A^t - B - C$ d) $3A + 5B^t - 6C^t + 2I$

9.3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $A - B$ b) $A^t - 2B^t + C$ c) $A - B - 3C^t$ d) $3A^t + 5B^t - 2I$

9.4. Halla la matriz A que cumple la igualdad $A - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}^t = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

9.5. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, calcula, cuando se pueda, las siguientes multiplicaciones de matrices,

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) $B \cdot C$ d) $C^t \cdot B$ e) $A \cdot C$ f) $C \cdot A^t$
g) $A^t \cdot B^t$ h) $B \cdot A \cdot C$ i) $B \cdot C \cdot A$ j) $C \cdot B^t$ k) $A^t \cdot C$ l) $C \cdot A \cdot B$

9.6. Calcular los siguientes productos de matrices:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot (3 \quad -1 \quad 4)$ d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $(3 \quad -1 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$

9.7. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

calcula:

$$\begin{array}{llll} a) A \cdot B & b) B \cdot A & c) A^t \cdot C^t & d) D \cdot A^t \\ a) A \cdot B \cdot C & b) C \cdot B \cdot A & c) D \cdot (B \cdot A) & d) (C \cdot A)^t \end{array}$$

9.9. Calcula la matriz solución $A^2 - 3A - 1$ siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 2.

9.9. Calcula los valores de a, b, c y d para que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 3 \\ -1 & d \end{pmatrix}$$

9.10. Calcula los valores de a para que la matriz $\begin{pmatrix} 2a & 4a-5 \\ -a^2 & a/2 \end{pmatrix}$ sea simétrica.

9.11. Calcula los valores de a, b y c para que la matriz $\begin{pmatrix} a+b & a^2 & 2b-3 \\ a & a-b & a^2+1 \\ b & 2a & a \end{pmatrix}$ sea simétrica.

9.12. Calcula los valores de a y de b para que la matriz $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ conmute con la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$.

B) MATRIZ INVERSA Y ECUACIONES MATRICIALES.

9.21. Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ tiene por matriz inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

9.22. Calcular la matriz inversa de las siguientes matrices por el método de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

9.23. Halla todas las matrices cuadradas X triangulares superiores tales que $A^t \cdot X = X^t \cdot A$

con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9.24. Determina la matriz X que verifica que $AX - B = O$ con O la matriz nula de orden 2,

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

9.25. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3, resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $A + X = B$ b) $XA + B = 3I$ c) $BX - 2I = A$

9.26. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular la matriz X que verifica en cada apartado la ecuación.

a) $AX = BX + I$ b) $XA - X = B$ c) $B^t X + I = 2X$

9.27. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3, resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $A \cdot X \cdot B = I$ b) $X \cdot A^{-1} - B = I$ c) $A = X - B^{-1} \cdot X$

9.28 Resolver los siguientes sistemas matriciales siendo X e Y matrices cuadradas de orden 2, con $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden dos.

a) $\begin{cases} X + 2Y = A \\ X - Y = 2B \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2X + 3Y = C \\ 3X - 2Y = I \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3X + 4Y = A \\ 2X - Y = B \end{cases}$

d) $\begin{cases} -X + Y = B \\ X - 3Y = A \end{cases}$ e) $\begin{cases} X + 4Y = C - A \\ -2X + Y = A - 2C \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2X + 5Y = C - I \\ 3X + 4Y = B + I \end{cases}$

C. POTENCIAS DE MATRICES CUADRADAS.

9.31. Halla todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9.32. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula razonadamente la matriz A^2 y A^3 en función de n . Calcula una expresión general para A^n en función de n y, a través de ella, calcula A^{15} .

9.33. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula una expresión general para A^n en función de n y, a través de ella, calcula $A^{350} - A^{250}$.

9.34. Dada la matriz $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, calcula razonadamente la matriz Y^n en función de n .

9.35. Dada la matriz $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula razonadamente la matriz Z^n en función de n .

9.36. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula razonadamente la matriz B^n en función de n .

9.37. Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pruebe que $C^n = 2^{n-1} \cdot C$ para $n \in \mathbb{N}$.

9.38. Para la matriz $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula W^{50} y W^{97} .

9.39. Sea la matriz cuadrada $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Demostrar que $A^3 + I = O$ siendo I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3.

b) Calcular razonadamente A^{10} .

9.40. Sea la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Demostrar que $A^3 + I = O$ siendo I la matriz identidad de orden 3 y O la matriz nula de orden 3.
- Calcular razonadamente A^{13} .
- A partir de los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas, halla la matriz X que verifica la igualdad $A^2X + I = A$

D. RANGO DE UNA MATRIZ.

9.51. Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -9 & -1 & -8 \\ 1 & -10 & -3 & 5 & -8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & -1/2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

9.52. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & k \end{pmatrix}$, ¿Qué valor debe tener el parámetro k para que el rango de la matriz sea 1?, ¿y para que sea 2?, ¿La matriz puede tener rango mayor que 2?

9.53. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix}$, determinar si existe algún valor o valores de k para que $Rg(A) = 1$. ¿Para qué valores de k ocurre que $Rg(A) = 2$?

9.54. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$, ¿Qué valor debe tener el parámetro k para que el rango de la matriz sea 2?, ¿y para que sea 3?, ¿para algún valor de k , el rango de la matriz A puede ser 1?

9.55. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ k+1 & k & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \end{pmatrix}$, discute el valor del rango de A según los distintos valores del parámetro k .

9.56. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$, discute el valor del rango de M según los distintos valores del parámetro m .

9.57. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$, discute el valor del rango de M según los distintos valores del parámetro m .

9.58. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$, discute el valor del rango de A según los distintos valores del parámetro α .

9.59. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 2-\alpha \\ 1 & 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$, discute el valor del rango de A según los distintos valores del parámetro α .

E) APLICACIONES DE LAS MATRICES A GRAFOS

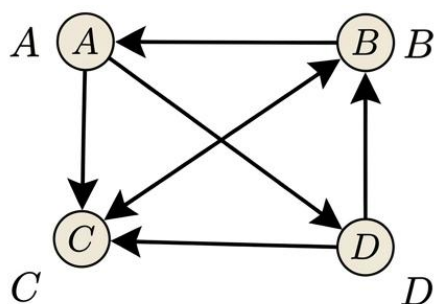
1.61. Representa el grafo correspondiente a las situaciones que se describen y escribe su matriz de adyacencia:

- Red de distribución logística: Un centro logístico cuenta con cuatro almacenes (A, B, C, D). Existen rutas unidireccionales de envío desde A hacia B y C ; desde B hacia C ; desde C hacia D ; y una ruta de retorno directo desde D hasta A .
- Interacciones en una comunidad digital: Un grupo de cuatro usuarios (1,2,3,4) interactúa en una plataforma. El usuario 1 sigue al usuario 2 y a sí mismo (guarda borradores); el usuario 2 envía mensajes al 3 y al 4; el usuario 3 interactúa con el 1 y el 2; y el usuario 4 solo se envía notificaciones a sí mismo.

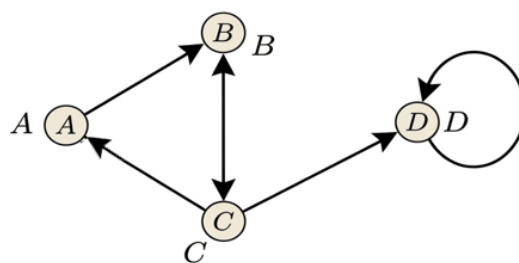
- c) Circuito cerrado de transporte urbano: Un sistema de tranvía conecta tres estaciones principales (P_1, P_2, P_3). La estación P_1 conecta en ambos sentidos con P_2 y P_3 , mientras que la estación P_2 solo permite viajes en un único sentido hacia P_3 .

1.62. Escribe las matrices de adyacencia y el número de caminos de longitud 3 que unen a todos los nodos o vértices de los siguientes grafos:

a)



b)



1.63. Una pequeña red interna conecta cuatro servidores (A, B, C y D). Las conexiones bidireccionales directas existen entre:

- A y B, A y C
- B y C, B y D
- C y D



- a) Escribe la matriz de adyacencia M del grafo asociando las filas y columnas en orden A, B, C, D .
- b) Determina cuántos caminos distintos de **longitud 2** existen para enviar un paquete de datos desde el servidor A hasta el servidor D .
- c) Calcula el número de caminos de **longitud 3** que empiezan y terminan en el mismo servidor B .

1.64. Tres puertos (P_1, P_2, P_3) operan rutas de navegación con sentidos únicos de circulación debido a las corrientes marinas:

- Hay rutas desde P_1 hacia P_2 y hacia P_3 .
- Hay una ruta desde P_2 hacia P_3 .
- Hay una ruta de retorno desde P_3 hacia P_1 .

a) Construye la matriz de adyacencia A .

b) Calcula A^2 y A^3 .

c) Un barco realiza un itinerario haciendo exactamente 3 escalas (camino de longitud 3). ¿De cuántas formas distintas puede ir del puerto P_1 al puerto P_3 ? ¿Existe algún trayecto cerrado de longitud 3 que vuelva al origen P_1 ?

1.65. Un grupo de tres usuarios (U_1, U_2, U_3) interactúa en una plataforma.



Las reglas de difusión de un mensaje son:

- U_1 envía información a U_2 y a sí mismo (retiene la información en su muro, representado como un bucle).
- U_2 transmite información a U_3 .
- U_3 transmite información a U_1 y a U_2 .

a) Representa la situación mediante la matriz de adyacencia N .

b) Halla la matriz N^2 e interpreta el valor del elemento $n_{11}^{(2)}$ y $n_{32}^{(2)}$.

c) Si la información se comparte durante 3 pasos consecutivos, calcula cuántas vías distintas existen para que una publicación iniciada por U_3 acabe en el muro de U_2 .